РЕШЕБНИК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

О.В. Зимина
А.И. Кириллов
Т.А. Сальникова

РЕШЕБНИК

О.В. Зимина, А.И. Кириллов, Т.А. Сальникова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2001

УДК 51
ББК 22.1
З 62

Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. **Высшая математика.** — 2-е изд., испр. — М.: Физико-математическая литература, 2001. — 368 с. (Решебник.) — ISBN 5-9221-0126-9.

Книга содержит примеры решения почти всех типовых задач по высшей математике. Каждой задаче отведен отдельный раздел, содержащий общую постановку задачи, план ее решения с необходимыми теоретическими пояснениями и решение конкретного примера. Кроме того, в раздел включены десять задач для самостоятельного решения и ответы к ним.

Для студентов и преподавателей технических, экономических и сельскохозяйственных вузов; может быть использована как при очной, так и при дистанционной формах обучения.

Ил. 6.

Первое издание — 2000 г.

ISBN 5-9221-0126-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В толковом словаре русского языка под редакцией профессора Д.Н. Ушакова сказано, что решебник — это учебное пособие, содержащее подробные решения задач, помещенных в каком-нибудь задачнике, ключ к задачнику. РЕШЕБНИК "Высшая математика" — ключ сразу к нескольким основным задачникам, используемым при изучения математики, среди которых в первую очередь следует упомянуть изданный в сотнях тысяч экземпляров "Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)" Л. А. Кузнецова. В дополнение к этой книге распространяется пакет программ РЕШЕБНИК.ВМ, который помогает решать задачи, выполняя по указанию учащихся всевозможные математические действия.

Чтобы приобрести устойчивый навык решения задач одного типа, нужно решить три-пять таких задач. Однако, решение объективно необходимого количества задач не предусмотрено действующими учебными планами по двум причинам.

Во-первых, даже без повторений стандартный объем обязательных домашних заданий превосходит все разумные пределы.

Во-вторых, в имеющихся задачниках собраны разнообразные задачи, среди которых редко встречается несколько задач в точности одного и того же типа.

Выходит, что студенты должны все понять решив одну–две задачи. При этом их внимание отвлекается от сути дела на второстепенные или уже пройденные вопросы, а также на выполнение различных преобразований и расчетов.

Более того, чтобы научиться решать задачи, нужно самостоятельно выполнять все действия, все "потрогать руками". Но студенты не могут сами выполнить все действия, поскольку на выполнение всех действий вручную требуется слишком много времени. Студенты не могут все "потрогать руками", поскольку чтобы познакомиться со всеми математическими действиями и ситуациями, нужно решить столько задач, на решение которых у студентов нет времени.

По этим причинам студенты, как правило, не решают задачи полностью и, следовательно, не до конца уясняют себе их суть. Например, у студентов часто нет времени на графическое представление ответов задач и их анализ, а также на анализ и проверку промежуточных результатов. Некоторые важные и интересные задачи имеют столь громоздкие решения, что преподаватели не могут предложить их студентам.

В результате у студентов остаются более или менее обширные пробелы в знаниях.

Комплекс РЕШЕБНИК "Высшая математика" предназначен для того, чтобы устранить эти проблемы современного математического образования. Он — первый опыт создания учебного пособия нового типа, с которым возможно разнообразное общение: от пассивного чтения до внесения в него изменений и получения ответов на вопросы. Такое пособие в процессе работы адаптируется к потребностям учащегося и помогает ему применять на практике полученные из пособия знания.

Комплекс РЕШЕБНИК "Высшая математика" поможет студентам учиться по-новому, т.е. без ненужных трудностей и потерь времени, оптимальным образом организуя взаимодействие человека и компьютера, при котором дело человека — правильно ставить задачи, а дело компьютера — быстро и правильно их решать.

Комплекс РЕШЕБНИК "Высшая математика" состоит из книги РЕШЕБНИК "Высшая математика" и пакета компьютерных программ РЕШЕБНИК.ВМ.

Книга РЕШЕБНИК "Высшая математика" содержит примеры решения почти всех типовых задач из таких разделов высшей математики, как аналитическая геометрия, линейная алгебра, пределы, дифференцирование, графики, функции нескольких переменных, неопределенные, определенные и криволинейные интегралы, ряды, обыкновенные дифференциальные уравнения, кратные и поверхностные интегралы, векторный анализ.

Каждой задаче отведен отдельный раздел книги, содержащий общую постановку задачи, план ее решения с необходимыми теоретическими пояснениями и решение конкретного примера. Кроме того, в раздел включены задачи того же типа и ответы к ним. Преподаватели могут предложить часть из них на аудиторных практических занятиях, другие — в виде домашних заданий, остальные использовать в контрольных работах, на коллоквиумах, зачетах и экзаменах.

Чтобы научиться решать задачи того или иного типа, рекомендуется сначала изучить план решения (алгоритм) в общем виде, затем рассмотреть пример реализации плана в конкретном случае и затем по аналогии с ним решить несколько задач из числа предлагаемых для самостоятельного решения.

Пакет РЕШЕБНИК.ВМ состоит из документов MS Word и специальных компьютерных программ.

Документы MS Word в основном идентичны тем, которые включены в книгу.

Программы пакета обеспечивают связь (интерфейс) MS Word с системой символьной математики DERIVE фирмы Soft Warehouse Inc. Благодаря этой связи любое математическое выражение из документа MS Word может быть передано в DERIVE для преобразований, результат которых затем вставляется в документ MS Word.

В пакете РЕШЕБНИК.ВМ материалы книги РЕШЕБНИК "Высшая математика" становятся интерактивными шаблонами для документов студентов и преподавателей. Например, если студенту нужно решить какую-нибудь задачу, то он может:

1) найти задачу данного типа;

2) изучить план ее решения;

3) изучить пример;

4) изменить исходные данные и выполнить надлежащие действия с ними;

5) сохранить содержание окна в каком-нибудь файле;

6) передать файл преподавателю непосредственно или предварительно распечатав его.

Естественно, возникает вопрос: если пакет РЕШЕБНИК.ВМ выполняет математические действия за учащихся, то как же они смогут научиться выполнять эти действия самостоятельно? Ответ таков: пакет Решебник ВМ выполняет за учащихся не те математические действия, которые они изучают в данный момент, а те, которые они уже изучили раньше. Так экономится время, внимание концентрируется на сути изучаемого метода и математика становится проще для понимания и интересней.

Заметим, что при использовании пакета РЕШЕБНИК.ВМ высвобождается свыше 60% учебного времени. Это время целесообразно уделить решению нескольких задач одного и того же типа, анализу и обсуждению результатов, а также изучению новых тем и разделов математики, включение которых в программу ранее не представлялось возможным.

Подчеркнем, что для использования пакета РЕШЕБНИК.ВМ надо уметь пользоваться только MS Word. Все остальные навыки выработаются сами собой по мере изучения математики.

Студенты могут применять пакет и для решения задач по физике и другим точным наукам, а также для оформления отчетов по лабораторным и курсовым работам.

По истечении полутора-двух лет оказывается, что студенты умеют решать всевозможные задачи самостоятельно и с использованием мощнейшего пакета "Суперсистема символьной математики", который сформировался на их компьютерах в процессе учебы с помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ.

Преподаватели могут использовать пакет РЕШЕБНИК.ВМ при подготовке занятий, контрольных мероприятий, методической литературы, статей и для организации автоматического контроля знаний студентов.

Объем пакета РЕШЕБНИК.ВМ не превосходит 500 К.

Подробная информация о пакете РЕШЕБНИК.ВМ и сам пакет размещены на сайте Интернет www.AcademiaXXI.ru.

Авторы будут благодарны всем приславшим свои замечания о комплексе РЕШЕБНИК "Высшая математика" и предложения по адресу:

111250 Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, Московский энергетический институт (ТУ), кафедра высшей математики.

E-mail: KirillovAI@mpei.ru.

Глава 1
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

При изучении темы АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ вы научитесь решать задачи векторной алгебры и использовать свойства линейных операций с геометрическими векторами, скалярного, векторного и смешанного произведений векторов для решения геометрических задач. Вы научитесь решать задачи аналитической геометрии, связанные с различными видами уравнений плоскости и прямой и их взаимным расположением.

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете решить системы уравнений, вычислить определители, выполнить все численные расчеты и проверить правильность полученных вами результатов.

1.1. Разложение вектора по базису

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Найти разложение вектора* $\vec{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$ *по векторам* $\vec{p}=\{p_1,p_2,p_3\}$, $\vec{q}=\{q_1,q_2,q_3\}$ *и* $\vec{r}=\{r_1,r_2,r_3\}$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Искомое разложение вектора $\vec{x}$ имеет вид

$$\vec{x}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}.$$

2. Это векторное уравнение относительно α,β,γ эквивалентно системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} p_1\alpha+q_1\beta+r_1\gamma=x_1,\\ p_2\alpha+q_2\beta+r_2\gamma=x_2,\\ p_3\alpha+q_3\beta+r_3\gamma=x_3. \end{cases}$$

3. Решаем эту систему уравнений относительно α, β и γ и таким образом определяем коэффициенты разложения вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$. Записываем ответ в виде $\vec{x}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$.

Замечание. Если система уравнений не имеет решений (векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ лежат в одной плоскости, а вектор $\vec{x}$ ей не принадлежит), то вектор $\vec{x}$ нельзя разложить по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$. Если система уравнений имеет бесчисленное множество решений (векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ и вектор $\vec{x}$ лежат в одной плоскости), то разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ неоднозначно.

Пример. Найти разложение вектора $\vec{x} = \{3,-1,2\}$ по векторам $\vec{p} = \{2,0,1\}$, $\vec{q} = \{1,-1,1\}$ и $\vec{r} = \{1,-1,-2\}$.

Решение.

1. Искомое разложение вектора $\vec{x}$ имеет вид

$$\vec{x} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}.$$

2. Это векторное уравнение относительно α, β и γ эквивалентно системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 3, \\ -\beta - \gamma = -1, \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 2. \end{cases}$$

3. Система имеет единственное решение $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$.

Ответ. $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$.

Условия задач. *Написать разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$.*

1. $\vec{x} = \{-2,0,9\}$, $\vec{p} = \{0,-1,2\}$, $\vec{q} = \{1,0,-1\}$, $\vec{r} = \{-1,2,4\}$.
2. $\vec{x} = \{5,-12,-1\}$, $\vec{p} = \{1,-3,0\}$, $\vec{q} = \{1,-1,1\}$, $\vec{r} = \{0,-1,2\}$.
3. $\vec{x} = \{0,2,4\}$, $\vec{p} = \{3,1,-1\}$, $\vec{q} = \{0,-3,1\}$, $\vec{r} = \{1,1,1\}$.
4. $\vec{x} = \{-1,5,5\}$, $\vec{p} = \{2,1,1\}$, $\vec{q} = \{-2,0,-3\}$, $\vec{r} = \{-1,2,1\}$.
5. $\vec{x} = \{-1,-2,3\}$, $\vec{p} = \{2,0,1\}$, $\vec{q} = \{1,2,-1\}$, $\vec{r} = \{0,4,-1\}$.
6. $\vec{x} = \{-5,2,-1\}$, $\vec{p} = \{-1,1,0\}$, $\vec{q} = \{2,-1,3\}$, $\vec{r} = \{1,0,1\}$.
7. $\vec{x} = \{1,-5,7\}$, $\vec{p} = \{0,-1,1\}$, $\vec{q} = \{2,0,1\}$, $\vec{r} = \{3,-1,0\}$.
8. $\vec{x} = \{5,1,4\}$, $\vec{p} = \{2,0,2\}$, $\vec{q} = \{0,-1,1\}$, $\vec{r} = \{3,-1,4\}$.
9. $\vec{x} = \{1,1,-1\}$, $\vec{p} = \{1,1,0\}$, $\vec{q} = \{-1,0,1\}$, $\vec{r} = \{-1,0,2\}$.
10. $\vec{x} = \{-3,7,4\}$, $\vec{p} = \{-2,2,1\}$, $\vec{q} = \{2,0,1\}$, $\vec{r} = \{1,1,1\}$.

Ответы. 1. $\{2,-1,1\}$. 2. $\{4,1,-1\}$. 3. $\{-1,0,3\}$. 4. $\{-1,-1,3\}$. 5. $\{1,-3,1\}$. 6. $\{3,1,-4\}$. 7. $\{2,5,-3\}$. 8. $\{1,-2,1\}$. 9. $\{1,1,-1\}$. 10. $\{2,-1,3\}$.

1.2. Коллинеарность векторов

Постановка задачи. *Коллинеарны ли векторы* $\vec{p} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$ *и* $\vec{q} = \mu_1\vec{a} + \mu_2\vec{b}$, *где* $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ *и* $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$?

План решения. Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число α такое, что $\vec{p} = \alpha\vec{q}$. Иными словами, векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны,

1. Находим координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, пользуясь тем, что при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении на число координаты умножаются на это число.

2. Если координаты векторов $\vec{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$ и $\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ пропорциональны, т.е.

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3},$$

то векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны. Если равенства

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}$$

не выполняются, то векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ неколлинеарны.

Пример. Коллинеарны ли векторы $\vec{p} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{q} = 9\vec{b} - 12\vec{a}$, где $\vec{a} = \{-1, 2, 8\}$ и $\vec{b} = \{3, 7, -1\}$?

Решение.

1. Находим координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, пользуясь тем, что при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении на число координаты умножаются на это число:

$$\vec{p} = \{-13, -13, 35\}, \quad \vec{q} = \{39, 39, -105\}.$$

2. Так как

$$\frac{-13}{39} = \frac{-13}{39} = \frac{35}{-105},$$

то координаты пропорциональны. Следовательно, векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны.

Ответ. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны.

Условия задач. *Коллинеарны ли векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$?*

1. $\vec{a}=\{1,2,-3\}$, $\vec{b}=\{1,0,-1\}$, $\vec{p}=3\vec{a}+6\vec{b}$, $\vec{q}=-\vec{a}+2\vec{b}$.
2. $\vec{a}=\{2,0,1\}$, $\vec{b}=\{-2,3,1\}$, $\vec{p}=2\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$.
3. $\vec{a}=\{-2,2,1\}$, $\vec{b}=\{-1,-2,2\}$, $\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-\vec{b}$.
4. $\vec{a}=\{-1,2,3\}$, $\vec{b}=\{2,1,1\}$, $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.
5. $\vec{a}=\{2,5,1\}$, $\vec{b}=\{5,0,2\}$, $\vec{p}=-\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}$.
6. $\vec{a}=\{1,2,-2\}$, $\vec{b}=\{1,3,-1\}$, $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$.
7. $\vec{a}=\{1,2,3\}$, $\vec{b}=\{2,-1,0\}$, $\vec{p}=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=-3\vec{a}+\vec{a}$.
8. $\vec{a}=\{1,3,-1\}$, $\vec{b}=\{2,1,3\}$, $\vec{p}=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=-4\vec{a}+2\vec{a}$.
9. $\vec{a}=\{-1,-2,2\}$, $\vec{b}=\{1,0,2\}$, $\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=-2\vec{a}-6\vec{b}$.
10. $\vec{a}=\{1,3,2\}$, $\vec{b}=\{1,-2,6\}$, $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=-6\vec{a}+6\vec{b}$.

Ответы. 1. Нет. 2. Нет. 3. Нет. 4. Нет. 5. Нет. 6. Нет. 7. Да. 8. Да. 9. Да. 10. Да.

1.3. Угол между векторами

Постановка задачи. *Даны точки* $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ *и* $C(x_3,y_3,z_3)$. *Найти косинус угла между векторами* $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$.

План решения. Косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ определяется формулой

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{AB},\overline{AC})}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}\ . \tag{1}$$

1. Чтобы вычислить длины векторов $|\overline{AB}|$ и $|\overline{AC}|$ и скалярное произведение $(\overline{AB},\overline{AC})$, находим координаты векторов:

$$\overline{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},\quad \overline{AC}=\{x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1\}.$$

2. По формулам для длины вектора и скалярного произведения векторов имеем

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$|\overline{AC}|=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2},$$

$$(\overline{AB},\overline{AC})=(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)+(z_2-z_1)(z_3-z_1).$$

3. Вычисляем $\cos\varphi$ по формуле (1) и записываем ответ.

Пример. Даны точки $A(-2,4,-6)$, $B(0,2,-4)$ и $C(-6,8,-10)$. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Решение.

1. Находим координаты векторов $\overline{AB}=\{2,-2,2\}$ и $\overline{AC}=\{-4,4,-4\}$.

2. По формулам для длины вектора и скалярного произведения векторов имеем

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{3}, \quad |\overline{AC}| = \sqrt{(-4)^2+4^2+(-4)^2} = 4\sqrt{3},$$

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = 2\cdot(-4)+(-2)\cdot 4+2\cdot(-4) = -24.$$

3. Вычисляем $\cos\varphi$ по формуле (1):

$$\cos\varphi = \frac{-24}{2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}} = -1\,.$$

Ответ. Косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ равен -1.

Условия задач. *Найти косинус угла между векторами* $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$.

1. $A(2,-2,3)$, $B(1,-1,2)$, $C(4,-4,5)$.
2. $A(0,-2,6)$, $B(-12,-2,-3)$, $C(-9,-2,-6)$.
3. $A(2,3,-1)$, $B(4,5,-2)$, $C(3,1,1)$.
4. $A(-1,2,-2)$, $B(3,4,-5)$, $C(1,1,0)$.
5. $A(-2,-2,0)$, $B(1,-2,4)$, $C(5,-2,1)$.
6. $A(3,3,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(4,4,-1)$.
7. $A(-1,-7,-4)$, $B(2,-1,-1)$, $C(4,3,1)$.
8. $A(2,-2,6)$, $B(0,0,4)$, $C(6,-6,10)$.
9. $A(0,1,0)$, $B(3,1,4)$, $C(4,1,3)$.
10. $A(3,2,0)$, $B(1,4,-1)$, $C(4,0,2)$.

Ответы. 1. $\cos\varphi = -1$. 2. $\cos\varphi = 24/25$. 3. $\cos\varphi = -4/9$. 4. $\cos\varphi = 0$. 5. $\cos\varphi = \sqrt{2}/2$. 6. $\cos\varphi = 1/2$. 7. $\cos\varphi = 1$. 8. $\cos\varphi = -1$. 9. $\cos\varphi = 24/25$. 10. $\cos\varphi = -8/9$.

1.4. Площадь параллелограмма

Постановка задачи. *Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a} = \alpha_1\vec{p}+\alpha_2\vec{q}$ *и* $\vec{b} = \beta_1\vec{p}+\beta_2\vec{q}$, *если известно, что* $|\vec{p}| = p_0$, $|\vec{q}| = q_0$ *и угол между векторами* $\vec{p}$ *и* $\vec{q}$ *равен* φ.

План решения. *Площадь параллелограмма*, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна модулю их векторного произведения:

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]|. \tag{1}$$

1. Вычисляем $[\vec{a}, \vec{b}]$, используя свойства векторного произведения

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\alpha_1\vec{p} + \alpha_2\vec{q}, \beta_1\vec{p} + \beta_2\vec{q}] =$$

$$= \alpha_1\beta_1[\vec{p}, \vec{p}] + \alpha_1\beta_2[\vec{p}, \vec{q}] + \alpha_2\beta_1[\vec{q}, \vec{p}] + \alpha_2\beta_2[\vec{q}, \vec{q}] =$$

$$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[\vec{p}, \vec{q}].$$

2. Вычисляем модуль векторного произведения

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|\,|\vec{p}|\,|\vec{q}| \sin\varphi$$

($\sin\varphi \geq 0$, так как $0 \leq \varphi \leq \pi$).

3. Находим площадь параллелограмма, используя формулу (1)

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|\,|\vec{p}||\vec{q}| \sin\varphi.$$

Пример. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $3\pi/4$.

Решение.

1. Вычисляем $[\vec{a}, \vec{b}]$, используя свойства векторного произведения

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [3\vec{p} + 2\vec{q}, 2\vec{p} - \vec{q}] = 6[\vec{p}, \vec{p}] - 3[\vec{p}, \vec{q}] + 4[\vec{q}, \vec{p}] - 2[\vec{q}, \vec{q}] = -7[\vec{p}, \vec{q}].$$

2. Вычисляем модуль векторного произведения

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |-7[\vec{p}, \vec{q}]| = 7|\vec{p}||\vec{q}| \sin\frac{3\pi}{4} = 42\sqrt{2}.$$

3. Находим площадь параллелограмма, используя формулу (1)

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]| = 42\sqrt{2}.$$

Ответ. Площадь параллелограмма равна $42\sqrt{2}$ (ед. длины)^2.

Условия задач. *Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\widehat{\vec{p}\vec{q}}$ — угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$).*

1. $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=1$, $\widehat{\vec{p}\vec{q}}=\pi/6$.
2. $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=2$, $\widehat{\vec{p}\vec{q}}=\pi/4$.
3. $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $\widehat{\vec{p}\vec{q}}=\pi/2$.
4. $\vec{a}=3\vec{p}-5\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=1$, $\widehat{\vec{p}\vec{q}}=5\pi/6$.
5. $\vec{a}=\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+2\vec{q}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=6$, $\widehat{\vec{p}\vec{q}}=3\pi/4$.
6. $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=2$, $\widehat{\vec{p}\vec{q}}=\pi/3$.
7. $\vec{a}=2\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $\widehat{\vec{p}\vec{q}}=\pi/2$.
8. $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-4\vec{q}$, $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=4$, $\widehat{\vec{p}\vec{q}}=\pi/4$.
9. $\vec{a}=4\vec{p}-4\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=1$, $\widehat{\vec{p}\vec{q}}=\pi/6$.
10. $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $\widehat{\vec{p}\vec{q}}=\pi/3$.

Ответы. 1. $S=7$. 2. $S=14\sqrt{2}$. 3. $S=10$. 4. $S=11$. 5. $S=15\sqrt{2}$. 6. $S=24\sqrt{3}$. 7. $S=24$. 8. $S=70\sqrt{2}$. 9. $S=16$. 10. $S=9\sqrt{3}$.

1.5. Компланарность векторов

Постановка задачи. *Компланарны ли векторы $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ и $\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$?*

План решения. Для того чтобы три вектора были *компланарны* (лежали в одной плоскости или в параллельных плоскостях), необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ было равно нулю.

1. Смешанное произведение векторов выражается через их координаты формулой

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Если определитель в правой части этого равенства равен нулю, то векторы компланарны, если определитель не равен нулю, то векторы некомпланарны.

Пример. Компланарны ли векторы $\vec{a}=\{7,4,6\}$, $\vec{b}=\{2,1,1\}$ и $\vec{c}=\{19,11,17\}$?

Решение.

1. Вычисляем смешанное произведение векторов:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 0\,.$$

2. Так как $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Ответ. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Условия задач. *Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?*

1. $\vec{a} = \{1,3,0\}$, $\vec{b} = \{-1,0,-1\}$, $\vec{c} = \{1,2,1\}$.
2. $\vec{a} = \{3,2,1\}$, $\vec{b} = \{5,5,5\}$, $\vec{c} = \{0,-1,-2\}$.
3. $\vec{a} = \{0,6,1\}$, $\vec{b} = \{0,2,0\}$, $\vec{c} = \{1,1,1\}$.
4. $\vec{a} = \{4,1,-2\}$, $\vec{b} = \{3,2,1\}$, $\vec{c} = \{5,5,5\}$.
5. $\vec{a} = \{2,5,0\}$, $\vec{b} = \{2,-1,2\}$, $\vec{c} = \{1,1,1\}$.
6. $\vec{a} = \{1,0,-1\}$, $\vec{b} = \{-2,-1,0\}$, $\vec{c} = \{3,1,-1\}$.
7. $\vec{a} = \{4,3,1\}$, $\vec{b} = \{5,1,2\}$, $\vec{c} = \{2,1,-1\}$.
8. $\vec{a} = \{-2,4,3\}$, $\vec{b} = \{4,7,5\}$, $\vec{c} = \{2,0,-1\}$.
9. $\vec{a} = \{2,5,8\}$, $\vec{b} = \{1,-3,-7\}$, $\vec{c} = \{0,5,10\}$.
10. $\vec{a} = \{1,5,1\}$, $\vec{b} = \{1,7,1\}$, $\vec{c} = \{2,2,1\}$.

Ответы. 1. Нет. 2. Да. 3. Нет. 4. Да. 5. Нет. 6. Да. 7. Нет. 8. Да. 9. Да. 10. Нет.

1.6. Объем и высота тетраэдра

Постановка задачи. *Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_4(x_4,y_4,z_4)$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.*

План решения.

1. Из вершины A_1 проведем векторы $\overline{A_1A_2} = \{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$, $\overline{A_1A_3} = \{x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\}$ и $\overline{A_1A_4} = \{x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1\}$.

В соответствии с геометрическим смыслом смешанного произведения имеем

$$V_{\text{т.}} = \frac{1}{6}\cdot V_{\text{пп.}} = \frac{1}{6}\left|(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4})\right|, \tag{1}$$

где $V_{т.}$ и $V_{пп.}$ — объемы тетраэдра и параллелепипеда, построенных на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_4}$)

С другой стороны,

$$V_{т.} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1A_2A_3} \cdot h, \tag{2}$$

где согласно геометрическому смыслу векторного произведения

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left|[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}]\right|.$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получаем

$$h = \frac{3V_{т.}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}} = \frac{|(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4})|}{|[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}]|}\,. \tag{3}$$

2. Вычисляем смешанное произведение:

$$(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix},$$

и находим объем тетраэдра по формуле (1).

3. Вычисляем координаты векторного произведения:

$$[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right\},$$

и его модуль.

4. Находим высоту h по формуле (3).

Пример. Вычислить объем тетраэдра с вершинами $A_1(2, 3, 1)$, $A_2(4, 1, -2)$, $A_3(6, 3, 7)$ и $A_4(-5, -4, 8)$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение.

1. Из вершины A_1 проведем векторы $\overline{A_1A_2} = \{2, -2, -3\}$, $\overline{A_1A_3} = \{4, 0, 6\}$ и $\overline{A_1A_4} = \{-7, -7, 7\}$.

2. Вычисляем смешанное произведение:

$$(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 42 + 2 \cdot 70 + (-3) \cdot (-28) = 308$$

и находим объем тетраэдра по формуле (1)

$$V_{\text{т.}} = \frac{1}{6} \cdot 308\,(\text{ед.длины})^3.$$

3. Вычисляем координаты векторного произведения:

$$[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} = \{-12, -24, 8\}$$

и его модуль

$$[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}] = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 28.$$

4. Находим высоту h по формуле (3):

$$h = \frac{|(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4})|}{|[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}]|} = \frac{308}{28} = 11\,\text{ед.длины}.$$

Ответ. $V_{\text{т.}} = \dfrac{154}{3}\ (\text{ед.длины})^3, \quad h = 11$ ед.длины.

Условия задач. *Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.*

1. $A_1(2,4,7)$, $A_2(3,3,2)$, $A_3(0,1,2)$, $A_4(-3,7,-2)$.
2. $A_1(-2,4,8)$, $A_2(4,-1,2)$, $A_3(-8,7,10)$, $A_4(-3,4,-2)$.
3. $A_1(6,1,3)$, $A_2(6,-2,-3)$, $A_3(2,2,0)$, $A_4(-5,1,0)$.
4. $A_1(0,-1,2)$, $A_2(-3,3,-4)$, $A_3(-9,-5,0)$, $A_4(-8,-5,4)$.
5. $A_1(0,-4,3)$, $A_2(-5,1,-2)$, $A_3(4,7,-2)$, $A_4(-9,7,8)$.
6. $A_1(2,1,1)$, $A_2(0,5,7)$, $A_3(3,-3,-7)$, $A_4(1,8,5)$.
7. $A_1(4,1,-1)$, $A_2(1,4,-1)$, $A_3(0,1,3)$, $A_4(-2,0,0)$.
8. $A_1(5,2,1)$, $A_2(4,5,4)$, $A_3(8,3,-3)$, $A_4(-7,12,-4)$.
9. $A_1(0,2,-2)$, $A_2(1,9,3)$, $A_3(6,-6,-2)$, $A_4(3,-2,8)$.
10. $A_1(12,2,3)$, $A_2(-7,-5,0)$, $A_3(-4,-8,-5)$, $A_4(-4,0,-3)$.

Ответы.

1. $V = 70/3$,	$h = 2\sqrt{14}$.	2. $V = 56/3$,	$h = 4$.
3. $V = 43/2$,	$h = 43\sqrt{105}/105$.	4. $V = 80/3$,	$h = 4$.
5. $V = 190$,	$h = 2\sqrt{38}$.	6. $V = 15$,	$h = 3\sqrt{5}$.
7. $V = 12$,	$h = 2\sqrt{3}$.	8. $V = 140/3$,	$h = 4\sqrt{14}$.
9. $V = 250/3$,	$h = 5\sqrt{2}$.	10. $V = 338/3$,	$h = \sqrt{26}$.

1.7. Расстояние от точки до плоскости

Постановка задачи. *Найти расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.*

План решения. Искомое расстояние можно найти как высоту тетраэдра с вершинами $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, опущенную из вершины $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на грань $M_1M_2M_3$ (см. задачу 1.6). Другое решение заключается в следующем.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости равно длине проекции вектора $\overline{M_1M_0}$ на нормальный вектор плоскости $\vec{n}$, т.е.

$$d = |\,\text{ПР}_{\vec{n}}\overline{M_1M_0}| = \frac{|(\vec{n}, \overline{M_1M_0})|}{|\vec{n}|}\,. \tag{1}$$

Поскольку нормальный вектор плоскости $\vec{n}$ ортогонален векторам $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$, его можно найти как их векторное произведение:

$$\vec{n} = [\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}].$$

1. Находим координаты векторов:

$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$, $\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$,

и нормального вектора плоскости:

$$\vec{n} = [\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычисляем расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости по формуле (1).

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(1, -1, 2)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 5, -7)$, $M_2(-3, 6, 3)$, $M_3(-2, 7, 3)$.

Решение.

1. Находим координаты векторов:

$$\overline{M_1M_2} = \{-4, 1, 10\}, \quad \overline{M_1M_3} = \{-3, 2, 10\}, \quad \overline{M_1M_0} = \{0, -6, 9\},$$

и нормального вектора плоскости:

$$\vec{n} = [\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}\,.$$

2. Вычисляем расстояние d от точки M_0 до плоскости по формуле (1):

$$d = |\,\text{ПР}_{\vec{n}}\overline{M_1M_0}| = \frac{|(\vec{n}, \overline{M_1M_0})|}{|\vec{n}|} = \left| \frac{-105}{\sqrt{(-10)^2 + 10^2 + (-5)^2}} \right| = 7.$$

Ответ. $d = 7$ ед. длины.

Условия задач. *Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2 и M_3.*

1. $M_1(0,7,-4)$, $M_2(4,8,-1)$, $M_3(-2,1,3)$, $M_0(-9,10,2)$.
2. $M_1(5,8,3)$, $M_2(10,5,6)$, $M_3(8,7,4)$, $M_0(7,0,1)$.
3. $M_1(1,3,5)$, $M_2(-5,5,2)$, $M_3(7,-1,8)$, $M_0(-3,4,3)$.
4. $M_1(0,-2,-1)$, $M_2(-3,-1,2)$, $M_3(1,0,-2)$, $M_0(-3,3,1)$.
5. $M_1(2,3,1)$, $M_2(2,0,3)$, $M_3(1,2,0)$, $M_0(3,0,5)$.
6. $M_1(4,3,5)$, $M_2(4,5,2)$, $M_3(5,1,4)$, $M_0(-2,-6,2)$.
7. $M_1(4,5,0)$, $M_2(4,3,0)$, $M_3(1,2,9)$, $M_0(6,1,-6)$.
8. $M_1(5,12,1)$, $M_2(0,5,-3)$, $M_3(-4,2,-1)$, $M_0(-4,9,-8)$.
9. $M_1(0,3,5)$, $M_2(0,-1,-3)$, $M_3(4,0,0)$, $M_0(-1,4,6)$.
10. $M_1(1,-2,2)$, $M_2(-3,2,3)$, $M_3(3,0,6)$, $M_0(-2,5,-4)$.

Ответы. 1. $d = 459/\sqrt{2265}$. 2. $d = 5\sqrt{2}$. 3. $d = 0$. 4. $d = 9/\sqrt{101}$. 5. $d = \sqrt{38}/38$. 6. $d = 5/\sqrt{29}$. 7. $d = 2\sqrt{6}$. 8. $d = 7$. 9. $d = 5/9$. 10. $d = 45\sqrt{194}/97$.

1.8. Уравнение плоскости с данным нормальным вектором

Постановка задачи. *Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{M_1 M_2}$, где точки M_1 и M_2 имеют координаты (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).*

План решения. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{1}$$

1. В качестве нормального вектора плоскости $\vec{n}$ выбираем вектор $\overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

2. Составляем уравнение плоскости (1) с нормальным вектором $\overline{M_1 M_2}$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$(x_2 - x_1)(x - x_0) + (y_2 - y_1)(y - y_0) + (z_2 - z_1)(z - z_0) = 0.$$

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 5, -3)$ перпендикулярно вектору $\overline{M_1 M_2}$, где точки M_1 и M_2 имеют координаты $(7, 8, -1)$ и $(9, 7, 4)$.

Решение.

1. В качестве нормального вектора плоскости $\vec{n}$ выбираем вектор $\overline{M_1 M_2} = \{2, -1, 5\}$.

2. Составляем уравнение плоскости (1) с нормальным вектором $\vec{n} = \{2, -1, 5\}$, проходящей через точку $M_0(2, 5, -3)$:

$$2(x - 2) - 1(y - 5) + 5(z + 3) = 0.$$

Ответ. Уравнение плоскости $2x - y + 5z + 16 = 0$.

Условия задач. *Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overline{M_1 M_2}$.*

1. $M_0(3, 2, 0)$, $M_1(4, 1, 5)$, $M_2(2, -1, 4)$.
2. $M_0(-5, -1, 0)$, $M_1(-5, 1, -4)$, $M_2(-2, 2, -3)$.
3. $M_0(2, -4, -2)$, $M_1(-1, -3, -7)$, $M_2(-4, -1, -5)$.
4. $M_0(-5, 3, 10)$, $M_1(0, 5, 7)$, $M_2(2, 7, 8)$.

5. $M_0(2,-10,-4)$, $M_1(0,-6,-8)$, $M_2(-2,-5,-9)$.
6. $M_0(1,9,2)$, $M_1(0,4,7)$, $M_2(1,6,9)$.
7. $M_0(0,-2,7)$, $M_1(-5,-4,9)$, $M_2(-2,-2,6)$.
8. $M_0(-1,1,-4)$, $M_1(3,8,-2)$, $M_2(2,11,0)$.
9. $M_0(-1,7,-6)$, $M_1(3,5,-1)$, $M_2(1,3,-2)$.
10. $M_0(-5,2,5)$, $M_1(3,-3,-2)$, $M_2(4,-1,2)$.

Ответы.

1. $2x+2y+z=0$.
2. $3x+y+z-4=0$.
3. $3x-2y-2z-16=0$.
4. $2x+2y+z+9=0$.
5. $2x-y+z-20=0$.
6. $x+2y+2z-3=0$.
7. $3x+2y-3z+23=0$.
8. $x-3y-2z-8=0$.
9. $2x+2y+z-16=0$.
10. $x+2y+4z-5=0$.

1.9. Угол между плоскостями

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Найти угол между плоскостями*

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Двугранный угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами

$$\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}, \quad \vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}.$$

Поэтому угол φ между плоскостями определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}.$$

ПРИМЕР. Найти угол между плоскостями

$$x+2y-2z-7=0, \quad x+y-35=0.$$

РЕШЕНИЕ. Двугранный угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами $\vec{n}_1=\{1,2,-2\}$ и $\vec{n}_2=\{1,1,0\}$. Поэтому угол φ между плоскостями определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{1\cdot1+2\cdot1-2\cdot0}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, $\varphi=\arccos(1/\sqrt{2})=\pi/4$.

Ответ. Угол между плоскостями $\varphi=\pi/4$.

Условия задач. *Найти угол между плоскостями.*

1. $3x - y + 3 = 0$, $\quad x - 2y + 5z - 10 = 0$.
2. $x - y + 3z - 5 = 0$, $\quad x + z - 2 = 0$.
3. $5x - 4y + 3z - 3 = 0$, $\quad 4x - y - z + 2 = 0$.
4. $5x - 3y + 2z + 5 = 0$, $\quad 3x + 3y - 3z - 8 = 0$.
5. $6x + 2y - 4z + 17 = 0$, $\quad 9x + 3y - 6z - 4 = 0$.
6. $x - y + z\sqrt{2} - 5 = 0$, $\quad x + y - z\sqrt{2} + 7 = 0$.
7. $y - 3z + 5 = 0$, $\quad y + 2z - 3 = 0$.
8. $6x + 2y - 3z + 1 = 0$, $\quad x + 6y + 2z - 10 = 0$.
9. $2x + y + 2z - 5 = 0$, $\quad 12x + 16y - 15z + 2 = 0$.
10. $5x - y + 2z + 12 = 0$, $\quad 3x + 2y + z + 10 = 0$.

Ответы. 1. $\varphi = \arccos \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. 2. $\varphi = \arccos \sqrt{\dfrac{8}{11}}$. 3. $\varphi = \arccos \dfrac{7}{10}$. 4. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. 5. $\varphi = 0$. 6. $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. 7. $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. 8. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. 9. $\varphi = \arccos \dfrac{2}{15}$. 10. $\varphi = \arccos \sqrt{\dfrac{15}{28}}$.

1.10. Канонические уравнения прямой

Постановка задачи. *Написать канонические уравнения прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей (общими уравнениями)*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

План решения.

1. Проверяем, что векторы $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ неколлинеарны и, следовательно, плоскости пересекаются по некоторой прямой.

Канонические уравнения прямой с направляющим вектором $\vec{a} = \{l, m, n\}$, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{1}$$

Поэтому чтобы написать уравнения прямой, необходимо найти ее направляющий вектор и какую-нибудь точку на прямой.

2. Так как прямая принадлежит одновременно обеим плоскостям, то ее направляющий вектор $\vec{a}$ ортогонален нормальным векторам

обеих плоскостей, т.е. $\vec{a} \perp \vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{a} \perp \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Следовательно, направляющий вектор $\vec{a}$ находим по формуле

$$\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

3. Теперь выберем какую-нибудь точку на прямой. Поскольку направляющий вектор прямой непараллелен хотя бы одной из координатных плоскостей, то прямая пересекает эту координатную плоскость. Следовательно, в качестве точки на прямой может быть взята точка ее пересечения с этой координатной плоскостью.

4. Подставляем найденные направляющий вектор и точку в уравнения прямой (1) и записываем ответ.

Пример. Написать канонические уравнения прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей (общими уравнениями)

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 8 = 0, \\ x - 2y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Проверим, что векторы $\vec{n}_1 = \{2, 3, 1\}$ и $\vec{n}_2 = \{1, -2, -2\}$ неколлинеарны (см. задачу 1.2). Имеем

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}.$$

Векторы $\vec{n}_1 = \{2, 3, 1\}$ и $\vec{n}_2 = \{1, -2, -2\}$ неколлинеарны, так как их координаты непропорциональны. Следовательно, две плоскости пересекаются по прямой.

2. Так как прямая принадлежит одновременно обеим плоскостям, то ее направляющий вектор $\vec{a}$ ортогонален нормальным векторам обеих плоскостей, т.е. $\vec{a} \perp \vec{n}_1 = \{2, 3, 1\}$ и $\vec{a} \perp \vec{n}_2 = \{1, -2, -2\}$. Следовательно, направляюющий вектор $\vec{a}$ находим по формуле

$$\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}.$$

3. Теперь выберем какую-нибудь точку на прямой. Поскольку направляющий вектор прямой непараллелен ни одной из координатных плоскостей, то прямая пересекает все три координатные плоскости.

Следовательно, в качестве точки на прямой может быть взята точка ее пересечения, например, с плоскостью $y = 0$. Координаты этой точки находим, решая систему трех уравнений

$$\begin{cases} 2x + z - 8 = 0, \\ x - 2z + 1 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Получим $x_0 = 3$, $y_0 = 0$ и $z_0 = 2$, т.е. $M_0(3,0,2)$.

4. Подставляя найденные направляющий вектор и точку в уравнения прямой (1), получим

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-7}.$$

Ответ. Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-7}.$$

Условия задач. *Написать канонические уравнения прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей.*

1. $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 3y + 2z + 2 = 0, \\ 2x + 3y + z + 14 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 2y + 2z - 4 = 0, \\ 2x + 2y - 2z - 8 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ x - y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 3y + z + 3 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y - z - 4 = 0, \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 5y + 2z + 5 = 0, \\ x - y - z - 1 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 2y - 2z + 1 = 0, \\ 3x - 2y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x + y - 3z + 4 = 0, \\ 2x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x - 3y + z + 4 = 0. \end{cases}$

Ответы.

1. $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

2. $\dfrac{x+4}{9} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{-12}$.

3. $\dfrac{x-4}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.
4. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{1}$.
5. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z}{9}$.
6. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z}{-2}$.
7. $\dfrac{x}{7}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$.
8. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1/2}{-6}=\dfrac{z}{-5}$.
9. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{14}=\dfrac{z}{6}$.
10. $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{1}$.

1.11. Точка пересечения прямой и плоскости

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Найти точку пересечения прямой*

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

и плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Проверим, что прямая не параллельна плоскости. Это означает, что направляющий вектор прямой $\vec{a}=\{l,m,n\}$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n}=\{A,B,C\}$ не ортогональны, т.е. их скалярное произведение не равно нулю:

$$Al+Bm+Cn\neq 0.$$

В этом случае существует единственная точка пересечения прямой и плоскости.

2. Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости, вообще говоря, надо решить систему трех уравнений с тремя неизвестными (два уравнения прямой и одно уравнение плоскости). Однако удобнее использовать параметрические уравнения прямой.

Положим

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=t.$$

Тогда параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x=lt+x_1, \\ y=mt+y_1, \\ z=nt+z_1. \end{cases}$$

3. Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости и решая его относительно t, находим значение параметра $t = t_0$, при котором происходит пересечение прямой и плоскости.

4. Найденное значение t_0 подставляем в параметрические уравнения прямой и получаем искомые координаты точки пересечения:

$$\begin{cases} x_0 = lt_0 + x_1, \\ y_0 = mt_0 + y_1, \\ z_0 = nt_0 + z_1. \end{cases}$$

Записываем ответ в таком виде: прямая и плоскость пересекаются в точке (x_0, y_0, z_0).

Пример. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-1}$$

и плоскости

$$2x - 3y + z - 8 = 0.$$

Решение.

1. Имеем

$$(\vec{a}, \vec{n}\,) = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-3 + (-1) \cdot 1 = 3 \neq 0.$$

Следовательно, направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости не ортогональны, т.е. прямая и плоскость пересекаются в единственной точке.

2. Положим

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-1} = t.$$

Тогда параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -1, \\ z = -t. \end{cases}$$

3. Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости, находим значение параметра t, при котором происходит пересечение прямой и плоскости:

$$2(2t + 1) - 3(-1) + 1(-t) - 8 = 0 \Longrightarrow t_0 = 1.$$

4. Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение $t_0 = 1$, получаем

$$x_0 = 3, \quad y_0 = -1, \quad z_0 = -1.$$

Ответ. Прямая и плоскость пересекаются в точке $(3, -1, -1)$.

Условия задач. *Найти точку пересечения прямой и плоскости.*

1. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-4}, \qquad x + y + 2z - 9 = 0.$

2. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z+1}{5}, \qquad x + 2y - z + 5 = 0.$

3. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{2}, \qquad x - 3y + z - 8 = 0.$

4. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{2}, \qquad x - y + 4z = 0.$

5. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{0}, \qquad 3x + y - 2z = 0.$

6. $\dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-2}, \qquad x + 3y - z - 3 = 0.$

7. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{0}, \qquad x + 2y + 2z + 3 = 0.$

8. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{1}, \qquad x - y + 4z - 5 = 0.$

9. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+4}{-1}, \qquad 2x - y + z + 4 = 0.$

10. $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+1}{0}, \qquad 2x - 4y - 3z + 7 = 0.$

Ответы. 1. $(1,2,3)$. 2. $(1,-1,4)$. 3. $(2,-1,3)$. 4. $(4,0,-1)$. 5. $(1,1,2)$. 6. $(-1,0,-4)$. 7. $(-1,1,-2)$. 8. $(3,2,1)$. 9. $(-1,-1,-3)$. 10. $(-1,2,-1)$.

1.12. Проекция точки на плоскость или прямую

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Найти координаты проекции P' точки $P(x_P, y_P, z_P)$ на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Проекция P' точки P на плоскость является основанием перпендикуляра, опущенного из точки P на эту плоскость.

1. Составляем уравнения прямой, проходящей через точку P перпендикулярно данной плоскости. Для этого в качестве направляющего вектора прямой берем нормальный вектор плоскости: $\vec{a} = \vec{n} = \{A, B, C\}$. Тогда канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x - x_P}{A} = \frac{y - y_P}{B} = \frac{z - z_P}{C}.$$

2. Находим координаты точки пересечения P' этой прямой с заданной плоскостью (см. задачу 1.11). Положим

$$\frac{x - x_P}{A} = \frac{y - y_P}{B} = \frac{z - z_P}{C} = t.$$

Тогда параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = At + x_P, \\ y = Bt + y_P, \\ z = Ct + z_P. \end{cases}$$

3. Подставляя x, y, z в уравнение плоскости и решая его относительно t, находим значение параметра $t = t_0$, при котором происходит пересечение прямой и плоскости.

4. Найденное значение t_0 подставляем в параметрические уравнения прямой и получаем искомые координаты точки P'.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично решается задача о нахождении координат проекции точки на прямую.

ПРИМЕР. Найти координаты проекции P' точки $P(1, 2, -1)$ на плоскость $3x - y + 2z - 4 = 0$.

РЕШЕНИЕ.

1. Составляем уравнения прямой, проходящей через точку P перпендикулярно данной плоскости. Для этого в качестве направляющего вектора прямой берем нормальный вектор плоскости: $\vec{a} = \vec{n} =$

$= \{3, -1, 2\}$. Тогда канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

2. Найдем координаты точки пересечения P' этой прямой с заданной плоскостью. Положим

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} = t.$$

Тогда параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = -t + 2, \\ z = 2t - 1. \end{cases}$$

3. Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости, находим значение параметра t, при котором происходит пересечение прямой и плоскости:

$$3(3t+1) - 1(-t+2) + 2(2t-1) - 27 = 0 \Longrightarrow t_0 = 2.$$

4. Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение $t_0 = 2$, получаем $x_0 = 7$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$.

Таким образом, точка пересечения прямой и плоскости и, следовательно, проекция точки P на плоскость имеет координаты $(7, 0, 1)$.

Ответ. Проекция P' имеет координаты $(7, 0, 1)$.

Условия задач. *Найти координаты проекции точки P на плоскость.*

1. $P(1,0,1)$, $\quad 4x + 6y + 4z - 25 = 0$.
2. $P(-1,0,-1)$, $\quad 2x + 6y - 2z + 11 = 0$.
3. $P(2,1,0)$, $\quad y + z + 2 = 0$.
4. $P(0,2,1)$, $\quad 2x + 4y - 3 = 0$.
5. $P(-1,2,0)$, $\quad 4x - 5y - z - 7 = 0$.
6. $P(2,-1,1)$, $\quad x - y + 2z - 2 = 0$.
7. $P(1,1,1)$, $\quad x + 4y + 3z + 5 = 0$.
8. $P(1,2,3)$, $\quad 2x + 10y + 10z - 1 = 0$.
9. $P(0,-3,-2)$, $\quad 2x + 10y + 10z - 1 = 0$.
10. $P(1,0,-1)$, $\quad 2y + 4z - 1 = 0$.

Ответы. 1. $(2, 3/2, 2)$. 2. $(-3/2, -3/2, -1/2)$. 3. $(2, -1/2, -3/2)$. 4. $(-1/2, 1, 1)$. 5. $(1, -1/2, -1/2)$. 6. $(3/2, -1/2, 0)$. 7. $(1/2, -1, -1/2)$. 8. $(1/2, -1/2, 1/2)$. 9. $(1/2, -1/2, 1/2)$. 10. $(1, 1/2, 0)$.

1.13. Симметрия относительно прямой или плоскости

Постановка задачи. *Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(x_P, y_P, z_P)$ относительно прямой*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

План решения. Искомая точка Q лежит на прямой, перпендикулярной данной и пересекающей ее в точке P'. Поскольку точка P' делит отрезок PQ пополам, координаты x_Q, y_Q и z_Q точки Q определяются из условий

$$x_{P'}=\frac{x_P+x_Q}{2},\quad y_{P'}=\frac{y_P+y_Q}{2},\quad z_{P'}=\frac{z_P+z_Q}{2},\tag{1}$$

где x_P, y_P, z_P — координаты точки P и $x_{P'}, y_{P'}, z_{P'}$ — координаты ее проекции P' на данную прямую.

1. Найдем проекцию точки P на данную прямую, т.е. точку P' (см. задачу 1.12). Для этого:

а) составим уравнение плоскости, проходящей через точку P перпендикулярно данной прямой. В качестве нормального вектора $\vec{n}$ этой плоскости можно взять направляющий вектор данной прямой, т.е. $\vec{n}=\vec{a}=\{l,m,n\}$. Получаем

$$l(x-x_P)+m(y-y_P)+n(z-z_P)=0;$$

б) найдем координаты точки пересечения P' этой плоскости с заданной прямой. Для этого запишем уравнения прямой в параметрической форме

$$\begin{cases} x=lt+x_0,\\ y=mt+y_0,\\ z=nt+z_0.\end{cases}$$

Подставляя x, y, z в уравнение плоскости и решая его относительно t, находим значение параметра $t=t_0$, при котором происходит пересечение прямой и плоскости;

в) найденное значение t_0 подставляем в параметрические уравнения прямой и получаем искомые координаты точки P'.

2. Координаты точки Q, симметричной точке P относительно данной прямой, определяем из условий (1). Получаем

$$x_Q=2x_{P'}-x_P,\quad y_Q=2y_{P'}-y_P,\quad z_Q=2z_{P'}-z_P.$$

Замечание. Аналогично решается задача о нахождении координат точки, симметричной данной, относительно плоскости.

Пример. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(2,-1,2)$ относительно прямой

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{-2}.$$

Решение.

1. Найдем проекцию точки P на данную прямую, т.е. точку P'. Для этого:

а) составим уравнение плоскости, проходящей через точку P перпендикулярно данной прямой. В качестве нормального вектора $\vec{n}$ этой плоскости можно взять направляющий вектор данной прямой: $\vec{n}=\vec{a}=\{1,0,-2\}$. Тогда

$$1(x-2)+0(y+1)-2(z-2)=0 \Longrightarrow x-2z+2=0;$$

б) найдем точку пересечения заданной прямой и плоскости $x-2z+2=0$. Для этого запишем уравнения прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=0, \\ z=-2t-1. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости, находим значение параметра t, при котором происходит пересечение прямой и плоскости: $t_0=-1$;

в) подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение $t_0=-1$, получаем

$$x_{P'}=0,\ y_{P'}=0,\ z_{P'}=1.$$

Таким образом, точка пересечения прямой и плоскости и, следовательно, проекция точки P на прямую есть $P'(0,0,1)$.

2. Координаты точки Q, симметричной точке P относительно данной прямой, определяются из условий (1):

$$\begin{aligned} x_Q&=2x_{P'}-x_P=-2, \\ y_Q&=2y_{P'}-y_P=1, \\ z_Q&=2z_{P'}-z_P=0. \end{aligned}$$

Ответ. Точка Q имеет координаты $(-2,1,0)$.

Условия задач. *Найти координаты точки, симметричной точке P относительно заданной прямой.*

1. $P(0,-1,3)$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

2. $P((2,1,-1)$, $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{-1}$.

3. $P(-1,0,3)$, $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

4. $P(3,0,-1)$, $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

5. $P(-1,2,1)$, $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{0}$.

6. $P(3,-1,0)$, $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{2}$.

7. $P(-1,3,0)$, $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

8. $P(1,-1,2)$, $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$.

9. $P(0,3,-1)$, $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$.

10. $P(0,2,1)$, $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Ответы. 1. $(4,-1,-1)$. 2. $(2,-1,-1)$. 3. $(1,2,-1)$. 4. $(-1,4,-1)$. 5. $(-1,2,-1)$. 6. $(-1,1,2)$. 7. $(-1,-1,4)$. 8. $(-1,-1,2)$. 9. $(2,-1,1)$. 10. $(4,-2,-3)$.

Глава 2

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

При изучении темы ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА вы познакомитесь на примерах с понятиями линейного (векторного) пространства, линейного оператора, его матрицы, образа, ядра, ранга, дефекта, собственных векторов и собственных значений. Вы научитесь выполнять различные операции с операторами и матрицами, исследовать и решать системы линейных уравнений, получать всю информацию об операторе (матрицу, образ, ядро, ранг и дефект, собственные векторы и собственные значения) по его матрице, преобразовывать векторы и матрицы при изменениях базисов.

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете выполнить все действия с матрицами, привести матрицу к редуцированному (гауссову) виду, вычислить определители, обратную матрицу, решить системы уравнений, проверить линейность оператора, решить характеристическое уравнение, найти собственные векторы и собственные значения оператора, выполнить все численные расчеты и проверить правильность полученных вами результатов.

2.1. Правило Крамера

Постановка задачи. *Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными*

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = d_1, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = d_2, \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 = d_3 \end{cases}$$

по правилу Крамера.

План решения. Если определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение определяется формулами

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой i-ого столбца столбцом свободных членов.

1. Вычисляем определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

и убеждаемся, что он не равен нулю. Следовательно система уравнений имеет единственное решение.

2. Вычисляем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & c_{12} & c_{13} \\ d_2 & c_{22} & c_{23} \\ d_3 & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & d_1 & c_{13} \\ c_{21} & d_2 & c_{23} \\ c_{31} & d_3 & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & d_2 \\ c_{31} & c_{32} & d_3 \end{vmatrix}.$$

3. По формулам Крамера (1) находим решение системы уравнений

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

по правилу Крамера.

Решение.

1. Вычисляем определитель матрицы системы, разлагая его по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-16) - 2 \cdot (-9) + 1 \cdot 31 = 33.$$

Так как он не равен нулю, то система уравнений имеет единственное решение.

2. Вычисляем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-16) - 2 \cdot 25 + 1 \cdot 47 = 33,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-25) - 4 \cdot (-9) + 1 \cdot 22 = 33,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-47) - 2 \cdot 22 + 4 \cdot 31 = 33.$$

3. По формулам Крамера (1) находим решение системы уравнений

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Условия задач. *Решить системы уравнений по правилу Крамера.*

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -7, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 13. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -11, \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$

Ответы. 1. $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$. 2. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. 3. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. 4. $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. 5. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$. 6. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$. 7. $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$. 8. $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. 9. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. 10. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.

2.2. Обратная матрица

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Задана квадратная матрица третьего порядка*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Установить существование и найти обратную матрицу C^{-1}.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Матрица C^{-1} называется обратной квадратной матрице C, если

$$C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = E,$$

где E — единичная матрица.

Если $\det C \neq 0$ (матрица C — невырожденная), то матрица C имеет обратную, если $\det C = 0$, то матрица C не имеет обратной.

1. Вычисляем определитель матрицы $\det C$. Если $\det C \neq 0$, то матрица C имеет обратную.

2. Составляем матрицу из алгебраических дополнений

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем матрицу $\widetilde{C}$

$$\widetilde{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

4. Разделив матрицу $\widetilde{C}^{\mathrm{T}}$ на определитель, получаем искомую обратную матрицу

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

5. Проверяем, что $C \cdot C^{-1} = E$ и записываем ответ.

ПРИМЕР. Задана квадратная матрица третьего порядка

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Установить существование и найти обратную матрицу C^{-1}.

Решение.

1. Вычисляем определитель матрицы $\det C$:

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-16) - 2\cdot(-9) + 1\cdot 31 = 33.$$

Так как $\det C \neq 0$, то матрица C имеет обратную.

2. Составляем матрицу из алгебраических дополнений

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} -16 & 9 & 31 \\ 9 & -3 & -3 \\ 11 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем матрицу $\widetilde{C}$

$$\widetilde{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

4. Разделив матрицу $\widetilde{C}^{\mathrm{T}}$ на определитель, получаем искомую обратную матрицу

$$C^{-1} = \frac{1}{33}\cdot\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

5. Проверяем

$$C\cdot C^{-1} = \frac{1}{33}\cdot\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Матрица, обратная матрице C, есть

$$C^{-1} = \frac{1}{33}\cdot\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

Условия задач. *Найти матрицы, обратные заданным.*

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы.

1. $\begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} -6 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Понятие линейного пространства

Постановка задачи. *Образует ли линейное пространство заданное множество X, в котором определены "сумма" $a \oplus b$ любых двух элементов a и b и "произведение" $\alpha \odot a$ любого элемента a на любое число α?*

План решения. Исходя из определения линейного пространства, проверяем следующие условия.

1. Являются ли введенные операции сложения и умножения на число замкнутыми в X, т.е. верно ли, что $\forall a, b \in X$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$a \oplus b \in X, \quad \alpha \odot a \in X\ ?$$

Если нет, то множество X не является линейным пространством, если да, то продолжаем проверку.

2. Находим нулевой элемент $\theta \in X$ такой, что $\forall a \in X$

$$a \oplus \theta = a.$$

Если такого элемента не существует, то множество X не является линейным пространством, если существует, то продолжаем проверку.

3. Для каждого элемента $a \in X$ определяем противоположный элемент $-a \in X$ такой, что

$$a \oplus -a = \theta.$$

Если такого элемента не существует, то множество X не является линейным пространством, если существует, то продолжаем проверку.

4. Проверяем выполнение остальных аксиом линейного пространства, т.е. $\forall a, b, c \in X$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$a \oplus b = b \oplus a;$$
$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c);$$
$$\alpha \odot (\beta \odot a) = (\alpha \cdot \beta) \odot a;$$
$$1 \odot a = a;$$
$$(\alpha + \beta) \odot a = \alpha \odot a \oplus \beta \odot a;$$
$$\alpha \odot (a \oplus b) = \alpha \odot a \oplus \alpha \odot b.$$

Если хотя бы одна из аксиом нарушается, то множество X не является линейным пространством. Если выполнены все аксиомы, то множество X — линейное пространство.

Пример. Образует ли линейное пространство множество положительных чисел $X = \mathbb{R}_+$, в котором операции "сложения" и "умножения на число" определены следующим образом: $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$a \oplus b = a \cdot b, \quad \alpha \odot a = a^{\alpha}?$$

Решение.

1. Введенные таким образом операции являются замкнутыми в данном множестве, так как если $a, b \in \mathbb{R}_+$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$a \oplus b = a \cdot b > 0, \quad \alpha \odot a = a^{\alpha} > 0,$$

т.е. $a \oplus b \in \mathbb{R}_+$ и $\alpha \odot a \in \mathbb{R}_+$.

2. В качестве нулевого элемента нужно взять единицу ($\theta = 1$), так как

$$a \cdot 1 = a,$$

иными словами,

$$a \oplus \theta = a.$$

3. В качестве элемента $-a$, противоположного элементу a, нужно взять $1/a$, так как

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1,$$

иными словами,

$$a \oplus (-a) = \theta.$$

4. Проверяем выполнение остальных аксиом линейного пространства, т.е. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot b = b \cdot a \Longrightarrow a \oplus b = b \oplus a;$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \Longrightarrow (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c);$$
$$(a^\beta)^\alpha = a^{\alpha\beta} \Longrightarrow \alpha \odot (\beta \odot a) = (\alpha \cdot \beta) \odot a;$$
$$a^1 = a \Longrightarrow 1 \odot a = a;$$
$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta \Longrightarrow (\alpha + \beta) \odot a = \alpha \odot a \oplus \beta \odot a;$$
$$(a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha \Longrightarrow \alpha \odot (a \oplus b) = \alpha \odot a \oplus \alpha \odot b.$$

Все аксиомы выполнены.

Ответ. $\mathbb{R}_+$ — линейное пространство.

Условия задач. *Образует ли линейное пространство заданное множество X, в котором определены “сумма” любых двух элементов a и b и “произведение” любого элемента a на любое число α?*

1. Множество всех векторов трехмерного пространства, первая координата которых равна 1; сумма $\vec{a} + \vec{b}$, произведение $\alpha \cdot \vec{a}$.

2. Множество всех векторов трехмерного пространства; сумма $[\vec{a}, \vec{b}]$, произведение $\alpha \cdot \vec{a}$.

3. Множество всех натуральных чисел; сумма $a \cdot b$, произведение a^α.

4. Множество всех функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ и таких, что $f(-1) = f(1) = 0$; сумма $f(t) + g(t)$, произведение $\alpha \cdot f(t)$.

5. Множество всех функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ и таких, что $f(-1) = f(1) = 1$; сумма $f(t) + g(t)$, произведение $\alpha \cdot f(t)$.

6. Множество всех функций, дифференцируемых на отрезке $[-1,1]$ и таких, что $f(-1) = f(1) = 0$ и $f'(0) = 1$; сумма $f(t) + g(t)$, произведение $\alpha \cdot f(t)$.

7. Множество всех последовательностей $a = \{u_n\}$, $b = \{v_n\}$, сходящихся к нулю; сумма $\{u_n + v_n\}$, произведение $\{\alpha u_n\}$.

8. Множество всех последовательностей $\{u_n\}$, $b = \{v_n\}$, сходящихся к 1; сумма $\{u_n + v_n\}$, произведение $\{\alpha u_n\}$.

9. Множество всех невырожденных матриц 3-го порядка $a = (a_{ik})$, $b = (b_{ik})$ $(i, k = 1, 2, 3)$; сумма $(a_{ik}) \cdot (b_{ik})$, произведение (αa_{ik}).

10. Множество всех диагональных матриц 3-го порядка $a = (a_{ik})$, $b = (b_{ik})$ $(i, k = 1, 2, 3)$; сумма $(a_{ik} + b_{ik})$, произведение (αa_{ik}).

Ответы. 1. Нет. 2. Нет. 3. Нет. 4. Да. 5. Нет. 6. Нет. 7. Да. 8. Нет. 9. Нет. 10. Да.

2.4. Системы линейных уравнений

Задача 1. Однородные системы уравнений

Постановка задачи. *Найти размерность d пространства решений, его базис (фундаментальную систему решений) и общее решение однородной системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

План решения.

1. Записываем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

и с помощью элементарных преобразований строк преобразуем матрицу A так, чтобы в максимальном числе столбцов оказалось по одной единице (в разных строках у разных столбцов), а остальные элементы столбцов были нулями. Очевидно, что такие столбцы линейно независимы. Они называются *базисными.*

Полученную матрицу будем называть *редуцированной* и обозначать $A_{\text{ред.}}$. Отметим, что редуцированная матрица эквивалентна исходной ($A_{\text{ред.}} \sim A$) и система уравнений с матрицей $A_{\text{ред.}}$ эквивалентна исходной системе уравнений.

2. Так как $A \sim A_{\text{ред.}}$, то вычисляем ранг A как количество базисных столбцов матрицы $A_{\text{ред.}}$:

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A_{\text{ред.}} = r.$$

Следовательно, размерность пространства решений есть $d = n - r$. Если $n = r$, то однородная система имеет единственное (нулевое) решение, если $n > r$, то фундаментальная система состоит из $n - r$ линейно независимых решений.

3. Неизвестные, соответствующие базисным столбцам, называются *базисными*, остальные — *свободными* (или параметрическими).

Запишем систему уравнений с матрицей $A_{\text{ред.}}$ и перенесем $n - r$ свободных неизвестных в правые части уравнений системы. Придавая свободным неизвестным $n - r$ наборов значений (по одной единице, остальные — нули), для каждого такого набора решаем систему уравнений и находим соответствующие значения базисных неизвестных. Убедимся, что полученные решения $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ линейно независимы, составив матрицу из столбцов $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ и вычислив ее ранг.

Записываем фундаментальную систему решений $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ и общее решение однородной системы линейных уравнений

$$X_{\text{о.о.}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_{n-r} X_{n-r},$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ — фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений и $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ — произвольные постоянные.

Пример 1. Найти размерность d пространства решений, его базис (фундаментальную систему решений) и общее решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 - {}} x_2 + 2x_3 - 3x_4 \phantom{{}+4x_5} = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \phantom{{}- 3x_4} + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 \phantom{{}- x_2} + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Записываем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк преобразуем ее к редуцированному виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/2 & -3/2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что первый и второй столбцы матрицы $A_{\text{ред.}}$ (и исходной матрицы A) линейно независимы, а остальные столбцы являются их линейными комбинациями. Поэтому первый и второй столбцы — базисные.

2. Так как количество линейно независимых столбцов матрицы $A_{\text{ред.}}$ равно двум, то

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A_{\text{ред.}} = 2.$$

Следовательно, размерность пространства решений

$$d = n - r = 5 - 2 = 3$$

и фундаментальная система решений состоит из трех линейно независимых решений.

3. Неизвестные x_1 и x_2, соответствующие базисным столбцам, являются базисными, неизвестные x_3, x_4, x_5 — свободными.

Запишем систему уравнений с матрицей $A_{\text{ред.}}$ (эта система эквивалентна исходной) и перенесем свободные неизвестные в правые части уравнений системы:

$$\begin{cases} x_1 = -5/2x_3 + 3/2x_4 - 2x_5, \\ x_2 = \quad -2x_3 \quad + 3x_4. \end{cases}$$

Для первого набора свободных неизвестных $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ получаем $x_1 = -5/2$, $x_2 = -2$, т.е. первое решение имеет вид системы

$$X_1 = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для второго набора свободных неизвестных $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ получаем $x_1 = 3/2$, $x_2 = 3$, т.е. второе решение имеет вид системы

$$X_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для третьего набора свободных неизвестных $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ получаем $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, т.е. третье решение системы имеет вид

$$X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку, подставив эти решения в исходную систему уравнений, а также убедимся, что решения линейно независимы (ранг матрицы, составленной из столбцов X_1, X_2, X_3, равен 3).

Следовательно, решения X_1, X_2, X_3 образуют базис в пространстве решений (фундаментальную систему решений).

Ответ. Размерность пространства решений есть $d = 3$. Фундаментальная система решений есть

$$X_1 = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и общее решение однородной системы имеет вид

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 = C_1\begin{pmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C_1 C_2, и C_3 — произвольные постоянные.

Задача 2. Неоднородные системы уравнений

Постановка задачи. *Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

План решения.

1. Записываем расширенную матрицу системы

$$A_{\text{расш.}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

и с помощью элементарных преобразований строк преобразуем матрицу $A_{\text{расш.}}$ к редуцированному виду.

2. Вычисляем ранги основной матрицы системы A и расширенной матрицы $A_{\text{расш.}}$. Если $\operatorname{Rg} A_{\text{расш.}} = \operatorname{Rg} A$, то система совместна, если $\operatorname{Rg} A_{\text{расш.}} \neq \operatorname{Rg} A$, то система несовместна (решений не имеет).

3. Пусть $\operatorname{Rg} A_{\text{расш.}} = \operatorname{Rg} A = r$. Тогда общее решение неоднородной системы линейных уравнений определяется формулой

$$X_{\text{о.н.}} = X_{\text{ч.н.}} + C_1\,X_1 + C_2\,X_2 + \ldots + C_{n-r}\,X_{n-r},$$

где $X_{\text{ч.н.}}$ — какое-либо частное решение неоднородной системы, $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы и $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ — произвольные постоянные.

Чтобы найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$, повторим операции, изложенные в задаче 1.

4. Столбец свободных членов B расширенной матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов матрицы A. Добавляя к этому выражению остальные столбцы с нулевыми коэффициентами, получаем разложение столбца свободных членов по *всем* столбцам матрицы A. Коэффициенты этого разложения образуют частное решение неоднородной системы $X_{\text{ч.н.}}$.

5. Записываем общее решение неоднородной системы линейных уравнений:

$$X_{\text{о.н.}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X_{\text{ч.н.}} + C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_{n-r} X_{n-r},$$

где $X_{\text{ч.н.}}$ — какое-нибудь частное решение неоднородной системы, $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы уравнений и $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ — произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 5, \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение.

1. Записываем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк преобразуем матрицу $A_{\text{расш.}}$ к редуцированному виду:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & -3 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 5/2 & -3/2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

2. Так как $\operatorname{Rg} A_{\text{расш.}} = \operatorname{Rg} A = 2$, то система совместна. Так как $n - r = 5 - 2 = 3$, то общее решение неоднородной системы линейных уравнений определяется формулой

$$X_{\text{о.н.}} = X_{\text{ч.н.}} + C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3,$$

где $X_{\text{ч.н.}}$ — какое-нибудь частное решение неоднородной системы, X_1, X_2, X_3 — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы и C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3. Запишем соответствующую однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Она совпадает с системой, приведенной в примере 1. (Если однородная система уравнений не совпадает с системой, приведенной в примере 1, то для нахождения фундаментальной системы решений повторим операции, использованные при решении примера 1.)

При решении примера 1 была найдена фундаментальная система решений однородной системы уравнений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найдем какое-нибудь частное решение неоднородной системы. Столбец свободных членов B расширенной матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов матрицы A, т.е. столбцов A_1 и A_2:

$$B = 2 \cdot A_1 - 1 \cdot A_2.$$

Добавляя к этому выражению остальные столбцы с нулевыми коэффициентами, получим

$$B = 2 \cdot A_1 - 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4 + 0 \cdot A_5.$$

Коэффициенты в этом разложении образуют частное решение неоднородной системы

$$X_{\text{ч.н.}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку, подставив $X_{\text{ч.н.}}$ в исходную систему уравнений.

Ответ. Общее решение системы имеет вид

$$X_{\text{о.н.}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Условия задач. *Найти размерность d пространства решений (количество линейно независимых решений), фундаментальную систему решений (базис пространства решений) и общее решение систем линейных уравнений.*

1. $$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 7x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 27x_4 - 3x_5 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_4 = 14, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 11x_2 + 6x_3 + x_4 + 3x_5 = 14, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 22x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 5, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ 8x_1 - 12x_2 + 28x_3 - 4x_4 - 16x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 + 8x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 11x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 5. \end{cases}$$

6. $\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 23x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 23x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} 4x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 7, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3. \end{cases}$

Ответы *). 1. $d=3$, $d=2$. 2. $d=2$, $d=3$. 3. $d=2$, $d=2$. 4. $d=4$, $d=2$. 5. $d=2$, $d=2$. 6. $d=3$, $d=3$. 7. $d=3$, $d=2$. 8. $d=2$, $d=3$. 9. $d=2$, $d=2$. 10. $d=2$, $d=3$.

2.5. Линейные операторы

Постановка задачи. *Пусть в некотором базисе линейного пространства X_n задан произвольный вектор $x=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Является ли линейным оператор $\widehat{A}: X_n \mapsto X_n$ такой, что*

$$\widehat{A}x = \{f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\},$$

где $f_1,f_2,\ldots,f_n$ — некоторые функции n переменных?

План решения. Если $x=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ и $y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ — произвольные векторы пространства X_n, то $x+y=\{x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n\}$ и $\alpha x=\{\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n\}$.

Проверяем условия линейности оператора:

$$\widehat{A}(x+y)=\widehat{A}x+\widehat{A}y,$$

$$\widehat{A}(\alpha x)=\alpha\widehat{A}x.$$

Если условия линейности выполнены, т.е.

$$f_i(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)=f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)+f_i(y_1,y_2,\ldots,y_n),$$

$$f_i(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n)=\alpha f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

при $i=1,2,\ldots,n$, то оператор $\widehat{A}$ линеен, в противном случае оператор $\widehat{A}$ нелинеен.

Пример. Пусть в некотором базисе линейного пространства X_3 задан произвольный вектор $x=\{x_1,x_2,x_3\}$. Является ли линейным оператор $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$ такой, что

$$\widehat{A}x=\{x_1-x_2, 2x_1+x_3, 3x_1\}?$$

Решение. Пусть $x=\{x_1,x_2,x_3\}$ и $y=\{y_1,y_2,y_3\}$ – произвольные векторы пространства X_3. Тогда $x+y=\{x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3\}$ и $\alpha x=\{\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3\}$.

---

*) Найденные фундаментальные системы решений однородных систем уравнений и частные решения неоднородных систем проверьте с помощью подстановки в уравнения.

Проверяем условия линейности оператора:

$$\widehat{A}(x+y) = \{(x_1+y_1)-(x_2+y_2), 2(x_1+y_1)+(x_3+y_3), 3(x_1+y_1)\} =$$

$$= \{x_1 - x_2, 2x_1 + x_3, 3x_1\} + \{y_1 - y_2, 2y_1 + y_3, 3y_1\} = \widehat{A}x + \widehat{A}y,$$

$$\widehat{A}(\alpha x) = \{\alpha x_1 - \alpha x_2, 2\alpha x_1 + \alpha x_3, 3\alpha x_1\} = \alpha\{x_1 - x_2, 2x_1 + x_3, 3x_1\} = \alpha\widehat{A}x.$$

Условия линейности выполнены. Следовательно, оператор $\widehat{A}$ линеен.

Ответ. Оператор $\widehat{A}$ линеен.

Условия задач. *Являются ли линейными операторы* $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ *и* $\widehat{C}$?

1. $\widehat{A}x = \{2x_1 - 5x_2 - 3x_3, -2x_1 - 3x_2 - x_3, x_2 + 3x_3\}$,
$\widehat{B}x = \{x_1 - 2x_2 - 4x_3, x_1 - x_2 - 3x_3, 2x_2 + 3\}$,
$\widehat{C}x = \{x_3^3, 2x_1 - x_2 - 2x_3, 3x_2 + x_3\}$.

2. $\widehat{A}x = \{2x_1 - 3x_2 - 2x_3, 2x_1 - 3x_2, 2x_2 + 3\}$,
$\widehat{B}x = \{4x_1 - 3x_2 - x_3, 0, x_2^2 + x_3\}$,
$\widehat{C}x = \{x_1 - 2x_2 - x_3, 3x_1 - 2x_2, 3x_2 + x_3\}$.

3. $\widehat{A}x = \{2x_1 - x_2 - 3x_3, x_1, x_1 + x_2^3 + x_3\}$,
$\widehat{B}x = \{3x_1 - x_2 - x_3, 2x_1, 3x_1 + x_2 + x_3\}$,
$\widehat{C}x = \{3x_1 - x_2 - x_3, 2x_1, 3x_1 + x_2 - 1\}$.

4. $\widehat{A}x = \{2x_1 + x_2 + 4x_3, 2x_3, x_1 - 2x_2 - 3x_3\}$,
$\widehat{B}x = \{2x_1 + x_2 + 4x_3, 1, x_1 - 2x_2 + 3\}$,
$\widehat{C}x = \{5x_1 + 3x_2 + x_3, x_3, 2x_1^2 - 2x_2 - 4x_3\}$.

5. $\widehat{A}x = \{x_1, 2x_1 - x_2 + 1, x_1 - x_2 - 3x_3\}$,
$\widehat{B}x = \{x_1, 2x_1 - x_2 - 3x_3, x_1^3 - x_2 - 3x_3\}$,
$\widehat{C}x = \{x_1, 2x_1 - x_2 - 3x_3, x_1 - x_2 - 3x_3\}$.

6. $\widehat{A}x = \{x_1 + 2x_2, 3x_2 - 4x_3, x_1 - 2x_2^2 - 3x_3\}$,
$\widehat{B}x = \{x_1 + 2x_2, 3x_2 - 4x_3, x_1 - 2x_2 - 3x_3\}$,
$\widehat{C}x = \{x_1 + 2x_2, 3x_2 - 2, x_1 - 2x_2 - 5\}$.

7. $\widehat{A}x = \{2x_1, 3x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 2x_3\}$,
$\widehat{B}x = \{2x_1, 3x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 7\}$,
$\widehat{C}x = \{2x_1, 3x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1^4 + 5x_2 + 2x_3\}$.

8. $\widehat{A}x = \{x_1 - 3x_2 - x_3, 5, x_1 + 2x_2 + 1\}$,
$\widehat{B}x = \{x_1 - 3x_2 - x_3, 0, x_1^3 + 2x_2 + 3x_3\}$,
$\widehat{C}x = \{x_1 - 3x_2 - x_3, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$.

9. $\widehat{A}x = \{4x_1 - 2x_2, 3x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3^4\}$,
$\widehat{B}x = \{4x_1 - 2x_2, 3x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$,
$\widehat{C}x = \{4x_1 - 2x_2, 3, x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$.

10. $\widehat{A}x = \{5x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_2 + 5x_3\}$,
$\widehat{B}x = \{5x_3, x_1 + 2x_2 + 2, 2x_1 + 3x_2 + 5\}$,
$\widehat{C}x = \{5x_3, 0, x_1^2 + 3x_2 + 5x_3\}$.

Ответы.
1. $\widehat{A}$ линейный, $\widehat{B}$ нелинейный, $\widehat{C}$ нелинейный.
2. $\widehat{A}$ нелинейный, $\widehat{B}$ нелинейный, $\widehat{C}$ линейный.
3. $\widehat{A}$ нелинейный, $\widehat{B}$ линейный, $\widehat{C}$ нелинейный.
4. $\widehat{A}$ линейный, $\widehat{B}$ нелинейный, $\widehat{C}$ нелинейный.
5. $\widehat{A}$ нелинейный, $\widehat{B}$ нелинейный, $\widehat{C}$ линейный.
6. $\widehat{A}$ нелинейный, $\widehat{B}$ линейный, $\widehat{C}$ нелинейный.
7. $\widehat{A}$ линейный, $\widehat{B}$ нелинейный, $\widehat{C}$ нелинейный.
8. $\widehat{A}$ нелинейный, $\widehat{B}$ нелинейный, $\widehat{C}$ линейный.
9. $\widehat{A}$ нелинейный, $\widehat{B}$ линейный, $\widehat{C}$ нелинейный.
10. $\widehat{A}$ линейный, $\widehat{B}$ нелинейный, $\widehat{C}$ нелинейный.

2.6. Матрица, образ, ядро, ранг и дефект оператора

Постановка задачи. *Задан оператор $\widehat{A}$, осуществляющий некоторое преобразование пространства геометрических векторов V_3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), образ, ядро, ранг и дефект оператора $\widehat{A}$.*

План решения.

1. По определению доказываем линейность оператора $\widehat{A}$, используя свойства операций над геометрическими векторами в координатной форме, т.е. проверяем, что $\forall \vec{x},\ \vec{y} \in V_3$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\widehat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \widehat{A}\vec{x} + \widehat{A}\vec{y},$$

$$\widehat{A}(\alpha \vec{x}) = \alpha \widehat{A}\vec{x}.$$

2. Строим по определению матрицу оператора $\widehat{A}$. Для этого находим образы базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и записываем их координаты в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Столбцы искомой матрицы — это столбцы координат образов базисных векторов.

3. Находим образ, ранг, ядро и дефект оператора $\widehat{A}$, исходя из их определений.

Пример. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), образ, ядро, ранг и дефект оператора проецирования пространства геометрических векторов V_3 на плоскость XOY.

Решение.

1. Докажем по определению линейность оператора проецирования. Пусть в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеем произвольный вектор $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда его образ (проекция) есть $\widehat{P}\vec{x} = \{x_1, x_2, 0\}$.

По правилам операций с геометрическими векторами в координатной форме $\forall \vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\} \in V_3$, $\forall \vec{y} = \{y_1, y_2, y_3\} \in V_3$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\widehat{P}(\vec{x} + \vec{y}) = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0\} = \{x_1, x_2, 0\} + \{y_1, y_2, 0\} = \widehat{P}\vec{x} + \widehat{P}\vec{y},$$

$$\widehat{P}(\alpha\vec{x}) = \{\alpha x_1, \alpha x_2, 0\} = \alpha\{x_1, x_2, 0\} = \alpha\widehat{P}\vec{x}.$$

2. Так как по определению матрицы оператора ее столбцы — это столбцы координат образов базисных векторов, найдем образы базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и запишем их координаты в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\widehat{P}\vec{i} = \vec{i} = \{1, 0, 0\}, \quad \widehat{P}\vec{j} = \vec{j} = \{0, 1, 0\}, \quad \widehat{P}\vec{k} = \vec{0} = \{0, 0, 0\}.$$

Таким образом, матрица оператора проецирования $\widehat{P}$ есть

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Находим образ, ранг, ядро и дефект оператора $\widehat{A}$, исходя из определений.

Образ оператора проецирования $\widehat{P}$ — это множество векторов, лежащих в плоскости XOY, следовательно, в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall \vec{y} : \ \vec{y} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Отсюда $\operatorname{Rg}\widehat{P} = 2$.

$\operatorname{Ker}\widehat{P}$ — это множество векторов, коллинеарных оси OZ, следовательно, в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\forall \vec{x} : \ \vec{x} = \gamma\vec{k}, \quad \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Отсюда $\operatorname{Def}\widehat{P} = 1$.

Заметим, что $\operatorname{Rg}\widehat{P} + \operatorname{Def}\widehat{P} = 2 + 1 = \dim V_3$

Ответ. Оператор $\widehat{P}$ линеен. Его матрица в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ есть

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall \vec{y} : \ \vec{y} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Rg}\widehat{P} = 2$,
$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\forall \vec{x} : \ \vec{x} = \gamma\vec{k}, \quad \gamma \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Def}\widehat{P} = 1$.

Условия задач. *Доказать линейность, найти матрицу (в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), образ, ядро, ранг и дефект оператора.*

1. Оператор проецирования на ось OX.

2. Оператор отражения относительно плоскости YOZ.

3. Оператор поворота относительно оси OX на угол $\pi/3$ в положительном направлении.

4. Оператор отражения относительно плоскости $x - z = 0$.

5. Оператор проецирования на плоскость $y + z = 0$.

6. Оператор поворота относительно оси OZ на угол $\pi/6$ в положительном направлении.

7. Оператор проецирования на плоскость $x + y = 0$.

8. Оператор отражения относительно плоскости $y - z = 0$.

9. Оператор проецирования на плоскость $\sqrt{3}y + z = 0$.

10. Оператор поворота относительно оси OY на угол $\pi/4$ в положительном направлении.

Ответы.

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall \vec{y}: \ \vec{y} = \alpha\vec{i}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Rg}\widehat{P} = 2,$
$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\forall \vec{x}: \ \vec{x} = \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \ \operatorname{Def}\widehat{P} = 1.$

2. $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall \vec{y}: \ \vec{y} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Rg}\widehat{P} = 3,$
$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\vec{0}\}, \ \operatorname{Def}\widehat{P} = 0.$

3. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix};$

$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall \vec{y}: \ \vec{y} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Rg}\widehat{P} = 3,$
$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\vec{0}\}, \ \operatorname{Def}\widehat{P} = 0.$

4. $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall \vec{y}: \ \vec{y} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Rg}\widehat{P} = 3,$
$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\vec{0}\}, \ \operatorname{Def}\widehat{P} = 0.$

5. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix};$

$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall \vec{y}: \ \vec{y} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} - \beta\vec{k}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Rg}\widehat{P} = 2,$
$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\forall \vec{x}: \ \vec{x} = \gamma\vec{n}, \quad \vec{n} = \{0, 1, 1\}, \quad \gamma \in \mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Def}\widehat{P} = 1.$

6. $P = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall\vec{y}:\ \vec{y} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k},\quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\},\quad \operatorname{Rg}\widehat{P} = 3,$
$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\vec{0}\},\ \operatorname{Def}\widehat{P} = 0.$

7. $$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall\vec{y}:\ \vec{y} = \alpha\vec{i} - \alpha\vec{j} + \beta\vec{k},\quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\},\quad \operatorname{Rg}\widehat{P} = 2,$
$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\forall\vec{x}:\ \vec{x} = \gamma\vec{n},\quad \vec{n} = \{1,1,0\},\quad \gamma \in \mathbb{R}\},\quad \operatorname{Def}\widehat{P} = 1.$

8. $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall\vec{y}:\ \vec{y} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k},\quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\},\quad \operatorname{Rg}\widehat{P} = 3,$
$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\vec{0}\},\ \operatorname{Def}\widehat{P} = 0.$

9. $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix};$$

$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall\vec{y}:\ \vec{y} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} - \sqrt{3}\beta\vec{k},\quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\},\quad \operatorname{Rg}\widehat{P} = 2,$
$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\forall\vec{x}:\ \vec{x} = \sqrt{3}\gamma\vec{j} + \gamma\vec{k},\quad \gamma \in \mathbb{R}\},\quad \operatorname{Def}\widehat{P} = 1.$

10. $$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix};$$

$\operatorname{Img}\widehat{P} = \{\forall\vec{y}:\ \vec{y} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k},\quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\},\quad \operatorname{Rg}\widehat{P} = 3,$
$\operatorname{Ker}\widehat{P} = \{\vec{0}\},\ \operatorname{Def}\widehat{P} = 0.$

2.7. Действия с операторами и их матрицами

Постановка задачи. *В некотором базисе трехмерного линейного пространства X_3 заданы отображения*

$$x \mapsto \widehat{A}x =$$

$$= \{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\},$$

$x \mapsto \widehat{B}x =$

$$= \{b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3, b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3, b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3\},$$

где $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ *— произвольный вектор пространства* X_3.

Найти координаты вектора $y = P(\widehat{A}, \widehat{B})x$ *(в том же базисе), где* $P(\widehat{A}, \widehat{B})$ *— многочлен относительно операторов* $\widehat{A}$ *и* $\widehat{B}$.

План решения. Так как при сложении операторов их матрицы складываются, при умножении на число — умножаются на это число, а матрица композиции операторов равна произведению их матриц, то нужно найти матрицу $P(A, B)$, где A и B — матрицы операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$. Затем столбец координат вектора $y = P(\widehat{A}, \widehat{B})x$ находим по формуле $P(A, B) \cdot X$, где X — столбец координат вектора x.

1. Построим матрицы операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

2. По правилам сложения матриц, умножения матрицы на число и умножения матриц находим матрицу $P(A, B)$:

$$P(A, B) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Находим столбец координат образа вектора x:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Записываем ответ в виде $P(\widehat{A}, \widehat{B})x = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Пример. В некотором базисе трехмерного линейного пространства X_3 заданы отображения

$$x \mapsto \widehat{A}x = \{x_1 + x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_3\},$$

$$x \mapsto \widehat{B}x = \{x_2 + 2x_3, -x_1, x_2\},$$

где $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ — произвольный вектор пространства X_3. Найти координаты вектора $(2\widehat{A} + \widehat{A} \circ \widehat{B})x$ в том же базисе.

Решение.

1. Построим матрицы операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. По правилам сложения матриц, умножения матрицы на число и умножения матриц вычисляем матрицу $2A + A \cdot B$:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Находим столбец координат образа вектора x:

$$(2\widehat{A} + \widehat{A} \circ \widehat{B})x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $(2\widehat{A} + \widehat{A} \circ \widehat{B})x = \{x_1 + 2x_2, -x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_2 + 2x_3\}$.

Условия задач. *Пусть в некотором базисе заданы отображения* $\widehat{A}x = \{x_1 - 2x_3, x_2, x_2 - x_3\}$ *и* $\widehat{B}x = \{2x_3, x_1, -x_2\}$. *Найти координаты векторов* $P(\widehat{A}, \widehat{B})x$.

1. $(\widehat{A}^2 + 2\widehat{B})x$.	2. $(\widehat{A}^2 - 2\widehat{B}^2)x$.
3. $(\widehat{B}^2 + 2\widehat{A})x$.	4. $(\widehat{A}\widehat{B} + \widehat{A}^2)x$.
5. $(2\widehat{A}^2 + 3\widehat{B}^2)x$.	6. $(3\widehat{A} + 2\widehat{B}^2)x$.
7. $(\widehat{B}\widehat{A} + \widehat{A}^2)x$.	8. $(\widehat{B}^2 + 3\widehat{A}^2)x$.
9. $(\widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}^2)x$.	10. $(\widehat{B}\widehat{A} - \widehat{A}\widehat{B})x$.

Ответы.

1. $\{x_1 - 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + x_2, -2x_2 + x_3\}$.
2. $\{x_1 + 2x_2, x_2 - 4x_3, 2x_1 + x_3\}$.
3. $\{2x_1 - 2x_2 - 4x_3, 2x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 - 2x_3\}$.
4. $\{x_1 + 2x_3, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3\}$.
5. $\{2x_1 - 10x_2, 2x_2 + 6x_3, -3x_1 + 2x_3\}$.
6. $\{3x_1 - 4x_2 - 6x_3, 3x_2 + 4x_3, -2x_1 + 3x_2 - 3x_3\}$.
7. $\{x_1 - 2x_3, x_1 + x_2 - 2x_3, -x_2 + x_3\}$.
8. $\{3x_1 - 8x_2, 3x_2 + 2x_3, -x_1 + 3x_3\}$.
9. $\{2x_3, x_1 + 2x_3, x_2\}$.
10. $\{-4x_3, -2x_3, -x_1 - 2x_2\}$.

2.8. Преобразование координат вектора

Постановка задачи. *Вектор* $\mathbf{x}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *имеет координаты* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. *Найти координаты вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$, *где*

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{n1}\mathbf{e}_n,\\
\mathbf{e}'_2 &= c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{n2}\mathbf{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{e}'_n &= c_{1n}\mathbf{e}_1 + c_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{nn}\mathbf{e}_n.
\end{aligned}$$

План решения. Координаты вектора при переходе от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ преобразуются по формуле

$$X_{\mathbf{e}'} = C^{-1} X_{\mathbf{e}}, \tag{1}$$

где $X_{\mathbf{e}'}$ и $X_{\mathbf{e}}$ — столбцы координат вектора $\mathbf{x}$ в базисах $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, C — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$.

1. Находим матрицу перехода C. Так как столбцы матрицы перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ — это столбцы координат векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, то матрица перехода имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Находим обратную матрицу C^{-1} и проверяем, что $C^{-1}C = E$.

3. По формуле (1) находим столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$:

$$X_{\mathbf{e}'} = C^{-1}X_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \ldots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}.$$

Записываем ответ в виде $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n\}$.

Пример. Вектор $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеет координаты $\{1, 2, 3\}$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Решение.

1. Находим матрицу перехода

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Находим обратную матрицу C^{-1} методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Таким образом,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверяем, что $C^{-1}C = E$.

3. По формуле (1) находим столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$:

$$X_{\mathbf{e}'} = C^{-1}X_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{0, 1, -1\}$.

Условия задач. *Найти координаты заданного вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

1. $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_2$,
$\mathbf{x}_\mathbf{e} = \{3, -5, 4\}$.

2. $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$,
$\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$,
$\mathbf{e}'_3 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x}_\mathbf{e} = \{1, 2, 7\}$.

3. $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$,
$\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$,
$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x}_\mathbf{e} = \{6, 2, 0\}$.

4. $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_3 = 3\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x}_\mathbf{e} = \{2, 6, 6\}$.

5. $\mathbf{e}'_1 = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x}_\mathbf{e} = \{0, 5, 5\}$.

6. $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_3 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x}_\mathbf{e} = \{9, 14, 16\}$.

7. $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_2 = 5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_3 = 7\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x}_\mathbf{e} = \{1, 0, -1\}$.

8. $\mathbf{e}'_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_2 = -4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_3 = 5\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x}_\mathbf{e} = \{-2, 0, 1\}$.

9. $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_2 = 7\mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_3 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x}_\mathbf{e} = \{0, 3, 3\}$.

10. $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$,
$\mathbf{e}'_3 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
$\mathbf{x}_\mathbf{e} = \{-9, 0, 9\}$.

Ответы. 1. $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{5, -1, -4\}$. 2. $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{4, -12, 7\}$. 3. $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{5, 1, 0\}$. 4. $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{2, 0, 0\}$. 5. $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{-6, 1, 8\}$. 6. $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{2, 3, -2\}$. 7. $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{0, -4, 3\}$. 8. $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{5, 3, -1\}$. 9. $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{5, -4, 6\}$. 10. $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = \{1, 0, -1\}$.

2.9. Преобразование матрицы оператора

Постановка задачи. *Найти матрицу некоторого оператора* $\widehat{A}$ *в базисе* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$, *где*

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{n1}\mathbf{e}_n,\\
\mathbf{e}'_2 &= c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{n2}\mathbf{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{e}'_n &= c_{1n}\mathbf{e}_1 + c_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{nn}\mathbf{e}_n,
\end{aligned}$$

если в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *его матрица имеет вид*

$$A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

План решения. При переходе от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ матрица оператора преобразуется по формуле

$$A_{\mathbf{e}'} = C^{-1} A_{\mathbf{e}} C, \tag{1}$$

где C — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$.

1. Находим матрицу перехода C. Так как столбцы матрицы перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ — это столбцы координат векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, то

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Находим обратную матрицу C^{-1} и проверяем, что $C^{-1}C = E$.

3. Находим матрицу оператора $\widehat{A}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ по формуле (1)

$$A_{\mathbf{e}'} = C^{-1} A_{\mathbf{e}} C.$$

Пример. Найти матрицу оператора $\widehat{A}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

если в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ его матрица имеет вид

$$A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Находим матрицу перехода

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Находим обратную матрицу C^{-1} методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 3 \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Убеждаемся, что $C \cdot C^{-1} = E$:

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Находим матрицу оператора $\widehat{A}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ по формуле (1)

$$A_{\mathbf{e}'} = C^{-1} A_{\mathbf{e}} C =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 6 & -8 \\ 11 & -9 & 12 \\ 15 & -16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $A_{\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -8 \\ 11 & -9 & 12 \\ 15 & -16 & 19 \end{pmatrix}.$

Условия задач. *Найти матрицы* $A_{\mathbf{e}'}$ *в базисе* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, *где*

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}'_2 &= 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

если заданы матрицы $A_{\mathbf{e}}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

1. $A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8. $A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. $A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответы.

1. $A_{\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} -47 & -67 & -37 \\ 30 & 43 & 23 \\ 9 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.

2. $A_{\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} -37 & -55 & -27 \\ 24 & 35 & 19 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $A_{\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} 20 & 27 & 22 \\ -13 & -17 & -16 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $A_{\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} -26 & -47 & 7 \\ 13 & 25 & -6 \\ 13 & 20 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A_{\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} 27 & 42 & 13 \\ -18 & -28 & -8 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $A_{\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 15 \\ -2 & -1 & -11 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

$$7.\ A_{e'} = \begin{pmatrix} -43 & -60 & -34 \\ 28 & 39 & 22 \\ 10 & 14 & 7 \end{pmatrix}. \quad 8.\ A_{e'} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 21 \\ -1 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$9.\ A_{e'} = \begin{pmatrix} -28 & -40 & -28 \\ 17 & 24 & 18 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}. \quad 10.\ A_{e'} = \begin{pmatrix} -86 & -113 & -60 \\ 51 & 67 & 35 \\ 23 & 30 & 18 \end{pmatrix}.$$

2.10. Собственные значения и собственные векторы оператора

Постановка задачи. *Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_n \mapsto X_n$, заданного в некотором базисе матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

План решения. Собственные значения оператора $\widehat{A}$ являются корнями его характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.

1. Составляем характеристическое уравнение и находим все его вещественные корни (среди них могут быть и кратные).

2. Для каждого собственного значения λ_i найдем собственные векторы. Для этого записываем однородную систему уравнений

$$(A - \lambda_i E)X = O$$

и находим фундаментальную систему решений $X_1^i, X_2^i, \dots, X_{n-r_i}^i$, где r_i — ранг матрицы системы $A - \lambda_i E$. (Заметим, что $r_i < n$, так как $\det(A - \lambda_i E) = 0$.)

3. Столбцы $X_1^i, X_2^i, \dots, X_{n-r_i}^i$ являются столбцами координат искомых собственных векторов $\mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \dots, \mathbf{e}_{n-r_i}^i$. Окончательно для $\lambda = \lambda_i$ записываем ответ в виде

$$\mathbf{e}_1^i = \{\dots\}, \quad \mathbf{e}_2^i = \{\dots\}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_{n-r_i}^i = \{\dots\}$$

Замечание. Множество собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_i, можно записать в виде

$$S_{\lambda=\lambda_i} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = C_1\mathbf{e}_1^i + C_2\mathbf{e}_2^i + \dots + C_{n-r_i}\mathbf{e}_{n-r_i}^i \neq \mathbf{0}\}$$

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0.$$

Поэтому $\lambda_{1,2} = 3$, $\lambda_3 = 1$.

2. Для собственного значения $\lambda_{1,2} = 3$ найдем собственные векторы. Запишем однородную систему уравнений $(A - 3 \cdot E)X = O$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, ранг матрицы этой системы равен 1 ($n - r = 2$ — размерность пространства решений), следовательно, система нетривиально совместна и ее фундаментальная система решений имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, двукратному собственному значению $\lambda_{1,2} = 3$ соответствуют два линейно независимых собственных вектора $\mathbf{e}_1 = \{1, 1, 0\}$ и $\mathbf{e}_2 = \{1, 0, 1\}$. Множество всех собственных векторов $S_{\lambda_{1,2}=3}$, соответствующих собственному значению $\lambda_{1,2} = 3$, имеет вид

$$S_{\lambda_{1,2}=3} = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = C_1\mathbf{e}_1 + C_2\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}\}.$$

Аналогично находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 1$. Получим $\mathbf{e}_3 = \{0, 1, 1\}$. Поэтому множество всех собственных векторов $S_{\lambda_3=1}$, соответствующих собственному значению $\lambda_3 = 1$, имеет вид

$$S_{\lambda_3=1} = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = C_3\mathbf{e}_3 \neq \mathbf{0}\}.$$

Ответ.
$S_{\lambda_{1,2}=3}=\{\mathbf{x} : \mathbf{x} = C_1\mathbf{e}_1 + C_2\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}\}$, где $\mathbf{e}_1=\{1,1,0\}$ и $\mathbf{e}_2=\{1,0,1\}$;
$S_{\lambda_3=1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = C_3\mathbf{e}_3 \neq \mathbf{0}\}$, где $\mathbf{e}_3 = \{0,1,1\}$.

Условия задач. *Найти собственные значения и собственные векторы операторов $\widehat{A} : X_3 \mapsto X_3$, заданных в некотором базисе матрицами.*

1. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
7. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответы. 1. $\lambda_1=-1$, $\mathbf{e}_1=\{1,-1,2\}$; $\lambda_2=5$, $\mathbf{e}_2=\{1,1,0\}$; $\lambda_3=5$, $\mathbf{e}_3=\{-2,0,1\}$. 2. $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{e}_1 = \{1,1,0\}$; $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{e}_2 = \{2,1,0\}$; $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{e}_3 = \{0,0,1\}$. 3. $\lambda_1=2$, $\mathbf{e}_1=\{1,0,-1\}$; $\lambda_2=3$, $\mathbf{e}_2=\{1,1,1\}$; $\lambda_3=6$, $\mathbf{e}_3=\{1,-2,1\}$. 4. $\lambda_1=2$, $\mathbf{e}_1=\{1,0,0\}$; $\lambda_2=2$, $\mathbf{e}_2=\{0,1,1\}$; $\lambda_3=4$, $\mathbf{e}_3=\{1,1,-1\}$. 5. $\lambda_1=2$, $\mathbf{e}_1=\{1,0,0\}$; $\lambda_2=3$, $\mathbf{e}_2=\{3,1,1\}$; $\lambda_3=5$, $\mathbf{e}_3=\{1,-3,3\}$. 6. $\lambda_1=1$, $\mathbf{e}_1=\{2,-1,2\}$; $\lambda_2=3$, $\mathbf{e}_2=\{1,-2,2\}$; $\lambda_3=5$, $\mathbf{e}_3 = \{0,1,0\}$. 7. $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{e}_1 = \{0,1,0\}$; $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{e}_2 = \{1,3,1\}$; $\lambda_3 = 5$, $\mathbf{e}_3 = \{1,1,-1\}$. 8. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{e}_1 = \{3,-3,-1\}$; $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{e}_2 = \{1,1,-5\}$; $\lambda_3=4$, $\mathbf{e}_3=\{0,0,1\}$. 9. $\lambda_1=2$, $\mathbf{e}_1=\{3,-3,-1\}$; $\lambda_2=4$, $\mathbf{e}_2=\{1,1,-3\}$; $\lambda_3=5$, $\mathbf{e}_3=\{0,0,1\}$. 10. $\lambda_1=1$, $\mathbf{e}_1=\{1,-1,-1\}$; $\lambda_2=3$, $\mathbf{e}_2=\{1,0,-1\}$; $\lambda_3=4$, $\mathbf{e}_3=\{1,0,0\}$.

Глава 3

ПРЕДЕЛЫ

При изучении темы ПРЕДЕЛЫ вы познакомитесь на примерах с понятиями предела последовательности, предела и непрерывности функции в точке, научитесь вычислять различные пределы, используя теоремы о пределах, эквивалентные бесконечно малые и специальные приемы.

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете решить неравенства, выполнить численные расчеты и проверить правильность полученных вами результатов.

3.1. Понятие предела последовательности

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. По определению число a называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\forall\varepsilon > 0$ неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ имеет решение $n > N(\varepsilon)$.

2. Найдем, при каких n справедливо неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

т.е. решим это неравенство относительно n.

3. Если решение имеет вид $n > N(\varepsilon)$, то a — предел числовой последовательности $\{a_n\}$.

Замечание. Если решение неравенства $|a_n - a| < \varepsilon$ нельзя представить в виде $n > N(\varepsilon)$, то число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$.

Пример. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3-2} = 2.$$

Решение.

1. По определению число 2 называется пределом числовой последовательности $\left\{\dfrac{2n^3}{n^3-2}\right\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\frac{2n^3}{n^3-2} - 2\right| < \varepsilon.$$

2. Найдем, при каких n справедливо неравенство

$$\left|\frac{2n^3}{n^3-2} - 2\right| < \varepsilon,$$

т.е. решим это неравенство относительно n.

3. Неравенство имеет решение $n > N(\varepsilon) = \sqrt[3]{4/\varepsilon + 2}$. Следовательно, 2 — предел числовой последовательности $\left\{\dfrac{2n^3}{n^3-2}\right\}$.

Ответ. $n > \sqrt[3]{4/\varepsilon + 2}$.

Условия задач. *Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

1. $a_n = \dfrac{2n-2}{3n-1}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$
2. $a_n = \dfrac{4n-2}{2n+3}, \quad a = 2.$
3. $a_n = \dfrac{3n+2}{2n+1}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$
4. $a_n = \dfrac{5n+2}{3n+1}, \quad a = \dfrac{5}{3}.$
5. $a_n = \dfrac{5n+2}{n+1}, \quad a = 5.$
6. $a_n = \dfrac{4n^2+1}{n^2+2}, \quad a = 4.$
7. $a_n = \dfrac{3-n^3}{1+n^3}, \quad a = -1.$
8. $a_n = \dfrac{6n-2}{2n+1}, \quad a = 3.$
9. $a_n = \dfrac{3+8n^2}{1+4n^2}, \quad a = 2.$
10. $a_n = \dfrac{3n}{n+1}, \quad a = 3.$

Ответы. 1. $n > \dfrac{3\varepsilon+4}{9\varepsilon}$. 2. $n > \dfrac{8-3\varepsilon}{2\varepsilon}$. 3. $n > \dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$.
4. $n > \dfrac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}$. 5. $n > \dfrac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$. 6. $n > \sqrt{\dfrac{7-2\varepsilon}{\varepsilon}}$. 7. $n > \sqrt[3]{\dfrac{4-\varepsilon}{\varepsilon}}$.
8. $n > \dfrac{5-\varepsilon}{2\varepsilon}$. 9. $n > \sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}}$. 10. $n > \dfrac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$.

3.2. Вычисление $\lim_{n\to\infty}[P_k(n)/Q_m(n)]$

Постановка задачи. *Вычислить предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)},$$

где

$$P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0,$$
$$Q_m(n) = b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0.$$

План решения. Здесь $P_k(n)$ — многочлен степени k (бесконечно большая последовательность порядка n^k) и $Q_m(n)$ — многочлен степени m (бесконечно большая последовательность порядка n^m).

1. Вынесем в числителе множитель n^k, получим $P_k(n) = n^k p(n)$, где $p(n) = a_k + a_{k-1}/n + \ldots + a_0/n^k$.

2. Вынесем в знаменателе множитель n^m, получим $Q_m(n) = n^m q(n)$, где $q(n) = b_m + b_{m-1}/n + \ldots + b_0/n^m$.

3. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k p(n)}{n^m q(n)}.$$

4. Получаем:

если $k > m$, то $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \infty$;

если $k < m$, то $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = 0$;

если $k = m$, то по теореме о пределе частного

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{\lim_{n\to\infty}p(n)}{\lim_{n\to\infty}q(n)} = \frac{a_k}{b_m}.$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}.$$

Решение. Здесь $(2n+1)^2-(n+1)^2 = 3n^2+2n$ — многочлен второй степени (бесконечно большая последовательность порядка n^2) и n^2+n+1 — многочлен второй степени (бесконечно большая последовательность порядка n^2).

1. Вынесем в числителе множитель n^2, получим

$$(2n+1)^2-(n+1)^2 = n^2\left(3+\frac{2}{n}\right).$$

2. Вынесем в знаменателе множитель n^2, получим

$$n^2+n+1 = n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3+2/n)}{n^2(1+1/n+1/n^2)}.$$

4. Сокращая n^2 и используя теорему о пределе частного, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty}(3+2/n)}{\lim_{n\to\infty}(1+1/n+1/n^2)} = 3.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = 3.$

Условия задач. *Вычислить пределы.*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5-n)^2+(5+n)^2}{(5-n)^2-(5+n)^2}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^4}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-n)^2-(1+n)^2}{(1+n)^2-(2-n)^2}.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3+n)^2-(2+n)^2}{(2+n)^2-(1-n)^2}.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n+2)^2}{(n-2)^3-(n+2)^3}.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+3n)^3-27n^3}{(1+4n)^2+2n^2}$. 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-2n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+n)^3}{(n+2)^2-(n+1)^3}$. 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n+5)^3}{(3-n)^3}$.

Ответы. 1. $-\infty$. 2. 0. 3. 0. 4. -1. 5. 1/3. 6. $-\infty$. 7. 9. 8. $-2/9$. 9. -1. 10. 1.

3.3. Вычисление $\lim_{n\to\infty}[f(n)/g(n)]$

Постановка задачи. *Вычислить предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)},$$

где $f(n)$ — бесконечно большая последовательность порядка n^α и $g(n)$ — бесконечно большая последовательность порядка n^β $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

План решения.

1. Вынесем в числителе множитель n^α, получим $f(n)=n^\alpha\varphi(n)$, где $\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=a$, $a\neq 0$.

2. Вынесем в знаменателе множитель n^β, получим $g(n)=n^\beta\psi(n)$, где $\lim_{n\to\infty}\psi(n)=b$, $b\neq 0$.

3. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha\varphi(n)}{n^\beta\psi(n)}.$$

4. Получаем:

если $\alpha>\beta$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=\infty$;

если $\alpha<\beta$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=0$;

если $\alpha=\beta$, то по теореме о пределе частного

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)}{\lim\limits_{n\to\infty}\psi(n)}=\frac{a}{b}.$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\,\sqrt[3]{n^3-1}}.$$

Решение. Числитель $n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}$ — бесконечно большая последовательность порядка n^2 и знаменатель $(n+\sqrt[4]{n})\,\sqrt[3]{n^3-1}$ — бесконечно большая последовательность порядка n^2.

1. Вынесем в числителе множитель n^2, получим

$$n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}=n^2\left(\frac{1}{n^{5/6}}+2\sqrt[5]{1+\frac{1}{n^{10}}}\right).$$

2. Вынесем в знаменателе множитель n^2, получим

$$(n+\sqrt[4]{n})\,\sqrt[3]{n^3-1}=n^2\left(1+\frac{1}{n^{3/4}}\right)\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}.$$

3. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\,\sqrt[3]{n^3-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1/n^{5/6}+2\sqrt[5]{1+1/n^{10}})}{n^2(1+1/n^{3/4})\,\sqrt[3]{1-1/n^3}}.$$

4. Сокращая n^2 и используя теоремы о пределах, окончательно получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\,\sqrt[3]{n^3-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^{5/6}+2\sqrt[5]{1+1/n^{10}}}{(1+1/n^{3/4})\,\sqrt[3]{1-1/n^3}}=$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}(1/n^{5/6}+2\sqrt[5]{1+1/n^{10}})}{\lim_{n\to\infty}(1+1/n^{3/4})\,\sqrt[3]{1-1/n^3}}=2.$$

Замечание. В данном случае было использовано свойство корня, в силу которого $\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{1+1/n^{10}}=1$ и $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1-1/n^3}=1$.

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\,\sqrt[3]{n^3-1}}=2.$

Условия задач. *Вычислить пределы.*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{3n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{2n^2+3}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+2}}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^3+3}-\sqrt{n+5}}{\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt{n-1}}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+3}+3n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+2n+1}-n^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n+2}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}+n^2}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^4}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt{4+n^2}}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt[3]{n^2-1}}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+3}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}-\sqrt{n-2}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3-\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+5}+n}$.

Ответы. 1. $\sqrt{2}$. 2. 0. 3. $+\infty$. 4. 3. 5. 5. 6. -3. 7. -1. 8. $+\infty$. 9. 5. 10. -2.

3.4. Вычисление $\lim_{n\to\infty}\left[u(n)^{v(n)}\right]$

Постановка задачи. *Вычислить предел последовательности*

$$\lim_{n\to\infty}\left[u(n)^{v(n)}\right],$$

где $\lim_{n\to\infty}u(n)=1$ *и* $\lim_{n\to\infty}v(n)=\infty$.

План решения.

1. Преобразуем выражение под знаком предела так, чтобы использовать второй замечательный предел, т.е. выделим единицу:

$$\lim_{n\to\infty}\left[u(n)^{v(n)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left((1+\alpha(n))^{1/\alpha(n)}\right)^{\alpha(n)v(n)},$$

где $\alpha(n)=u(n)-1$ — бесконечно малая последовательность при $n\to\infty$. Так как $\alpha(n)\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha(n))^{1/\alpha(n)}=e.$$

2. Если $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ $(a_n>0,\ a>0)$ и $\lim_{n\to\infty}b_n=b$, то

$$\lim_{n\to\infty}{a_n}^{b_n}=a^b.$$

Следовательно, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(n)v(n) = \lim_{n\to\infty} (u(n)-1)v(n),$$

то окончательно имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left[u(n)^{v(n)}\right] = e^{\lim_{n\to\infty}(u(n)-1)v(n)}.$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}.$$

Решение.

1. При $n\to\infty$ выражение под знаком предела представляет собой степень, основание которой стремится к единице:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right) = 1,$$

а показатель — к минус бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} (1-2n) = -\infty.$$

Преобразуем выражение под знаком предела так, чтобы использовать второй замечательный предел:

$$\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n} = \left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n} =$$

$$= \left[\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{\dfrac{4n^2+2n+3}{2n-4}}\right]^{\dfrac{(2n-4)(1-2n)}{4n^2+2n+3}}.$$

Так как

$$\frac{2n-4}{4n^2+2n+3} \to 0$$

при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{\dfrac{4n^2+2n+3}{2n-4}} = e.$$

2. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-4)(1-2n)}{4n^2+2n+3} = -1,$$

то окончательно имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n} = e^{-1}.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n} = e^{-1}.$

Условия задач. *Вычислить пределы.*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)^{n}.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+4}{2n+3}\right)^{n+1}.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^{n^2}.$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n+3}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}.$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+7}{n+5}\right)^{n+3}.$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-2n}{3n^2-2n+5}\right)^{n+2}.$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+1}\right)^{3n^2}.$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+3}{n^3-2}\right)^{n-n^3}.$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{3n^2+1}.$

Ответы. 1. e^3. 2. $\sqrt{e}$. 3. e. 4. e. 5. e^{-2}. 6. e^2. 7. 1. 8. e^6. 9. e^{-5}. 10. $+\infty$.

3.5. Понятие предела функции

Постановка задачи. *Пользуясь определением предела функции в точке, доказать, что*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

План решения.

1. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \qquad 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это значит, что $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ имеет решение $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$.

2. Для того чтобы найти $\delta(\varepsilon)$, сначала найдем множество M такое, что

$$x \in M \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

т.е. решим неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Затем найдем $\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow x \in M.$$

Тогда будем иметь

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow x \in M \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Записываем ответ в виде: $\forall \varepsilon > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример. Доказать, что

$$\lim_{x \to 1/3} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} = 8.$$

Решение.

1. Число 8 называется пределом функции $f(x) = \dfrac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3}$ в точке $x = 1/3$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad 0 < \left| x - \frac{1}{3} \right| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} - 8 \right| < \varepsilon.$$

2. Для того чтобы найти $\delta(\varepsilon)$, сначала найдем множество M такое, что

$$x \in M \Longrightarrow \left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} - 8 \right| < \varepsilon,$$

т.е. решим неравенство

$$\left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} - 8 \right| < \varepsilon.$$

Затем найдем $\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$0 < \left|x - \frac{1}{3}\right| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow x \in M.$$

Тогда будем иметь

$$0 < \left|x - \frac{1}{3}\right| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow x \in M \Longrightarrow \left|\frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} - 8\right| < \varepsilon.$$

3. Решаем неравенство:

$$\left|\frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} - 8\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow |15x + 3 - 8| < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{15} < x < \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{15}$$

(так как в определении предела функции в точке $x \neq 1/3$, т.е. $x - 1/3 \neq 0$, то можно сократить дробь на множитель $x - 1/3$). Таким образом,

$$x \in M = \left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{15}, \frac{1}{3}\right) \bigcup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{15}\right) \Longrightarrow \left|\frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} - 8\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, если

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{15},$$

то

$$0 < \left|x - \frac{1}{3}\right| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow x \in \left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{15}, \frac{1}{3}\right) \bigcup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{15}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} - 8\right| < \varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{x \to 1/3} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} = 8.$$

Ответ. $\forall \varepsilon > 0 \qquad 0 < \left|x - \frac{1}{3}\right| < \frac{\varepsilon}{15} \Longrightarrow \left|\frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} - 8\right| < \varepsilon.$

Условия задач. *Пользуясь определением предела функции в точке, доказать равенства.*

1. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+11x+15}{x+3}=-1.$

2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+2x-8}{x+2}=-10.$

3. $\lim\limits_{x\to-1/2}\dfrac{6x^2+5x-1}{x+1/2}=-1.$

4. $\lim\limits_{x\to-1/3}\dfrac{9x^2+12x+3}{x+1/3}=6.$

5. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{x+1}=-5.$

6. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5.$

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2-9x+3}{x-1}=3.$

8. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x^2-15x+9}{x-3}=9.$

9. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{6x^2+20x+6}{x+3}=-16.$

10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-3x-2}{x-1}=7.$

Ответы. 1. $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/2$. 2. $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/3$. 3. $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/6$. 4. $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/9$. 5. $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/3$. 6. $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$. 7. $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/6$. 8. $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/4$. 9. $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/6$. 10. $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/5$.

3.6. Понятие непрерывности функции в точке

Постановка задачи. *Пользуясь определением, доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a.*

План решения.

1. Вычисляем $f(a)$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=a$, если

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta(\varepsilon)>0:\quad |x-a|<\delta(\varepsilon)\Longrightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Это значит, что $\forall\varepsilon>0$ неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ имеет решение $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$.

2. Для того чтобы найти $\delta(\varepsilon)$, сначала найдем множество M такое, что

$$x\in M\Longrightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon,$$

т.е. решим неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Затем найдем $\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|x-a|<\delta(\varepsilon)\Longrightarrow x\in M.$$

Тогда будем иметь

$$|x-a| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow x \in M \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Это означает, что $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

Записываем ответ в виде: $\forall \varepsilon > 0 \quad |x-a| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Пример. Пользуясь определением, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 + 5$ непрерывна в точке $a = 8$.

Решение.
1. Вычисляем $f(8) = 325$.
Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = 8$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad |x-8| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon.$$

Это значит, что $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $|f(x) - 325)| < \varepsilon$ имеет решение $0 < |x-8| < \delta(\varepsilon)$.

2. Для того чтобы найти $\delta(\varepsilon)$, сначала найдем множество M такое, что $x \in M \Rightarrow |5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon$, т.е. решим неравенство $|5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon$, затем найдем $\delta(\varepsilon)$ такое, что $|x - 8| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Rightarrow x \in M$. Тогда будем иметь

$$|x-8| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow x \in M \Longrightarrow |5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon.$$

3. Решаем неравенство (считая, что $\varepsilon < 320$)

$$|5x^2 - 320| < \varepsilon \Longleftrightarrow 64 - \frac{\varepsilon}{5} < x^2 < 64 + \frac{\varepsilon}{5} \Longleftrightarrow \sqrt{64 - \frac{\varepsilon}{5}} < x < \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}}.$$

Таким образом,

$$x \in M = \left(\sqrt{64 - \frac{\varepsilon}{5}}, \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}}\right) \Longrightarrow |5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon.$$

Следовательно, если

$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{8 - \sqrt{64 - \frac{\varepsilon}{5}}, \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}} - 8\right\} = \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}} - 8,$$

то

$$|x-8| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow x \in \left(\sqrt{64 - \frac{\varepsilon}{5}}, \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}}\right) \Longrightarrow |5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon,$$

т.е. $f(x) = 5x^2 + 5$ непрерывна в точке $x = 8$.

Ответ. $\forall\varepsilon > 0 \quad |x - 8| < \sqrt{64 + \dfrac{\varepsilon}{5}} - 8 \Longrightarrow |5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon.$

Условия задач. *Пользуясь определением, доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a.*

1. $f(x) = 4x^2 - 1$,	$a = 2$.	2. $f(x) = 3x^2 - 2$,	$a = 3$.
3. $f(x) = -x^2 - 5$,	$a = 1$.	4. $f(x) = -5x^2 - 7$,	$a = 2$.
5. $f(x) = -4x^2 - 6$,	$a = 3$.	6. $f(x) = -3x^2 + 8$,	$a = 4$.
7. $f(x) = 2x^2 + 5$,	$a = 2$.	8. $f(x) = 5x^2 + 2$,	$a = 6$.
9. $f(x) = 4x^2 + 1$,	$a = 8$.	10. $f(x) = 2x^2 - 1$,	$a = 7$.

Ответы. 1. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{4 + \varepsilon/4} - 2$. 2. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{9 + \varepsilon/3} - 3$. 3. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{1 + \varepsilon} - 1$. 4. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{4 + \varepsilon/5} - 2$. 5. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{9 + \varepsilon/4} - 3$. 6. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{16 + \varepsilon/3} - 4$. 7. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{4 + \varepsilon/2} - 2$. 8. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{36 + \varepsilon/5} - 6$. 9. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{64 + \varepsilon/4} - 8$. 10. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{49 + \varepsilon/2} - 7$.

3.7. Вычисление $\lim_{x\to a}[P_n(x)/Q_m(x)]$

Постановка задачи. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

План решения.

1. Если $Q_m(a) \neq 0$, то функция $P_n(x)/Q_m(x)$ непрерывна в точке a и

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

Если $Q_m(a) = 0$ и $P_n(a) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \infty.$$

Если $Q_m(a) = 0$ и $P_n(a) = 0$, то, разлагая многочлены на множители, получаем

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{(x-a)P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_{m-1}(x)},$$

где $Q_{m-1}(a) \neq 0$ и $P_{n-1}(a) \neq 0$.

2. Поскольку в определении предела функции при $x \to a$ аргумент не может принимать значение, равное a, то в последнем случае можно сократить множитель $x - a$. Получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_{m-1}(x)} = \frac{P_{n-1}(a)}{Q_{m-1}(a)}.$$

Замечание. Если a является кратным корнем многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, то $P_n(x) = (x-a)^k P_{n-k}(x)$, $\quad Q_m(x) = (x-a)^l Q_{m-l}(x)$ и

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{(x-a)^k P_{n-k}(x)}{(x-a)^l Q_{m-l}(x)},$$

где $Q_{m-l}(a) \neq 0$ и $P_{n-k}(a) \neq 0$.

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}.$$

Решение.

1. Выражение под знаком предела (рациональная дробь) является отношением двух бесконечно малых функций при $x \to 3$.

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9} = \frac{(x-3)^2(x+2)}{(x-3)^2(x+1)}.$$

2. Поскольку в определении предела функции при $x \to 3$ аргумент не может принимать значение, равное 3, то можно сократить множитель $(x-3)^2$. Получаем

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9} = \lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+1} = \frac{5}{4}.$$

Ответ. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9} = \frac{5}{4}.$

Условия задач. *Вычислить пределы.*

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2-x-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^4-x^3+x-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2+2x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+5x^2+6x}$.

7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-2x^2+2x-4}$.

8. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+x^3+2x+2}{x^2-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{2x^2-x-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-2x^2+x-2}$.

Ответы. 1. 0. 2. 2/3. 3. 0. 4. 2. 5. 1. 6. −4/3. 7. 0. 8. −1/2. 9. 1. 10. 7/3.

3.8. Вычисление $\lim_{x\to0}[f(x)/g(x)]$

Постановка задачи. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые функции в точке $x=0$.

План решения. Бесконечно малые функции, стоящие в числителе и знаменателе, можно заменить на им эквивалентные (табличные).

Если $f(x)$, $f_1(x)$, $g(x)$, $g_1(x)$ — бесконечно малые функции в точке $x=0$ такие, что $f(x)\sim f_1(x)$ и $g(x)\sim g_1(x)$ в точке $x=0$, и существует $\lim_{x\to0}f_1(x)/g_1(x)$, то существует $\lim_{x\to0}f(x)/g(x)$, причем

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}.$$

Решение. Выражение под знаком предела является отношением двух бесконечно малых в точке $x = 0$, так как

$$\lim_{x\to 0}(2x\sin x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0.$$

Бесконечно малые, стоящие в числителе и знаменателе, заменяем на эквивалентные:

$$2x\sin x \sim 2x\cdot x, \quad x\to 0,$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x\to 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{x^2/2} = 4.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x} = 4.$

Условия задач. *Вычислить пределы.*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+6x}{\sin 3x}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\ln(1+x)}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 5x-\cos 3x}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{e^{2x^2}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{3\operatorname{arctg} 2x}.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{e^{2x}-1}.$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}.$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1-2x)}.$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-2x)-1}.$

Ответы. 1. $2/3$. 2. 2. 3. $\ln 5$. 4. $-1/4$. 5. 1. 6. $1/12$. 7. 1. 8. $1/4$. 9. -1. 10. $-e$.

3.9. Вычисление $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)]$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые функции в точке $x=a$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Нужно заменить $f(x)$ и $g(x)$ на эквивалентные им бесконечно малые функции. Но таблица эквивалентных бесконечно малых функций составлена для точки $x=0$. Поэтому сначала сделаем замену переменной $x-a=t$ и будем искать предел при $t\to 0$.

2. Преобразуем выражение под знаком предела, пользуясь алгебраическими и тригонометрическими формулами, и заменяем в произведении и частном бесконечно малые функции эквивалентными.

ПРИМЕР. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Поскольку

$$\lim_{x\to\pi}[\cos 3x-\cos x]=0,\qquad \lim_{x\to\pi}\operatorname{tg}^2 2x=0,$$

то выражение под знаком предела является отношением двух бесконечно малых функций при $x\to\pi$. Нужно заменить эти бесконечно малые функции эквивалентными. Для этого сначала сделаем замену переменной $x-\pi=t$:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 3(\pi+t)-\cos(\pi+t)}{\operatorname{tg}^2 2(\pi+t)}.$$

2. Используя тригонометрические формулы и заменяя в произведении и частном бесконечно малые функции эквивалентными, получим

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos 3(\pi+t)-\cos(\pi+t)}{\operatorname{tg}^2 2(\pi+t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos 3t}{\operatorname{tg}^2 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin 2t\sin(-t)}{\operatorname{tg}^2 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cdot 2t\cdot t}{4t^2}=1.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}=1.$

Условия задач. *Вычислить пределы.*

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}.$

2. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 5x}{\sin^2 3x}.$

3. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{1+\cos 2\pi x}{\operatorname{tg}^2 2\pi x}.$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 3\pi x}{\sin 8\pi x}.$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{\ln(x-1)}.$

6. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}.$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{\sin\pi x}.$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{\sin\pi x}.$

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x}.$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-4}{\sin\pi x}.$

Ответы. 1. 3. 2. 5/18. 3. 1/2. 4. 3/8. 5. 3/2. 6. 3/5. 7. $3/\pi$. 8. $-1/(4\pi)$. 9. $-5/3$. 10. $(4\ln 2)/\pi$.

3.10. Вычисление $\lim_{x\to 0}[u(x)^{v(x)}]$

Постановка задачи. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to 0}[u(x)^{v(x)}],$$

где $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=1$ *и* $\lim\limits_{x\to 0}v(x)=\infty.$

План решения.

1. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}.$$

2. Поскольку показательная функция e^x непрерывна, то можно перейти к пределу под знаком этой функции. Имеем

$$\lim_{x\to 0}[u(x)^{v(x)}]=\lim_{x\to 0}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim_{x\to 0}[v(x)\ln u(x)]}.$$

3. Вычисляем предел показателя

$$\lim_{x\to 0}\,[v(x)\ln u(x)],$$

заменяя бесконечно малые функции эквивалентными.

4. Записываем окончательный ответ.

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}\right)^{1/\sin^3 x}.$$

Решение. При $x\to 0$ выражение под знаком предела представляет собой степень, основание которой стремится к единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}=1,$$

а показатель — к бесконечности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^3 x}=\infty.$$

1. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\left(\frac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}\right)^{1/\sin^3 x}=\exp\left(\frac{1}{\sin^3 x}\ln\frac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}\right).$$

2. Поскольку показательная функция e^x непрерывна, то можно перейти к пределу под знаком этой функции. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}\right)^{1/\sin^3 x}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^3 x}\ln\frac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}\right).$$

3. Вычисляем предел показателя

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^3 x}\ln\frac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}.$$

Преобразуя выражение под знаком предела к виду

$$\frac{1}{\sin^3 x}\ln\left[1+\frac{x^2 5^x((2/5)^x-1)}{1+x^2 5^x}\right]$$

и заменяя бесконечно малые функции эквивалентными, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^3 x}\ln\left[1+\frac{x^2 5^x((2/5)^x-1)}{1+x^2 5^x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\,\frac{x^2 5^x((2/5)^x-1)}{1+x^2 5^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\,\frac{x^2 5^x\,x\ln(2/5)}{1+x^2 5^x}=\ln\frac{2}{5}.$$

4. Окончательно получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}\right)^{1/\sin^3 x}=e^{\ln(2/5)}=\frac{2}{5}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}\right)^{1/\sin^3 x}=\dfrac{2}{5}.$

Условия задач. *Вычислить пределы.*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x3^x}{1+x2^x}\right)^{1/x^2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2 3^x}{1+x^2 4^x}\right)^{1/\mathrm{tg}^3 x}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos 3x}{1+\sin x\cos 2x}\right)^{1/\sin^3 x}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{1/\sin^2 x}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(2-5^{\sin^2 x})^{1/x^2}.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/(x\sin x)}.$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{1/\ln\cos x}.$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cos 2x}{1+x\cos x}\right)^{1/x^3}.$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{1/\ln(1+2x^2)}.$

Ответы. 1. $3/2$. 2. $3/4$. 3. $e^{-5/2}$. 4. $e^{1/2}$. 5. $1/5$. 6. $e^{-1/2}$. 7. $e^{-1/2}$. 8. e^{-2}. 9. $e^{-3/2}$. 10. $e^{1/4}$.

3.11. Вычисление $\lim_{x\to a}\left[u(x)^{v(x)}\right]$

Постановка задачи. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to a}\left[u(x)^{v(x)}\right],$$

где $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ *и* $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$.

План решения.

1. Чтобы использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых, сделаем замену переменной $t = x - a$ (тогда $t \to 0$ при $x \to a$) и преобразуем выражение под знаком предела:

$$u(x)^{v(x)} = u_1(t)^{v_1(t)} = e^{v_1(t)\ln u_1(t)}.$$

2. Поскольку показательная функция e^x непрерывна, то можно перейти к пределу под знаком этой функции. Имеем

$$\lim_{x\to a}\left[u(x)^{v(x)}\right] = e^{\lim_{t\to 0}[v_1(t)\ln u_1(t)]}.$$

3. Вычисляем предел показателя

$$\lim_{t\to 0}[v_1(t)\ln u_1(t)],$$

заменяя бесконечно малые функции эквивалентными.

4. Записываем окончательный ответ.

Пример. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\ln(3+2x)/\ln(2-x)}.$$

Решение. При $x \to 1$ выражение под знаком предела представляет собой степень, основание которой стремится к единице:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{x} = 1,$$

а показатель — к бесконечности:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)} = \infty.$$

1. Чтобы использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых, сделаем замену переменной $t = x - 1$ (тогда $t \to 0$ при $x \to 1$) и преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\ln(3+2x)/\ln(2-x)} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{2t+1}{t+1}\right)^{\ln(5+2t)/\ln(1-t)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\exp\left[\frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)}\ln\frac{2t+1}{t+1}\right].$$

2. Поскольку показательная функция e^x непрерывна, то можно перейти к пределу под знаком этой функции. Имеем

$$\lim_{t\to 0}\exp\left[\frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)}\ln\frac{2t+1}{t+1}\right] = \exp\left[\lim_{t\to 0}\frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)}\ln\frac{2t+1}{t+1}\right].$$

3. Вычислим предел показателя, заменяя бесконечно малые функции эквивалентными:

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)}\ln\frac{2t+1}{t+1}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)}\ln\left(1+\frac{t}{t+1}\right)\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t\ln(5+2t)}{-t(t+1)} = -\ln 5.$$

4. Окончательно получаем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\ln(3+2x)/\ln(2-x)} = e^{-\ln 5} = \frac{1}{5}.$$

Ответ. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\ln(3+2x)/\ln(2-x)} = \frac{1}{5}.$

Условия задач. *Вычислить пределы.*

1. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x}{2}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/4)}$.

2. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin x}{\sin 1}\right)^{1/(x-1)}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3}\right)^{1/(x-3)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}(3e^{x-1}-2)^{x/(x-1)}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{1/\sin^2 x}$.

7. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg} x)^{1/\cos 2x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{1/\ln(2-x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x}{x}\right)^{1/\ln(3-x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{3}{x}\right)^{1/\ln(4-x)}$.

Ответы. 1. $e^{2/\pi}$. 2. $e^{\operatorname{ctg} 1}$. 3. $e^{-\operatorname{tg} 3}$. 4. $e^{2/\pi}$. 5. e^{3}. 6. $e^{-1/2}$. 7. e^{-1}. 8. e^{2}. 9. e. 10. $e^{1/3}$.

3.12. Вычисление $\lim_{x\to a} F(u(x)v(x)+f(x))$

Постановка задачи. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to a} F(u(x)v(x)+f(x)),$$

где $F(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, $u(x)$ — бесконечно малая функция в точке $x=a$ и $v(x)$ — функция, ограниченная в некоторой окрестности точки $x=a$.

План решения.

1. Так как $F(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то по теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции имеем

$$\lim_{x\to a} F(u(x)v(x)+f(x)) = F\big(\lim_{x\to a}(u(x)v(x)+f(x))\big).$$

2. Поскольку $u(x)$ — бесконечно малая функция в точке $x=a$ и $v(x)$ — функция, ограниченная в некоторой окрестности точки $x=a$, то $u(x)v(x)$ — бесконечно малая функция в точке $x=a$, т.е.

$$\lim_{x\to a} u(x)v(x) = 0.$$

3. Так как $f(x)$ непрерывна в точке a, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Используя основные свойства предела функции в точке, получаем

$$\lim_{x\to a} F(u(x)v(x)+f(x)) = F(f(a)).$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+8\cos x}.$$

Решение.

1. Так как функция $y = \sqrt[3]{x}$ непрерывна при всех x, то, переходя к пределу под знаком непрерывной функции, получаем

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+8\cos x} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0}\left[x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+8\cos x\right]}.$$

2. Так как x — бесконечно малая функция в точке $x = 0$, а $2+\sin(1/x)$ — функция, ограниченная в окрестности точки $x = 0$, то $x\,(2+\sin(1/x))$ — бесконечно малая функция в точке $x = 0$, т.е.

$$\lim_{x\to 0} x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

3. Так как $\cos x$ непрерывна в точке $x = 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1,$$

и, используя свойства предела функции в точке, получаем

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+8\cos x} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0} x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+8\lim_{x\to 0}\cos x} = 2.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)+8\cos x} = 2.$

Условия задач. *Вычислить пределы.*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{9\cos 2x + 2x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\sqrt{4\sin x + (2x-\pi)\sin\dfrac{x^2}{2x-\pi}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\cos x + \operatorname{arctg} x\cos^2\dfrac{1}{x^2}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos x + \ln(1+2x)\sin\dfrac{1}{x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos^2 x + (e^{2x}-1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[(e^{x^3}-\cos x)\cos\dfrac{2}{x} + \operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\sin x + (e^{\sin^2 x}-1)\cos\dfrac{1}{x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\ln(x+2) + \sin(4-x^2)\cos\dfrac{x+2}{x-2}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\left(\arccos x + \sin\dfrac{x-1}{x+1}\cos\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(3 + \operatorname{arctg} x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

Ответы. 1. 3. 2. 2. 3. 1. 4. 2. 5. 2. 6. 0. 7. 2. 8. $\ln 2$. 9. 0. 10. $\ln 3$.

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

При изучении темы ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ вы познакомитесь на примерах с понятиями производной и дифференциала функции одной переменной, научитесь вычислять производные, используя правила дифференцирования суммы, произведения, частного и сложной функции, научитесь дифференцировать функции, заданные параметрически, вычислять производные высших порядков, а также применять производные и дифференциалы в приближенных вычислениях и при решении геометрических задач.

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете вычислить пределы, выполнить численные расчеты, а также вычислить производные любого порядка и проверить правильность полученных вами результатов.

4.1. Понятие производной

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Исходя из определения, найти производную функции $f(x)$ в точке $x = 0$.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. По определению

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

(Напомним, что при вычислении предела $x \to 0$, но $x \neq 0$.)

2. Вычисляем предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

3. Если предел существует и равен A, то $f'(0) = A$, если предел не существует, то $f'(0)$ не существует.

Пример. Исходя из определения, найти производную функции

$$f(x)=\begin{bmatrix} 1-\cos\left(x\,\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{bmatrix}$$

в точке $x=0$.

Решение.

1. По определению

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x\,\sin(1/x))-0}{x}.$$

2. Так как $\sin(1/x)$ — ограниченная, а x — бесконечно малая функции при $x\to 0$, то по теореме о произведении бесконечно малой функции на ограниченную $x\sin(1/x)\to 0$ при $x\to 0$. Заменяя в числителе бесконечно малую функцию эквивалентной и снова используя упомянутую теорему, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x\,\sin(1/x))-0}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,\sin^2(1/x)}{2x}=0.$$

3. Таким образом, предел существует и равен нулю. Следовательно, $f'(0)=0$.

Ответ. $f'(0)=0$.

Условия задач. *Найти производную функции $f(x)$ в точке $x=0$.*

1. $$f(x)=\begin{bmatrix} \sin\left(x^3+x^2\,\sin\dfrac{2}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{bmatrix}$$

2. $$f(x)=\begin{bmatrix} \operatorname{tg}\left(x^2\,\cos\dfrac{1}{9x}\right)+2x, & x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{bmatrix}$$

3. $$f(x)=\begin{bmatrix} \arcsin\left(x\,\cos\dfrac{1}{5x}\right), & x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{bmatrix}$$

4. $f(x)=\begin{cases} \ln\left(1-\operatorname{tg}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\right), & x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg}\left(x\sin\dfrac{3}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1+\ln\left(1+x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}-1, & x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} \sin\left(e^{x^2\sin(5/x)}-1\right), & x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} x^3\cos\dfrac{4}{3x}+3x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x-x^2\sin\dfrac{1}{3x}\right), & x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} \sin^2 x\cos\dfrac{5}{x}+2x, & x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$

Ответы. 1. 0. 2. 2. 3. Не существует. 4. 0. 5. Не существует. 6. 0. 7. 0. 8. 3. 9. 1. 10. 2.

4.2. Вычисление производных

Постановка задачи. *Найти производную функции* $y=f(x)$.

План решения. Задача решается в несколько этапов. На каждом этапе необходимо распознать тип функции и применить соответствующее правило дифференцирования.

Возможны следующие типы функций.

• Функция имеет вид $C_1u_1+C_2u_2+\ldots+C_nu_n$, где $u_1(x)$, $u_2(x),\ldots,u_n(x)$ — некоторые функции и $C_1,C_2,\ldots,C_n$ — некоторые постоянные. Используем формулу производной линейной комбинации

$$(C_1u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_nu_n)' = C_1u_1' + C_2u_2' + \ldots + C_nu_n'.$$

• Функция имеет вид $u \cdot v$. Используем формулу производной произведения

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

• Функция имеет вид $\dfrac{u}{v}$. Используем формулу производной частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

• Функция имеет вид $u(v(x))$. Используем формулу производной сложной функции

$$u(v(x))' = u'(v) \cdot v'(x).$$

• Функция имеет вид $u(x)^{v(x)}$. Производная такой функции вычисляется с помощью формулы

$$u(x)^{v(x)} = e^{v \ln u}.$$

Переход от этапа к этапу совершается до тех пор, пока под каждым знаком производной не окажется табличная функция.

Пример. Найти производную функции

$$y = \frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{15\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение.

1. Функция $y(x)$ имеет вид

$$\frac{1}{15}\frac{u}{v},$$

где $u(x) = 3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2$ и $v(x) = \sqrt{1+x^2}$. Используя формулу для производной частного, получаем

$$y' =$$

$$= \frac{1}{15}\frac{(3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2)'\sqrt{1+x^2} - (3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2)(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2}.$$

2. Функция $u(x) = 3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2$ является линейной комбинацией табличных функций. Поэтому

$$(3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2)' = 18x^5 + 16x^3 - 2x.$$

3. Функция $v(x) = \sqrt{1+x^2}$ имеет вид

$$v(x) = u_1(v_1(x)),$$

где $u_1 = \sqrt{v_1}$ и $v_1(x) = 1 + x^2$. Используя формулу для производной сложной функции, получаем

$$v'(x) = (\sqrt{v_1})'\,(1+x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{v_1}}\,2x = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Ответ. $y' =$

$$= \frac{1}{15}\,\frac{(18x^5+16x^3-2x)\sqrt{1+x^2} - (3x^6+4x^4-x^2-2)\,\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\,.$$

Условия задач. *Найти производные заданных функций.*

1. $y = 2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$. 2. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 3. $y = \ln^2(1-\cos x)$.

4. $y = \ln(\arcsin\sqrt{x})$. 5. $y = \dfrac{3^x(\sin x + \cos x \ln 3)}{1+\ln^2 3}$. 6. $y = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^2 2x}$.

7. $y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 8. $y = \operatorname{arctg} 3^{\sqrt{x}}$. 9. $y = \ln(1+\sqrt{\operatorname{th} x})$.

10. $y = \ln\sin 3 - \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Ответы. 1. $2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,\dfrac{\ln 2}{2\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}$. 2. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 3. $\dfrac{2\sin x\ln(1-\cos x)}{1-\cos x}$.

4. $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}\arcsin\sqrt{x}}$. 5. $3^x\cos x$. 6. $\dfrac{2\operatorname{ch}^2 2x - 4\operatorname{sh}^2 2x}{\operatorname{ch}^3 2x}$. 7. $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}$.

8. $\dfrac{3^{\sqrt{x}}\ln 2}{(1+3^{2\sqrt{x}})2\sqrt{x}}$. 9. $\dfrac{1}{2(\operatorname{th} x + \sqrt{\operatorname{th}}\,x)\operatorname{ch}^2 x}$. 10. $\dfrac{\cos x(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}$.

4.3. Уравнение касательной и нормали

Постановка задачи. *Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой a.*

План решения. Если функция $f(x)$ в точке a имеет конечную производную, то уравнение касательной имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{1}$$

Если $f'(a) = \infty$, то уравнение касательной имеет вид $x = a$.

Если $f'(a) \neq 0$, то уравнение нормали имеет вид

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a). \tag{2}$$

Если $f'(a) = 0$, то уравнение нормали имеет вид $x = a$.

1. Находим значение $f(a)$.

2. Находим производную $f'(a)$.

3. Подставляя найденные значения $f(a)$ и $f'(a)$ в (1) и (2), получаем уравнения касательной и нормали.

Пример. Составить уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = 6\sqrt[3]{x} - \frac{16}{3}\sqrt[4]{x}$$

в точке с абсциссой $a = 1$.

Решение.

1. Находим $f(1) = 2/3$.

2. Находим производную $f'(1) = 2/3$. Так как $f'(1) \neq 0$ и $f'(1) \neq \infty$, то воспользуемся уравнениями (1) и (2).

3. Подставляя найденные значения $f(a) = 2/3$ и $f'(a) = 2/3$ в (1) и (2), получаем уравнения касательной и нормали:

$$y = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(x - 1), \quad y = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}(x - 1).$$

Ответ. Уравнение касательной: $2x - 3y = 0$. Уравнение нормали: $9x + 6y - 13 = 0$.

Условия задач. *Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой a.*

1. $y = x - x^2, \quad a = 1.$
2. $y = x^2 + x + 1, \quad a = -1.$
3. $y = x^3 + x, \quad a = 1.$
4. $y = \sqrt{x} - 2, \quad a = 4.$
5. $y = x^2 + \sqrt{x^3}, \quad a = 1.$
6. $y = \sqrt[3]{x^2} - 9, \quad a = -27.$
7. $y = \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}, \quad a = 9.$
8. $y = 32\sqrt[4]{x} - x, \quad a = 16.$
9. $y = x^2 - x - 1, \quad a = 1.$
10. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2}, \quad a = 2.$

Ответы. 1. $x+y-1=0$, $x-y-1=0$. 2. $x+y=0$, $x-y-2=0$. 3. $4x-y-2=0$, $x+4y-9=0$. 4. $x-4y-4=0$, $4x+y-16=0$. 5. $7x-2y-3=0$, $2x+7y-16=0$. 6. $2x+9y+54=0$, $9x-2y+243=0$. 7. $2x-3y-33=0$, $3x+2y-17=0$. 8. $y-48=0$, $x-16=0$. 9. $x-y-2=0$, $x+y=0$. 10. $2y-1=0$, $x-2=0$.

4.4. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Постановка задачи. *Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.*

План решения. Если приращение $\Delta x = x - a$ аргумента x мало по абсолютной величине, то

$$f(x) = f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x. \tag{1}$$

1. Выбираем точку a, ближайшую к x и такую, чтобы легко вычислялись значения $f(a)$ и $f'(a)$.

2. Вычисляем $\Delta x = x - a$, $f(a)$ и $f'(a)$.

3. По формуле (1) вычисляем $f(x)$.

Пример. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y = \sqrt{x^2 + 5}$ в точке $x = 1,97$.

Решение.

1. Ближайшая к 1,97 точка, в которой легко вычислить значения $f(a)$ и $f'(a)$, — это точка $a = 2$.

2. Вычисляем:

$$\Delta x = x - a = 1,97 - 2 = -0,03,$$

$$f(a) = f(2) = 3, \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}, \quad f'(a) = y'(2) = \frac{2}{3}.$$

3. По формуле (1) имеем

$$f(1,97) \approx 3 + \frac{2}{3}(-0,03) = 2,98.$$

Ответ. $f(1,97) \approx 2,98$.

Условия задач. *Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.*

1. $y = x^5, \quad x = 2,001.$
2. $y = \sqrt{4x-3}, \quad x = 0,98.$
3. $y = \sqrt{x^3}, \quad x = 1,02.$
4. $y = x^3, \quad x = 2,999.$
5. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1,03.$
6. $y = \sqrt{x}, \quad x = 3,996.$
7. $y = \sqrt{1+\sin x}, \quad x = 0,02.$
8. $y = \sqrt{2x+\cos x}, \quad x = 0,01.$
9. $y = \sqrt[3]{2x - \sin\dfrac{\pi x}{2}}, \quad x = 1,03.$
10. $y = \sqrt{4x+1}, \quad x = 1,97.$

Ответы. 1. 32,08. 2. 0,96. 3. 1,03. 4. 26,073. 5. 1,01. 6. 1,999. 7. 1,01. 8. 1,01. 9. 1,02. 10. 2,98.

4.5. Логарифмическое дифференцирование

Постановка задачи. *Найти производную функции вида*

$$y = u_1(x)^{v_1(x)} \ldots u_n(x)^{v_n(x)} w_1(x) \ldots w_m(x).$$

План решения.

1. Логарифм данной функции имеет вид

$$\ln y = v_1(x)\ln u_1(x) + \ldots + v_n(x)\ln u_n(x) + \ln w_1(x) + \ldots + \ln w_m(x).$$

2. Продифференцировав обе части этого равенства, получаем

$$\frac{y'}{y} = \left(v_1'\ln u_1 + \frac{v_1}{u_1}u_1'\right) + \ldots + \left(v_n'\ln u_n + \frac{v_n}{u_n}u_n'\right) + \frac{w_1'}{w_1} + \ldots + \frac{w_n'}{w_n}.$$

Поэтому

$$y' = y\left[\left(v_1'\ln u_1 + \frac{v_1}{u_1}u_1'\right) + \ldots + \left(v_n'\ln u_n + \frac{v_n}{u_n}u_n'\right) + \frac{w_1'}{w_1} + \ldots + \frac{w_n'}{w_n}\right].$$

3. Подставляя в последнее равенство выражение для y, получаем ответ.

Пример. Найти производную функции $y = x^{e^x}x^9$.

Решение.

1. Логарифм данной функции имеет вид

$$\ln y = \ln(x^{e^x}x^9) = e^x\ln x + 9\ln x.$$

2. Продифференцировав обе части этого равенства, получаем

$$\frac{y'}{y} = e^x\ln x + e^x\frac{1}{x} + \frac{9}{x}.$$

Поэтому

$$y' = y\left(e^x\ln x + \frac{e^x+9}{x}\right),$$

3. Подставляя в последнее равенство выражение для y, получаем ответ.

Ответ. $y' = x^{e^x}x^9\left(e^x\ln x + \dfrac{e^x+9}{x}\right)$.

Условия задач. *Найти производные заданных функций.*

1. $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$.

2. $y = x^x 3^{\sqrt{x}}$.

3. $y = x^{e^{\sqrt{x}}}$. 4. $y = (\operatorname{arctg} x)^x$.

5. $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$. 6. $y = x^{\sqrt{x}}\, 2^{\sin x}$.

7. $y = x^{2^{\cos x}}$. 8. $y = x^{\operatorname{tg} x}$.

9. $y = (\sin 3x)^{\ln \sin 3x}$. 10. $y = x^{2^x}\, 3^x$.

Ответы.

1. $y' = y\left(\dfrac{\ln \sin x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x}\right)$. 2. $y' = y\left(\ln x + 1 + \dfrac{\ln 3}{2\sqrt{x}}\right)$.

3. $y' = y\, e^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}\right)$. 4. $y' = y\left[\ln \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right]$.

5. $y' = y\left(\dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{x} + \dfrac{\ln x}{\sin x \cos x}\right)$. 6. $y' = y\left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \cos x \ln 2\right)$.

7. $y' = y\, 2^{\cos x}\left(-\sin x \ln 2 + \dfrac{1}{x}\right)$. 8. $y' = y\left(\dfrac{\ln x}{\cos^2 x} + \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$.

9. $y' = y\; 6 \ln \sin 3x \operatorname{ctg} 3x$. 10. $y' = y\left(2^x \ln 2 \ln x + 2^x \dfrac{1}{x} + \ln 3\right)$.

4.6. Производная функции, заданной параметрически

Постановка задачи. *Найти производную функции, заданной параметрически.*

План решения. Если зависимость y от x задана посредством параметра t:

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

то зависимость y' от x задается посредством параметра t формулами

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y' = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}. \end{cases} \tag{1}$$

Вычисляем $f'(t)$ и $g'(t)$, подставляем в формулу (1) и записываем ответ.

Пример. Найти производную y'_x, если

$$\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}), \\ y = \sqrt{1 + t^2} - \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{t}. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t + \sqrt{1 + t^2}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} - \frac{t}{1 + \sqrt{1 + t^2}} \frac{\dfrac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} - (1 + \sqrt{1 + t^2})}{t^2} = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (1), получаем

$$\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}), \\ y' = \dfrac{1 + t^2}{t}. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}), \\ y' = \dfrac{1 + t^2}{t}. \end{cases}$

Условия задач. *Найти производные функций, заданных параметрически.*

1. $\begin{cases} x = t^2 + 1/t^3, \\ y = \sin\left(t^3/3 + 3t\right). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 2t}, \\ y = \sqrt[3]{t - 1}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \ln(t^2 + 1), \\ y = \sqrt{t^2 + 1}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t}, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \ln(1 - t^2), \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \ln \sin t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

Ответы.

1. $\begin{cases} x = (t^2+1)/t^3, \\ y' = -t^4 \cos\left(t^3/3 + 3t\right). \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 2t}, \\ y' = \sqrt{t^2-2t}/(3\sqrt[3]{(t-1)^5}). \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \ln(t^2+1), \\ y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t}, \\ y' = -2\sqrt{1-t}/\cos^2 t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y' = -\sqrt{1-t^2}(2t). \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y' = -\cos^2 t/\sin t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y' = -\operatorname{tg} t. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y' = \operatorname{ctg}(t/2). \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \ln \sin t, \\ y' = -t \operatorname{tg} t/\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y' = -1/t. \end{cases}$

4.7. Касательная и нормаль к кривой, заданной параметрически

Постановка задачи. *Составить уравнения касательной и нормали к кривой*

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t) \end{cases}$$

в точке A, соответствующей значению параметра $t = t_0$.

План решения. Если функция $y(x)$ в точке a имеет конечную производную, то уравнение касательной имеет вид

$$y = y(a) + y'(a)(x-a). \tag{1}$$

Если $y'(a) = \infty$, то уравнение касательной имеет вид $x = a$.

Если $y'(a) \neq 0$, то уравнение нормали имеет вид

$$y = y(a) - \frac{1}{y'(a)}(x-a). \tag{2}$$

Если $y'(a) = 0$, то уравнение нормали имеет вид $x = a$.

1. Вычисляем координаты точки A:

$$\begin{cases} a = f(t_0), \\ y(a) = g(t_0). \end{cases}$$

2. Находим производную y' в точке касания при $t = t_0$:

$$y'(a) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\,.$$

3. Подставляем полученные значения в уравнения касательной (1) и нормали (2) и записываем ответ.

Пример. Составить уравнения касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$$

в точке A, соответствующей значению параметра $t = 0$.

Решение.

1. Вычисляем координаты точки A: $a = 2$, $y(a) = 1$.

2. Находим производную y' в точке A:

$$f'(0) = 2e^t\Big|_{t=0} = 2, \quad g'(0) = -e^{-t}\Big|_{t=0} = -1 \Rightarrow y'(0) = \frac{g'(0)}{f'(0)} = -\frac{1}{2}.$$

Поскольку $f'(0) \neq 0$ и $f'(0) \neq \infty$, то можно воспользоваться уравнениями (1) и (2).

3. Подставляем полученные значения в уравнения касательной (1):

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x-2),$$

и нормали (2):

$$y = 1 + 2(x-2).$$

Ответ. Уравнение касательной: $x + 2y - 4 = 0$. Уравнение нормали: $2x - y - 3 = 0$.

Условия задач. *Составить уравнения касательной и нормали к графикам функций, заданным параметрически.*

1. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad t_0 = \pi/2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = 2t - t^2, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = t - t^2, \\ y = t - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \quad t_0 = \pi/2. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \arcsin t, \quad t_0 = -1. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin^2 t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x = t\sin t + \cos t, \\ y = \sin t - t\cos t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

Ответы.

1. $2x - 2y - \pi + 4 = 0, \quad 2x + 2y - \pi = 0.$
2. $y - 1 = 0, \quad x - 3 = 0.$
3. $2x + 2y - 4 = 0, \quad 2x - 2y - 2 = 0.$
4. $2x - y = 0, \quad x + 2y = 0.$
5. $4x + 2\pi y - \pi^2 = 0, \quad \pi x - 2y + \pi = 0.$
6. $2x + 2y - \sqrt{2} = 0, \quad y - x = 0.$
7. $2x - 2y - \pi = 0, \quad 2x + 2y + \pi = 0.$
8. $2x - 4y + \pi - 2\ln 2 = 0, \quad 8x + 4y - \pi - 8\ln 2 = 0.$
9. $2x + y - 2 = 0, \quad x - 2y + 4 = 0.$
10. $4x - 4y - \pi\sqrt{2} = 0, \quad x + y - \sqrt{2} = 0.$

4.8. Производные высших порядков

Постановка задачи. *Найти производную n-го порядка функции* $y = f(x)$.

План решения.

Производной n-го порядка функции $y = f(x)$ называют производную от производной порядка $(n-1)$, т.е.

$$y^{(n)}(x) = y^{(n-1)}(x)'.$$

1. Дифференцируем функцию $y = f(x)$ последовательно несколько раз, пока не станет ясной формула для производной n-ого порядка.

2. Доказываем эту формулу методом математической индукции. Для этого проверяем, что она справедлива при $n = 1$, т.е. дает правильное значение f', и что дифференцирование выражения для $f^{(n)}$ эквивалентно замене n на $n + 1$.

Пример. Найти производную n-го порядка функции $y = 3^{2x+5}$.

Решение.

1. Найдем последовательно

$y'(x) = (3^{2x+1})' = 3^{2x+1}(\ln 3)2,$

$y''(x) = y'(x)' = (3^{2x+1}(\ln 3)2)' = 3^{2x+1}(\ln 3)^2 2^2,$

$y'''(x) = y''(x)' = (3^{2x+1}(\ln 3)^2 2^2)' = 3^{2x+1}(\ln 3)^3 2^3.$

Проанализировав эти выражения, делаем предположение, что

$$y^{(n)}(x) = 3^{2x+1}(\ln 3)^n 2^n.$$

2. Докажем эту формулу методом математической индукции. Проверим, что она справедлива при $n = 1$; т.е.

$$y^{(1)}(x) = 3^{2x+1}(\ln 3)2 = y'(x).$$

Дифференцирование $f^{(n)}$ эквивалентно замене n на $n+1$, т.е.

$$y^{(n)}(x)' = (3^{2x+1}(\ln 3)^n 2^n)' = 3^{2x+1}(\ln 3)^{n+1}2^{n+1} = y^{(n+1)}(x).$$

Ответ. $y^{(n)}(x) = 3^{2x+1}(2\ln 3)^n$.

Условия задач. *Найти производные n-го порядка заданных функций.*

1. $y = \sin 2x + \cos 3x$. 2. $y = \sin(3x+1) + \cos 2x$. 3. $y = 2^{3x}$.

4. $y = \ln(2x+4)$. 5. $y = \dfrac{x}{x+1}$. 6. $y = \dfrac{x+1}{2x+3}$.

7. $y = 3^{2x+1}$. 8. $y = \ln(3x+1)$. 9. $y = 5^{2x+4}$.

10. $y = \sqrt{x}$.

Ответы.

1. $y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right) + 3^n \cos\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

2. $y^{(n)} = 3^n \sin\left(3x + 1 + \dfrac{n\pi}{2}\right) + 2^n \cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

3. $y^{(n)} = 2^{3x}\,(3\ln 2)^n$. 4. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}2^n(n-1)!}{(2x+4)^n}$.

5. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}n!}{(x+1)^{n+1}}$. 6. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}2^{n-1}n!}{(2x+3)^{n+1}}$.

7. $y^{(n)} = 3^{2x+1}(2\ln 3)^n$. 8. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}3^n(n-1)!}{(3x+1)^n}$.

9. $y^{(n)} = 5^{2x+4}\,(2\ln 5)^n$. 10. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2^n-3)!!}{2^n\,(\sqrt{x})^{2n-1}}$.

4.9. Формула Лейбница

Постановка задачи. *Найти производную n-го порядка функции* $y = u(x)v(x)$.

План решения. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные до n-го порядка включительно, то справедливы следующие формулы:

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

$$(uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}, \tag{1}$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ и $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Формула (1) для n-й производной произведения называется *формулой Лейбница.*

Следовательно, для определения производной n-го порядка функции вида $y = u(x)v(x)$ нужно вычислить все производные (до n-го порядка включительно) каждой из функций $u(x)$ и $v(x)$, биномиальные коэффициенты C_n^k и воспользоваться формулой Лейбница.

Пример. Найти производную 4-го порядка функции

$$y = (x^3+2)e^{4x+3}.$$

Решение.

1. Применяем формулу Лейбница (1). В данном случае

$$n = 4, \quad u(x) = x^3 + 2, \quad v(x) = e^{4x+3}.$$

Имеем

$$u'(x) = 3x^2, \quad u''(x) = 6x, \quad u'''(x) = 6, \quad u^{(4)}(x) = 0,$$

$$v'(x) = 4e^{4x+3}, \quad v''(x) = 4^2 e^{4x+3}, \quad v'''(x) = 4^3 e^{4x+3}, \quad v^{(4)}(x) = 4^4 e^{4x+3}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (1), получим

$$y^{\text{IV}} = \left((x^3+2)e^{4x+3}\right)^{(4)} = 0 \cdot e^{4x+3} + 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot e^{4x+3} +$$

$$+\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}(6x)4^2 e^{4x+3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}(3x^2)4^3 e^{4x+3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(x^3+2)4^4 e^{4x+3} =$$

$$= 32e^{4x+3}(8x^3 + 24x^2 + 18x + 19).$$

Ответ. $y^{(4)} = 32e^{4x+3}(8x^3 + 24x^2 + 18x + 19)$.

Условия задач. *Найти производные указанного порядка заданных функций.*

1. $y = (x^2+1)\ln x, \quad y^{(5)} = ?$
2. $y = (x^3+2)\cos 2x, \quad y''' = ?$
3. $y = x^2 \sin(3x+1), \quad y''' = ?$
4. $y = (x^2+1)\cos 3x, \quad y^{(5)} = ?$
5. $y = (x^3+x)\ln x, \quad y''' = ?$
6. $y = (x^3+1)\ln(x+2), \quad y^{(5)} = ?$
7. $y = (x^2+1)2^x, \quad y^{(5)} = ?$
8. $y = \sin 2x \, \ln x, \quad y''' = ?$
9. $y = (x^2+1)e^{2x+1}, \quad y^{(5)} = ?$
10. $y = (x^3+2)3^{3x}, \quad y^{(4)} = ?$

Ответы.

1. $y^{(5)} = \dfrac{x^2+24}{x^5}$.

2. $y''' = (8x^3 - 36x + 16)\sin 2x - (36x^2 - 6)\cos 2x$.

3. $y''' = (18 - 27x^2)\cos(3x+1) - 54x\sin(3x+1)$.

4. $y^{(5)} = 810x\cos 3x - 27(9x^2 - 11)\sin 3x$.

5. $y''' = \dfrac{6x^2\ln x + 11x^2 - 1}{x^2}$.

6. $y^{(5)} = -\dfrac{6x^3 + 60x^2 + 240x + 456}{(x+2)^5}$.

7. $y^{(5)} = 2^x \ln^3 2\,[(x^2+1)\ln^2 2 + 10x\ln x + 20]$.

8. $y''' = -8\cos 2x\ln x - \dfrac{6\cos 2x}{x^2} - \dfrac{(12x^2-2)\sin 2x}{x^3}$.

9. $y^{(5)} = 32e^{2x+1}\,(x^2 + 5x + 6)$.

10. $y^{(4)} = 3^{3x+2}\ln 3\,[(9x^3+18)\ln^3 3 + 36x^2\ln^2 3 + 36x\ln 3 + 8]$.

4.10. Вторая производная функции, заданной параметрически

Постановка задачи. *Найти производную второго порядка функции, заданной параметрически.*

План решения. Если функция задана параметрически:

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

то ее первая производная определяется формулами

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y' = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}. \end{cases} \tag{1}$$

Дифференцируя y' по x как сложную функцию x и используя формулу для производной обратной функции, получим

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y'' = \left(\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right)' \cdot \dfrac{1}{f'(t)}. \end{cases}$$

Пример. Найти производную второго порядка функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

Решение.

1. Вычисляем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

и подставляем эти значения в формулу (1):

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y' = \dfrac{t}{1+t^2}. \end{cases}$$

Дифференцируя y' по x как сложную функцию x и используя формулу для производной обратной функции, получим

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y'' = \left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)' \cdot t = \dfrac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y'' = \dfrac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}. \end{cases}$

Условия задач. *Найти производные второго порядка функций, заданных параметрически.*

1. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 3 - \cos t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin^2 t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = 1/t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 1/t^2, \\ y = 1/(t^2+1). \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

Ответы. (Соответствующие выражения для $x(t)$ опущены.)

1. $y'' = 1/(3\cos^4 t \sin t)$. 2. $y'' = 1/(1+\cos t)^2$.

3. $y'' = 4\,\mathrm{ctg}^2 t$. 4. $y'' = -(1+t^2)(4t^3)$.

5. $y'' = -\sqrt{1-t^2}/t^3$. 6. $y'' = -2/t$.

7. $y'' = -1/\cos^4 t$. 8. $y'' = 2t^3/(1+t^2)^2$.

9. $y'' = -2t^6/(1+t^2)^3$. 10. $y'' = 6t^4 + 8t^2 + 2$.

Глава 5

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

При изучении темы ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ вы научитесь исследовать поведение функции: находить ее область определения, асимптоты, промежутки возрастания и убывания, точки экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз и точки перегиба, а также воплощать полученные результаты в виде эскиза графика. Кроме того, вы научитесь находить наименьшие и наибольшие значения функции, непрерывной на отрезке, и исследовать локальное поведение функции по ее производным высших порядков.

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете вычислить производные функции (любого порядка), решить уравнения для нахождения точек возможного экстремума и перегиба, найти значения функции в требуемых точках, выполнить все численные расчеты и проверить правильность полученных вами результатов.

5.1. Общая схема построения графика функции

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Полученные в каждом пункте результаты *последовательно* фиксируем на рисунке в качестве элементов искомого графика и в итоге получаем эскиз графика.

1. Находим область определения D функции $f(x)$ и исследуем ее поведение в граничных точках $x = x_1, x_2, \ldots, x_n, \pm\infty$ области D, включая и $x = \pm\infty$.

а) Пусть $x = x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ — конечная граничная точка области D (т.е. $f(x)$ не определена в этой точке). Вычисляем односторонние пределы

$$\lim_{x \to x_k - 0} f(x) \quad \text{и/или} \quad \lim_{x \to x_k + 0} f(x).$$

Если хотя бы один из этих пределов бесконечен, то $x = x_k$ — вертикальная асимптота графика $f(x)$.

б) Исследуем поведение функции при $x \to +\infty$:

если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b,$$

то прямая $y = kx + b$ — наклонная асимптота графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (если $k = 0$, т.е. $b = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, то $y = b$ — горизонтальная асимптота).

Аналогично исследуется поведение функции при $x \to -\infty$.

Отметим, что асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ могут быть разными.

2. Выясняем четность и периодичность функции.

Если $f(-x) = f(x)$, то функция $f(x)$ называется *четной.* Графики четных функций симметричны относительно оси OY. Поэтому график четной функции достаточно построить для $x > 0$ и нарисовать весь график, отразив полученную кривую относительно оси OY.

Если $f(-x) = -f(x)$, то функция $f(x)$ называется *нечетной.* Графики нечетных функций симметричны относительно точки $(0, 0)$. Поэтому график нечетной функции достаточно построить для $x > 0$ и нарисовать весь график, отразив полученную кривую относительно точки $(0, 0)$.

Если $f(x+T) = f(x)$ при некотором $T > 0$, то функция $f(x)$ называется *периодической.* График периодической функции имеет одну и ту же форму на каждом из отрезков $\ldots$, $[-2T, -T]$, $[-T, 0]$, $[0, T]$, $[T, 2T]$, $\ldots$ Поэтому достаточно построить график на каком-нибудь одном таком отрезке и затем воспроизвести полученную кривую на остальных отрезках.

3. Находим точки пересечения графика с осями координат. Для этого вычисляем $f(0)$ и решаем уравнение $f(x) = 0$.

4. Находим точки максимума и минимума функции и интервалы монотонности. Для этого:

а) вычисляем производную $f'(x)$ и находим критические точки функции, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$, $\pm\infty$ или не существует. Отметим, что если $f'(a) = 0$, то касательная к графику в этой точке горизонтальна, если $f'(a) = \pm\infty$, то касательная вертикальна.

б) определяя знак производной, находим интервалы возрастания и убывания функции: если $f'(x) > 0$, то функция возрастает, если $f'(x) < 0$, то функция убывает;

в) если производная меняет знак при переходе через критическую точку $a \in D$, то a — точка экстремума:

если $f'(x) > 0$ при $x \in (a-\delta, a)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (a, a+\delta)$, то a — точка максимума;

если $f'(x) < 0$ при $x \in (a-\delta, a)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (a, a+\delta)$, то a — точка минимума;

если производная сохраняет знак при переходе через критическую точку, то в этой точке экстремума нет.

5. Находим точки перегиба функции и интервалы выпуклости вверх и вниз. Для этого:

а) вычисляем производную $f''(x)$ и находим точки, принадлежащие области определения функции, в которых $f''(x) = 0$, $\pm\infty$ или $f''(x)$ не существует;

б) определяя знак второй производной, находим интервалы выпуклости вверх и вниз: если $f''(x) > 0$, функция выпукла вниз, если $f''(x) < 0$, функция выпукла вверх;

в) если вторая производная меняет знак при переходе через точку $a \in D$, в которой $f''(x) = 0$, $\pm\infty$ или не существует, то a — точка перегиба (при $f'(a) = 0$ график имеет горизонтальную касательную, при $f'(a) = \pm\infty$ — вертикальную касательную).

6. Уточняя полученный эскиз (например, можно определить еще координаты каких-нибудь точек) и соединяя элементы графика, полученные в окрестностях граничных точек области определения (вблизи асимптот), критических точек и точек перегиба, получаем график функции $y = f(x)$.

ПРИМЕР. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$ и построить ее график.

РЕШЕНИЕ. Полученные в каждом пункте результаты *последовательно* фиксируем на рисунке в качестве элементов искомого графика и в итоге получаем эскиз графика.

1. Находим область определения D. Очевидно, что функция определена при всех x, кроме $x = 2$. Поэтому $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Исследуем поведение функции в граничных точках области D.

а) Вычисляем пределы:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3}{4(2-x)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3}{4(2-x)^2}=+\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 2$ — вертикальная асимптота, причем функция при приближении к ней слева и справа неограниченно возрастает (рис. 1).

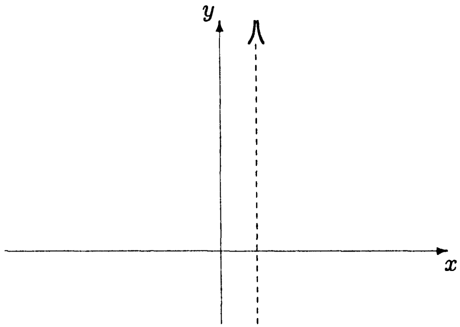

Рис. 1

б) Исследуем поведение функции при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{4(2-x)^2x}=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{4(2-x)^2}-\frac{x}{4}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-1)}{(x-2)^2}=1;$$

и при $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{4(2-x)^2x}=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{4(2-x)^2}-\frac{x}{4}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x-1)}{(x-2)^2}=1.$$

Следовательно, $y = x/4+1$ — наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$. Заметим, что при достаточно больших положительных x $f(x)>x/4+1$, т.е. при $x \to +\infty$ график функции приближается к асимптоте сверху, а при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных x $f(x) < x/4 + 1$, т.е. при $x \to -\infty$ график функции приближается к асимптоте снизу (рис. 2).

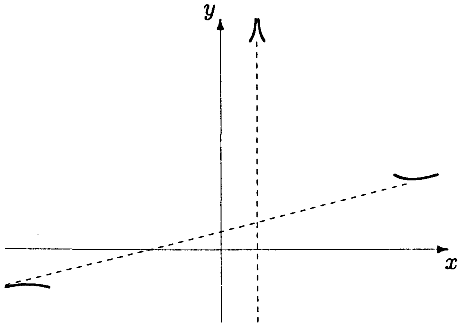

Рис. 2

2. Функция не обладает свойствами четности и периодичности.

3. График функции пересекает оси координат в единственной точке $(0,0)$.

4. Находим точки максимума и минимума функции и интервалы монотонности. Для этого:

а) вычисляем первую производную: $y' = x^2(x-6)/[4(x-2)^3]$. Критические точки функции, принадлежащие области определения D суть $x = 0$ и $x = 6$. Поскольку $y'(0) = 0$ и $y'(6) = 0$, касательная к графику в этих точках горизонтальна (рис. 3);

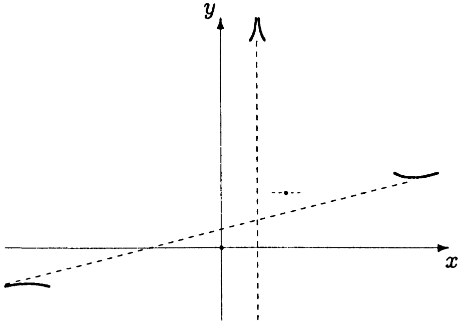

Рис. 3

б) определяя знак производной, находим интервалы возрастания и убывания функции: функция возрастает в интервалах $(-\infty, 2)$ и $(6, +\infty)$ и убывает в интервале $(2, 6)$;

в) при переходе через критическую точку $x = 0$ производная не меняет знак, следовательно, в этой точке экстремума нет.

При переходе через критическую точку $x = 6$ производная меняет знак, следовательно, в этой точке экстремум есть.

Так как $y' < 0$ при $x \in (6 - \delta, 6)$ и $y' > 0$ при $x \in (6, 6 + \delta)$), то $(6, 27/8)$ — точка минимума (рис. 4).

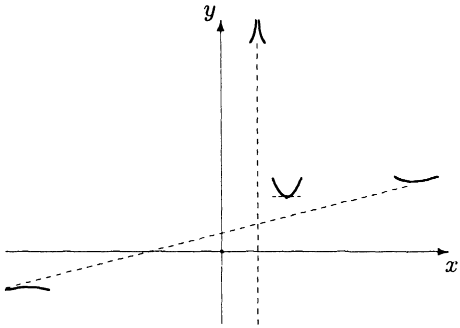

Рис. 4

5. Находим точки перегиба функции и интервалы выпуклости вверх и вниз. Для этого:

а) вычисляем вторую производную

$$y'' = \left[\frac{x^3}{4(2-x)^2}\right]'' = \frac{6x}{(x-2)^4}.$$

Единственная точка, принадлежащая области определения функции, в которой $y'' = 0$, это точка $x = 0$;

б) определяя знак второй производной, находим интервалы выпуклости вверх и вниз: функция выпукла вверх в интервале $(-\infty, 0)$ и выпукла вниз в интервалах $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$.

Отметим, что направление выпуклости соответствует расположению графика относительно асимптот:

при $x < 0$ функция выпукла вверх и график приближается к наклонной асимптоте снизу;

при $x \in (0, 2)$ функция выпукла вниз и график приближается к вертикальной асимптоте $x = 2$ слева;

при $x \in (2, +\infty)$ функция выпукла вниз и график приближается к вертикальной асимптоте $x = 2$ слева, а к наклонной асимптоте сверху;

в) так как вторая производная меняет знак при переходе через точку $x = 0$, то $(0, 0)$ — точка перегиба (с горизонтальной касательной) (рис. 5).

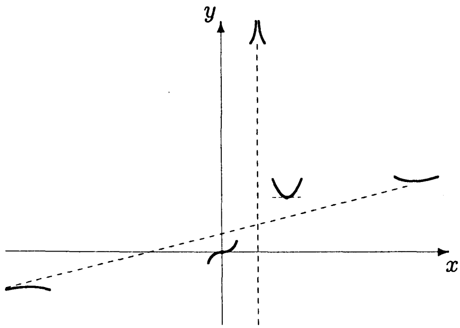

Рис. 5

6. Уточняя полученный эскиз (например, можно определить еще координаты каких-нибудь точек) и соединяя элементы графика, полученные в окрестностях граничных точек области определения (вблизи асимптот), критических точек и точек перегиба, получаем график функции $y = f(x)$ (рис. 6).

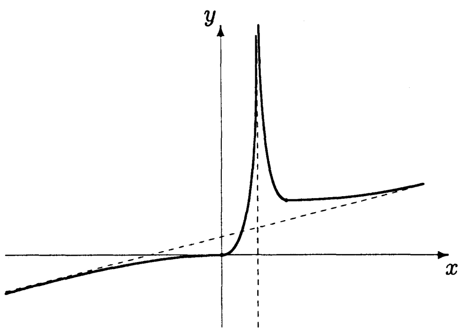

Рис. 6

Условия задач. *Исследовать функции $y = f(x)$ и построить их графики.*

1. $y = x^3 - 3x + 2$.
2. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.
3. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.
4. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

5. $y = xe^{-x}$.

6. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

7. $y = \ln \dfrac{x-1}{x} + 1$.

8. $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

9. $y = \ln \cos x$.

10. $y = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$.

Ответы. 1. Асимптот нет. Точки: минимума $(1, 0)$, максимума $(-1, 4)$, перегиба $(0, 2)$.

2. Асимптоты: горизонтальная $y = 0$. Точки: минимума $(-1, -1/2)$, максимума $(1, 1/2)$, перегиба $(0, 0)$, $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$.

3. Асимптоты: вертикальные $x = -2$, $x = 2$, наклонная $y = x$. Точки: минимума $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$, максимума $(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$, перегиба $(0, 0)$.

4. Асимптоты: вертикальные $x = -2$, $x = 2$, наклонные $y = -x$ (при $x \to -\infty$), $y = x$ (при $x \to +\infty$). Точки минимума $(-\sqrt{2}, 2)$, $(\sqrt{2}, 2)$.

5. Асимптоты: горизонтальная $y = 0$ (при $x \to +\infty$). Точки: максимума $(1, 1/e)$, перегиба $(2, 2/e^2)$.

6. Асимптоты: вертикальная $x = 0$, горизонтальная $y = 0$ (при $x \to -\infty$). Точка минимума $(1, e)$.

7. Асимптоты: вертикальные $x = 0$, $x = 1$, горизонтальная $y = 1$ (при $x \to \pm\infty$).

8. Асимптоты: вертикальная $x = 1$ ($x = 0$ асимптотой не является). Точки: минимума (e, e), перегиба $(e^2, e/2)$.

9. Асимптоты: вертикальные $x = \pi/2 + \pi k$. Точки максимума $(2\pi k, 0)$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

10. Асимптоты: наклонная $y = x + 1/3$. Точки: минимума $(0, 0)$, максимума $(-2/3, \sqrt[3]{4}/3)$, перегиба $(-1, 0)$.

5.2. Наибольшее и наименьшее значения функции

Постановка задачи. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.*

План решения. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ достигаются в критических точках функции (точках, в которых $f'(x) = 0$, $\pm\infty$ или $f'(x)$ не существует) или на концах отрезка $[a, b]$.

1. Проверяем, что заданная функция на данном отрезке является непрерывной.

2. Ищем производную заданной функции.

3. Находим критические точки функции $f(x)$ и выбираем из них те, которые принадлежат данному отрезку $[a, b]$.

4. Вычисляем значения функции в критических точках внутри отрезка и значения функции на концах отрезка. Сравнивая полученные значения, находим наибольшее M и наименьшее m значения функции на $[a, b]$.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{10x + 10}{x^2 + 2x + 2}$$

на отрезке $[-1, 2]$.

Решение.

1. Заданная функция является непрерывной на отрезке $[-1, 2]$, так как является отношением непрерывных функций со знаменателем, не равным нулю $(x^2 + 2x + 2 > 0)$.

2. Вычисляем производную заданной функции:

$$y' = -10\frac{x^2 + 2x}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

3. Критическими точками заданной функции являются $x = 0$ и $x = -2$. Данному отрезку $[-1, 2]$ принадлежит только точка $x = 0$.

4. Вычисляем значение функции в точке $x = 0$ и значения функции на концах заданного отрезка. Имеем

$$f(0) = 5, \quad f(-1) = 0, \quad f(2) = 3.$$

Сравнивая эти значения, заключаем, что наименьшее значение функции $m = 0$ достигается в точке $x = -1$, а наибольшее значение $M = 5$ — в точке $x = 0$.

Ответ. Функция принимает наименьшее значение $m = 0$ в точке $x = -1$, а наибольшее значение $M = 5$ — в точке $x = 0$.

Условия задач. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.*

1. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$, $[0, 2]$.

2. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, $[-1, 1]$.

3. $y = x^2(x-2)^2$, $[0, 2]$.

4. $y = (x^3 - 9x^2)/4 + 6x - 9$, $[0, 4]$.

5. $y = 4x^2/(3 + x^2)$, $[-1, 1]$.

6. $y = 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2x}$, $[-2, 0]$.

7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$, $[0, 2]$.

8. $y = 3\sqrt[3]{(x-3)^2} - 2x + 6$, $[2, 4]$.

9. $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$, $[0, 2]$.

10. $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$, $[-2, 0]$.

Ответы. 1. $m = y(0) = y(2) = 1$, $M = y(1) = 2$. 2. $m = y(-1) = -5$, $M = y(0) = 0$. 3. $m = y(0) = y(2) = 0$, $M = y(1) = 1$. 4. $m = y(0) = -9$, $M = y(2) = -4$. 5. $m = y(0) = 0$, $M = y(-1) = y(1) = 1$. 6. $m = y(-2) = y(1) = 1$, $M = y(-1) = 2$. 7. $m = y(1) = -5$, $M = y(2) = 0$. 8. $m = y(3) = 0$, $M = y(2) = 5$. 9. $m = y(0) = y(2) = 0$, $M = y(1) = 1$. 10. $m = y(-1) = -2$, $M = y(-2) = 18$.

5.3. Исследование функции с помощью производных высших порядков

Постановка задачи. *Исследовать функцию $y = f(x)$ в окрестности точки $x = a$ с помощью производных высших порядков.*

План решения. Пусть при некотором $k > 1$

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Тогда если k — четное число, то точка a является точкой экстремума, а именно точкой максимума, если $f^{(k)}(a) < 0$, и точкой минимума, если $f^{(k)}(a) > 0$. Если же k — нечетное число, то точка a является точкой перегиба.

ПРИМЕР. Исследовать функцию

$$y = \sin^2(x-1) - x^2 + 2x$$

в окрестности точки $a = 1$ с помощью производных высших порядков.

РЕШЕНИЕ.

1. Вычисляем производные заданной функции в точке $a = 1$:

$$\begin{array}{ll}
y' = \sin(2x-2) - 2x + 2, & y'(1) = 0, \\
y'' = 2\cos(2x-2) - 2, & y''(1) = 0, \\
y''' = -4\sin(2x-2), & y'''(1) = 0, \\
y'''' = -8\cos(2x-2), & y''''(1) = -8 < 0.
\end{array}$$

2. Так как $k = 4$ — четное число и $y''''(1) < 0$, то точка $a = 1$ есть точка максимума функции $y = \sin^2(x-1) - x^2 + 2x$.

Ответ. Функциия $y = \sin^2(x-1) - x^2 + 2x$ имеет максимум в точке $a = 1$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Исследовать функцию $y = f(x)$ в окрестности точки $x = a$ с помощью производных высших порядков.*

1. $y = 2x^2 + 8x + 4\cos(x+2), \quad a = -2.$

2. $y = 4\ln x + 2x^2 - 8x + 5, \quad a = 1.$

3. $y = 2x - x^2 + \cos^2(x-1), \quad a = 1.$

4. $y = 2\ln(x-2) + x^2 - 8x + 3, \quad a = 3.$

5. $y = x^2 + 8x + 8 - 2e^{x+3}, \quad a = -3.$

6. $y = 2\cos(x+3) + x^2 + 6x + 2, \quad a = -3.$

7. $y = x^2 + 1 - 2x\ln(x+1), \quad a = 0.$

8. $y = \sin^2 x - x^2 + 4, \quad a = 0.$

9. $y = 2e^{x-2} - x^2 + 2x + 1, \quad a = 2.$

10. $y = 2e^x - \sin x - x^2 - x, \quad a = 0.$

Ответы.

1. $a = -2$ — точка минимума.
2. $a = 1$ — точка перегиба.
3. $a = 1$ — точка минимума.
4. $a = 3$ — точка перегиба.
5. $a = -3$ — точка перегиба.
6. $a = -3$ — точка максимума.
7. $a = 0$ — точка максимума.
8. $a = 0$ — точка максимума.
9. $a = 2$ — точка перегиба.
10. $a = 0$ — точка перегиба.

Глава 6

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

При изучении темы ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ вы на примерах познакомитесь с понятиями частных производных, полного дифференциала, градиента, производной по направлению и научитесь их вычислять. Вы также научитесь дифференцировать сложные функции нескольких переменных и функции, заданные неявно. Эти умения вы сможете применить для нахождения касательной плоскости и нормали к поверхности и точек экстремума функции двух переменных.

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете вычислить частные производные, решить системы уравнений (для нахождении стационарных точек), выполнить все численные расчеты и проверить правильность полученных вами результатов.

6.1. Частные производные

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Найти частные производные до второго порядка включительно функции* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Чтобы найти частную производную функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_k, фиксируем остальные переменные и дифференцируем f как функцию одной переменной x_k.

2. Частные производные высших порядков вычисляются аналогично последовательным дифференцированием, т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \ \ldots$$

Замечание. Частные производные можно обозначать также z'_{x_1}, z'_{x_2}, ..., z'_{x_n}, $z''_{x_1x_1}$, $z''_{x_1x_2}$ и т.д.

Пример. Найти частные производные до второго порядка включительно функции $z = x^y$ $(x > 0)$.

Решение.

1. Для того чтобы найти частную производную по x, фиксируем y и дифференцируем функцию $z = x^y$ как функцию одной переменной x. Используя формулу для производной степенной функции $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, получим

$$z'_x = yx^{y-1}.$$

Для того чтобы найти частную производную по y, фиксируем x и дифференцируем функцию $z = x^y$ как функцию одной переменной y. Используя формулу для производной показательной функции $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0)$, получим

$$z'_y = x^y \ln x.$$

2. Частную производную второго порядка z''_{xx} вычисляем, дифференцируя z'_x по x (при фиксированном y), т.е.

$$z''_{xx} = (yx^{y-1})'_x = y(y-1)x^{y-2}.$$

Частную производную второго порядка z''_{xy} вычисляем, дифференцируя z'_x по y (при фиксированном x), т.е.

$$z''_{xy} = (yx^{y-1})'_y = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x.$$

Частную производную второго порядка z''_{yx} вычисляем, дифференцируя z'_y по x (при фиксированном y), т.е.

$$z''_{yx} = (x^y \ln x)'_x = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x}.$$

Частную производную второго порядка z''_{yy} вычисляем, дифференцируя z'_y по y (при фиксированном x), т.е.

$$z''_{yy} = (x^y \ln x)'_y = x^y \ln^2 x.$$

Ответ. $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$, $z''_{xy} = z''_{yx} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$,

$z''_{xx} = (yx^{y-1})'_x = y(y-1)x^{y-2}$, $z''_{yy} = x^y \ln^2 x$.

Условия задач. *Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций.*

1. $z = e^{xy}$.
2. $z = x\ln(x/y)$.
3. $z = \sin(xy)$.
4. $z = e^x \cos y$.
5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
6. $z = \ln(x^2 + y)$.
7. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.
8. $z = \ln\sqrt[3]{xy}$.
9. $z = x\cos y + y\sin x$.
10. $z = (1 + x)^2(1 + y)^4$.

Ответы. 1. $z'_x = ye^{xy}$, $z'_y = xe^{xy}$, $z''_{xx} = y^2e^{xy}$, $z''_{yy} = x^2e^{xy}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = e^{xy}(1 + xy)$. 2. $z'_x = \ln x - \ln y + 1$, $z'_y = -x/y$, $z''_{xx} = 1/x$, $z''_{yy} = x/y^2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -1/y$. 3. $z'_x = y\cos(xy)$, $z'_y = x\cos(xy)$, $z''_{xx} = -y^2\sin(xy)$, $z''_{yy} = -x^2\sin(xy)$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$. 4. $z'_x = e^x\cos y$, $z'_y = -e^x\sin y$, $z''_{xx} = e^x\cos y$, $z''_{yy} = -e^x\cos y$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -e^x\sin y$. 5. $z'_x = x/\sqrt{x^2+y^2}$, $z'_y = y/\sqrt{x^2+y^2}$, $z''_{xx} = y^2/(x^2+y^2)^{3/2}$, $z''_{yy} = x^2/(x^2+y^2)^{3/2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -xy/(x^2+y^2)^{3/2}$. 6. $z'_x = 2x/(x^2+y)$, $z'_y = 1/(x^2+y)$, $z''_{xx} = 2(y-x^2)/(x^2+y)^2$, $z''_{yy} = -1/(x^2+y)^2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -2x/(x^2+y)^2$. 7. $z'_x = y/\sqrt{2xy+y^2}$, $z'_y = (x+y)/\sqrt{2xy+y^2}$, $z''_{xx} = -y^2/(2xy+y^2)^{3/2}$, $z''_{yy} = -x^2/(2xy+y^2)^{3/2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = xy/(2xy+y^2)^{3/2}$. 8. $z'_x = 1/(3x)$, $z'_y = 1/(3y)$, $z''_{xx} = -1/(3x^2)$, $z''_{yy} = -(3y^2)^{-1}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$. 9. $z'_x = \cos y + y\cos x$, $z'_y = \sin x - x\sin y$, $z''_{xx} = -y\sin x$, $z''_{yy} = -x\cos y$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \cos x - \sin y$. 10. $z'_x = 2(1+x)(1+y)^4$, $z'_y = 4(1+x)^2(1+y)^3$, $z''_{xx} = 2(1+y)^4$, $z''_{yy} = 12(1+x)^2(1+y)^2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 8(1+x)(1+y)^3$.

6.2. Градиент

Постановка задачи. *Найти градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.*

План решения. *Градиент функции $f(x, y, z)$* — это вектор, координаты которого в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ являются частными производными функции $f(x, y, z)$, т.е.

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}.$$

1. Находим частные производные функции $f(x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

2. Вычисляем частные производные функции $f(x, y, z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

4. Вычисляем градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$\operatorname{grad} f\Big|_M = \left\{f'_x(x_0, y_0, z_0),\ f'_y(x_0, y_0, z_0),\ f'_z(x_0, y_0, z_0)\right\}.$$

Записываем ответ.

Пример. Найти градиент функции

$$u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$$

в точке $M(2, 1, 1)$.

Решение.

1. Находим частные производные функции $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{1 + (y + z)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{1 + (y + z)^2}.$$

2. Вычисляем частные производные функции $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$ в точке $M(2, 1, 1)$:

$$f'_x(2, 1, 1) = 4, \quad f'_y(2, 1, 1) = -\frac{1}{5}, \quad f'_z(2, 1, 1) = -\frac{1}{5}.$$

3. Вычисляем градиент функции $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$ в точке $M(2, 1, 1)$:

$$\operatorname{grad} f\Big|_{(2,1,1)} = \left\{f'_x(2, 1, 1),\ f'_y(2, 1, 1),\ f'_z(2, 1, 1)\right\} = \left\{4,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{5}\right\}.$$

Ответ. $\operatorname{grad} f\Big|_{(2,1,1)} = \left\{4, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}.$

Условия задач. *Найти градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке M.*

1. $u = x + \ln(z^2 + y^2)$, $\quad M(2, 1, 1)$.

2. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$, $\quad M(1, 5, -2)$.

3. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}$, $\quad M(\pi/2, 3\pi/2, 3)$.

4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad M(1,1,0).$

5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \quad M(1,1,0).$

6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z, \quad M(1,3,2).$

7. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1), \quad M(1,1,2).$

8. $u = \ln(x^2 + y^2), \quad M(1,-1,2).$

9. $u = xy - x/z, \quad M(-4,3,-1).$

10. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}), \quad M(1,-3,4).$

Ответы. 1. $\{1,1,1\}$. 2. $\{55/6, 5/6, 2/3\}$. 3. $\{3, 1, \pi/2\}$. 4. $\{3,1,0\}$. 5. $\{1/2, 1/2, 0\}$. 6. $\{17, 12, 9\}$. 7. $\{4,4,0\}$. 8. $\{1,-1,0\}$. 9. $\{4,-4,-4\}$. 10. $\{1/6, -1/10, 2/15\}$.

6.3. Производная по направлению

Постановка задачи. *Найти производную функции $u(x,y,z)$ в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ по направлению к точке $B(x_2, y_2, z_2)$.*

План решения.

1. Если функция $u(x,y,z)$ дифференцируема в точке $A(x_1,y_1,z_1)$, то в этой точке существует ее производная по любому направлению $\vec{l}$, определяемая формулой

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A = (\operatorname{grad} u|_A, \vec{l}_0), \tag{1}$$

где

$$\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}, \quad \vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

2. Находим координаты вектора $\vec{l}$. В данном случае

$$\vec{l} = \overline{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}.$$

3. Находим единичный вектор (орт) $\vec{l}_0$:

$$\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{\{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.$$

4. Вычисляем частные производные и градиент функции $u(x, y, z)$ в точке $A(x_1, y_1, z_1)$:

$$\operatorname{grad} u\Big|_A = \left\{u'_x(x_1, y_1, z_1),\ u'_y(x_1, y_1, z_1),\ u'_z(x_1, y_1, z_1)\right\}.$$

5. Вычисляя скалярное произведение в формуле (1), получаем ответ.

Пример. Найти производную функции

$$u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$$

в точке $A(2, 1, 1)$ по направлению к точке $B(2, 4, -3)$.

Решение.

1. Так как функция $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$ дифференцируема в точке $A(2, 1, 1)$, то в этой точке существует ее производная по любому направлению $\vec{l}$, которая определяется формулой (1).

2. Находим координаты вектора $\vec{l}$. В данном случае

$$\vec{l} = \overline{AB} = \{0, 3, -4\}.$$

3. Находим единичный вектор (орт) $\vec{l_0}$:

$$\vec{l_0} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{\{0, 3, -4\}}{\sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \left\{0, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\}.$$

4. Вычисляем частные производные функции $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$ в точке $A(2, 1, 1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(2,1,1)} = 2x\big|_{(2,1,1)} = 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(2,1,1)} = -\frac{1}{1 + (y + z)^2}\bigg|_{(2,1,1)} = -\frac{1}{5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{(2,1,1)} = -\frac{1}{1 + (y + z)^2}\bigg|_{(2,1,1)} = -\frac{1}{5}.$$

Тогда

$$\operatorname{grad} u\big|_{(2,1,1)} = \left\{4, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}.$$

5. Подставляя полученные значения в формулу (1) и вычисляя скалярное произведение, получим

$$\frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{(2,1,1)} = (\operatorname{grad} u\big|_{(2,1,1)}, \vec{l_0}) = 4 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{25}.$$

Ответ. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{(2,1,1)} = \dfrac{1}{25}$.

Условия задач. Найти производную функции $u(x, y, z)$ в точке A по направлению к точке B.

1. $u = x + \ln(z^2 + y^2)$, $A(2,1,1)$, $B(0,2,0)$.
2. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$, $A(1,5,-2)$, $B(1,7,-4)$.
3. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}$, $A\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, 3\right)$, $B\left(\dfrac{\pi}{2} + 4, \dfrac{3\pi}{2} + 3, 3\right)$.
4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $A(1,1,0)$, $B(1,2,-1)$.
5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$, $A(1,1,0)$, $B(3,3,-1)$.
6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$, $A(1,3,2)$, $B(0,5,0)$.
7. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$, $A(1,1,2)$, $B(6,-5,2\sqrt{5} + 2)$.
8. $u = \ln(x^2 + y^2)$, $A(1,-1,2)$, $B(2,-2,3)$.
9. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2})$, $A(1,-3,4)$, $B(-1,-4,5)$.
10. $u = xy - \frac{x}{z}$, $A(-4,3,-1)$, $B(1,4,-2)$.

Ответы. 1. $-\sqrt{6}/3$. 2. $\sqrt{2}/12$. 3. 3. 4. $\sqrt{2}/2$. 5. $2/3$. 6. $-11/3$. 7. $-4/9$. 8. $2\sqrt{3}/3$. 9. $-\sqrt{6}/60$. 10. $20\sqrt{3}/9$.

6.4. Производные сложной функции

Постановка задачи. *Найти производные z'_x и z'_y функции $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.*

План решения. Поскольку z является сложной функцией двух переменных x и y, то ее производные z'_x и z'_y вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2}$$

1. Вычисляем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}.$$

2. Подставляем полученные результаты в формулы (1) и (2) и записываем ответ.

Замечание. Формулы (1) и (2) можно обобщить на функции любого числа переменных. Например, если дана функция $f(u,v,w)$, где $u = u(x,y,t)$, $v = v(x,y,t)$ и $w = w(x,y,t)$, то ее частные производные f'_x, f'_y, f'_t вычисляются по формулам

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Пример. Найти производные z'_x и z'_y функции $z = u/v$, где $u = x^y$ и $v = \sqrt{xy}$.

Решение.

1. Вычисляем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.$$

2. Подставляя полученные результаты в формулы (1) и (2), получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{v}\cdot yx^{y-1} - \frac{u}{v^2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{v}\cdot x^y \ln x - \frac{u}{v^2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.$$

Ответ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{v}\cdot yx^{y-1} - \frac{u}{v^2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{v}\cdot x^y \ln x - \frac{u}{v^2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}},$$

где $u = x^y$, $v = \sqrt{xy}$.

Условия задач. *Найти производные z'_x и z'_y функции $z = z(u,v)$, где $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$.*

1. $z = u^2 + v^2, \quad u = x + y, \quad v = x - y.$

2. $z = \ln(u^2 + v^2)$, $\quad u = xy$, $\quad v = x/y$.
3. $z = u^v$, $\quad u = \sin x$, $\quad v = \cos y$.
4. $z = u^2 + 2v^3$, $\quad u = x^2 - y^2$, $\quad v = e^{xy}$.
5. $z = \operatorname{arctg}(u/v)$, $\quad u = x \sin y$, $\quad v = x \cos y$.
6. $z = \ln(u - v^2)$, $\quad u = x^2 + y^2$, $\quad v = y$.
7. $z = u^3 + v^2$, $\quad u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad v = \operatorname{arctg}(y/x)$.
8. $z = \sqrt{uv}$, $\quad u = \ln(x^2 + y^2)$, $\quad v = xy^2$.
9. $z = e^{uv}$, $\quad u = \ln x$, $\quad v = \ln y$.
10. $z = \ln(u/v)$, $\quad u = \sin(x/y)$, $\quad v = \sqrt{x/y}$.

Ответы.

1. $z'_x = 2u + 2v, \quad z'_y = 2u - 2v.$
2. $z'_x = \dfrac{2u}{u^2 + v^2} \cdot y + \dfrac{2v}{u^2 + v^2} \cdot \dfrac{1}{y}, \quad z'_y = \dfrac{2u}{u^2 + v^2} \cdot x - \dfrac{2v}{u^2 + v^2} \cdot \dfrac{x}{y^2}.$
3. $z'_x = vu^{v-1} \cdot \cos x, \quad z'_y = u^v \ln u \cdot (-\sin y).$
4. $z'_x = 2u \cdot 2x + 6v^2 \cdot ye^{xy}, \quad z'_y = 2u \cdot (-2y) + 6v^2 \cdot xe^{xy}.$
5. $z'_x = \dfrac{v}{u^2 + v^2} \cdot \sin y - \dfrac{u}{u^2 + v^2} \cdot \cos y,$

   $z'_y = \dfrac{v}{u^2 + v^2} \cdot x \cos y - \dfrac{u}{u^2 + v^2} \cdot x \sin y.$
6. $z'_x = \dfrac{1}{u - v^2} \cdot 2x, \quad z'_y = \dfrac{1}{u - v^2} \cdot 2y + \dfrac{2v}{u - v^2}.$
7. $z'_x = 3u^2 \cdot \dfrac{x}{x^2 + y^2} - 2v \cdot \dfrac{y}{x^2 + y^2},$

   $z'_y = 3u^2 \cdot \dfrac{y}{x^2 + y^2} + 2v \cdot \dfrac{x}{x^2 + y^2}.$
8. $z'_x = \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} \cdot \dfrac{2x}{x^2 + y^2} + \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \cdot y^2,$

   $z'_y = \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} \cdot \dfrac{2y}{x^2 + y^2} + \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \cdot 2xy.$
9. $z'_x = ve^{uv} \cdot \dfrac{1}{x}, \quad z'_y = ue^{uv} \cdot \dfrac{1}{y}.$
10. $z'_x = \dfrac{1}{u} \cdot \cos\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{v} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{xy}},$

    $z'_y = \dfrac{1}{u} \cdot \cos\dfrac{x}{y}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) + \dfrac{1}{v} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y}}.$

6.5. Производная неявной функции

Постановка задачи. *Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением*

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

План решения. Если при каждом фиксированном x, принадлежащем некоторой области D, уравнение (1) имеет *единственное* решение y, принадлежащее некоторой области E, то уравнение (1) задает функцию $y = y(x)$ с областью определения D и областью значений E.

Если в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0 = y(x_0))$ функция $F(x, y)$ дифференцируема и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение (1) определяет функцию $y = y(x)$, дифференцируемую в точке x_0, причем ее производная определяется формулой

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{2}$$

1. Вычисляем частные производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0), где y_0 есть корень уравнения $F(x_0, y) = 0$.
2. Находим $y'(x_0)$ по формуле (2) и записываем ответ.

Замечание. Аналогично вычисляются частные производные функций нескольких переменных, заданных неявно. Например, если уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает функцию $z = z(x, y)$, то при известных условиях функция $z = z(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и ее частные производные определяются формулами

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

где z_0 есть корень уравнения $F(x_0, y_0, z) = 0$.

Пример. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{3}$$

Решение.

1. В данном случае $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Вычисляем ее частные производные:

$$F'_x = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{1 + (y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

$$F'_y = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

Очевидно, что $F(x,y)$, F'_x и F'_y непрерывны при всех $x \neq 0$ и $F'_y \neq 0$ при $x \neq y$. Следовательно, уравнение (3) определяет функцию $y(x)$, дифференцируемую во всех точках (x_0, y_0) области, где $x \neq 0$ и $x \neq y$.

2. Находим y' по формуле (2)

$$y' = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} = -\frac{(x_0+y_0)/(x_0^2+y_0^2)}{(y_0-x_0)/(x_0^2+y_0^2)} = \frac{x_0+y_0}{x_0-y_0}.$$

Ответ. $y' = \dfrac{x_0+y_0}{x_0-y_0}$ при всех x_0, y_0, удовлетворяющих уравнению (3), в области, где $x \neq 0$ и $x \neq y$.

Условия задач. *Найти производные функций $y = y(x)$, заданных неявно уравнениями.*

1. $y^x = x^y$.
2. $y = 1 + y^x$.
3. $y = x + \ln y$.
4. $x + y = e^{x-y}$.
5. $x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$.
6. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.
7. $y \sin x - \cos(x-y) = 0$.
8. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$.
9. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.
10. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$.

Ответы.

1. $y' = -\dfrac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{xy^{x-1} - x^y \ln x}$.
2. $y' = \dfrac{y^x \ln y}{1 - xy^{x-1}}$.
3. $y' = \dfrac{y}{y-1}$.
4. $y' = \dfrac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$.
5. $y' = \dfrac{y^2 e^{2x} - xe^{2y}}{x^2 e^{2y} - ye^{2x}}$.
6. $y' = \dfrac{1+y^2}{y^2}$.
7. $y' = \dfrac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$.
8. $y' = \dfrac{y(2x + e^{xy} - \cos xy)}{x(\cos xy - e^{xy} - x)}$.
9. $y' = -\dfrac{y}{x}$.
10. $y' = \dfrac{2y-2x-1}{2y-2x+1}$.

6.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Постановка задачи. *Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением*

$$F(x,y,z)=0,$$

в точке $M(x_0,y_0,z_0)$.

План решения.

Нормальный вектор к поверхности, заданной уравнением

$$F(x,y,z)=0,$$

в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ определяется формулой

$$\vec{n}=\operatorname{grad}F\Big|_M=\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_M,\ \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_M,\ \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_M\right\}.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ есть

$$F'_x\big|_M(x-x_0)+F'_y\big|_M(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z\big|_M(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

и уравнения нормали —

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_M}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_M}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_M}. \qquad (2)$$

1. Находим частные производные F'_x, F'_y и F'_z в точке $M(x_0,y_0,z_0)$.

2. Подставляем найденные значения в уравнения (1) и (2) и записываем ответ.

Замечание. Если заданы только значения x_0 и y_0, то координата z_0 точки M определяется из условия, что точка M принадлежит данной поверхности, т.е. $F(x_0,y_0,z_0)=0$.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением

$$z=xy,$$

в точке $M(1,1)$.

Решение. Запишем уравнение поверхности в виде $xy - z = 0$, т.е. $F = xy - z$.

Координаты точки M: $x_0 = 1$ и $y_0 = 1$. Координату z_0 определяем из условия, что точка M принадлежит данной поверхности, т.е. $F(1,1,z_0) = 0$. Получаем $z_0 = 1$.

1. Находим частные производные F'_x, F'_y и F'_z в точке $M(1,1,1)$:

$$F'_x\big|_{(1,1,1)} = y\big|_{(1,1,1)} = 1, \quad F'_y\big|_{(1,1,1)} = x\big|_{(1,1,1)} = 1, \quad F'_z\big|_{(1,1,1)} = -1.$$

2. Подставляя найденные значения в уравнения (1) и (2), получаем уравнение касательной плоскости

$$1(x-1) + 1(y-1) - 1(z-1) = 0$$

и уравнения нормали

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Ответ. Уравнение касательной плоскости: $x + y - z - 1 = 0$. Уравнения нормали: $x - 1 = y - 1 = 1 - z$.

Условия задач. *Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M.*

1. $z = x^2 + y^2, \quad M(1,-2,5)$.
2. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0, \quad M(4,3,4)$.
3. $z = \sin x \cos y, \quad M(\pi/4, \pi/4, 1/2)$.
4. $z = e^{x \cos y}, \quad M(1, \pi, 1/e)$.
5. $z = y \operatorname{tg} x, \quad M(\pi/4, 1, 1)$.
6. $z = \operatorname{arctg}(x/y), \quad M(1, 1, \pi/4)$.
7. $x(y+z)(z-xy) = 8, \quad M(2,1,3)$.
8. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, \quad M(2,2,1)$.
9. $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0, \quad M(2,2,2\sqrt{2})$.
10. $x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad M(2,2,3)$.

Ответы.

1. $2x - 4y - z - 5 = 0,\quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}.$

2. $3x + 4y - 6z = 0,\quad \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}.$

3. $x - y - 2z + 1 = 0,\quad \dfrac{x-\pi/4}{1} = \dfrac{y-\pi/4}{-1} = \dfrac{z-1/2}{-2}.$

4. $x + ez - 2 = 0,\quad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-\pi}{0} = \dfrac{z-1/e}{e}.$

5. $2x + y - z - \frac{\pi}{2} = 0,\quad \dfrac{x-\pi/4}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}.$

6. $x - y - 2z + \frac{\pi}{2} = 0,\quad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-\pi/4}{-2}.$

7. $2x + 7y - 5z + 4 = 0,\quad \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-3}{-5}.$

8. $x + y - 4z = 0,\quad \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-4}.$

9. $x + y + \sqrt{2}z - 8 = 0,\quad \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$

10. $2x + 2y - 3z + 1 = 0,\quad \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-3}.$

6.7. Экстремум функции двух переменных

Постановка задачи. *Найти стационарные точки функции $z = z(x, y)$ и исследовать их характер.*

План решения.

1. *Стационарными точками* функции нескольких переменных называются точки, в которых все ее частные производные равны нулю. Следовательно, чтобы найти стационарные точки функции $z(x, y)$, нужно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} z'_x(x, y) = 0, \\ z'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим стационарные точки функции $z(x, y)$: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$.

2. Для того чтобы исследовать характер стационарных точек, воспользуемся достаточными условиями экстремума функции двух переменных.

Пусть функция $z = z(x, y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в стационарной точке $M(x_0, y_0)$ (т.е. $z'_x(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = 0$). Тогда если в этой точке:

а) $z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$, *то M — точка экстремума, причем при $z''_{xx} > 0$ — точка минимума, при $z''_{xx} < 0$ — точка максимума;*

б) $z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 < 0$, *то M не является точкой экстремума;*

в) $z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$, *то требуется дополнительное исследование (например, по определению).*

3. Вычисляем производные второго порядка функции $z(x, y)$.

4. В каждой стационарной точке вычисляем выражение

$$z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2$$

и определяем его знак.

Анализируем полученные результаты и записываем ответ.

Пример. Найти стационарные точки функции

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

и исследовать их характер.

Решение.

1. Вычисляем частные производные

$$z'_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x.$$

2. Для того чтобы найти стационарные точки функции, решаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Получаем два решения: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_2 = 1$, $y_2 = 1$. Следовательно, стационарные точки функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$: $M_1(0, 0)$ и $M_2(1, 1)$.

3. Вычисляем производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = -3, \quad z''_{yy} = 6y.$$

4. В каждой стационарной точке вычисляем выражение

$$z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2$$

и определяем его знак.

В точке $M_1(0,0)$

$z''_{xx}(0,0)=0,\ \ z''_{xy}(0,0)=-3,\ \ z''_{yy}(0,0)=0 \Longrightarrow z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = -6 < 0.$

Следовательно, точка $M_1(0,0)$ не является точкой экстремума.

В точке $M_2(1,1)$

$z''_{xx}(1,1)=6,\ \ z''_{xy}(1,1)=-3,\ \ z''_{yy}(1,1)=6 \Longrightarrow z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 27 > 0.$

Следовательно, точка $M_2(1,1)$ является точкой экстремума. Так как $z''_{xx}(1,1) = 6 > 0$, то $M_2(1,1)$ — точка минимума.

Ответ. Функция $z = x^3 + y^3 - 3xy$ имеет две стационарные точки $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$. В точке $M_1(0,0)$ экстремума нет, $M_2(1,1)$ — точка минимума.

Условия задач. *Найти стационарные точки заданных функций и исследовать их характер.*

1. $z = x^2 - xy + y^2$.
2. $z = x^2 - xy - y^2$.
3. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$.
4. $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$.
5. $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.
6. $z = 4x + 2y - x^2 - y^2$.
7. $z = x^3 + y^3 - 15xy$.
8. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
9. $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + 4$.
10. $z = x/y + 1/x + y$.

Ответы.

1. $M(0,0)$ — стационарная точка. $M(0,0)$ — точка минимума, $z_{\min} = z(0,0) = 0$.

2. $M(0,0)$ — стационарная точка. В точке $M(0,0)$ экстремума нет.

3. $M(-2,-1)$ — стационарная точка. $M(-2,-1)$ — точка минимума, $z_{\min} = z(-2,-1) = -2$.

4. $M_1(0,0)$, $M_2(4/3, 4/3)$ — стационарные точки. $M(0,0)$ — точка максимума, $z_{\max} = z(0,0) = 0$. $M(4/3,4/3)$ — точка минимума, $z_{\min} = z(4/3,4/3) = -64/27$.

5. $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$, $M_3(-1,1)$, $M_4(1,-1)$ — стационарные точки. В точках $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$ экстремума нет. $M_3(-1,1)$ — точка максимума, $z_{\max} = z(-1,1) = 6$. $M_4(1,-1)$ — точка минимума, $z_{\min} = z(1,-1) = -6$.

6. $M(2,1)$ — стационарная точка. $M(2,1)$ — точка максимума, $z_{\max} = z(2,1) = 5$.

7. $M_1(0,0)$, $M_2(5,5)$ — стационарные точки. В точке $M_1(0,0)$ экстремума нет. $M_3(5,5)$ — точка минимума, $z_{\min} = z(5,5) = -125$.

8. $M(0,3)$ — стационарная точка. $M(0,3)$ — точка минимума, $z_{\min} = z(0,3) = -9$.

9. $M(0,0)$ — стационарная точка. $M(0,0)$ — точка минимума, $z_{\min} = z(0,0) = 4$.

10. $M(1,1)$ — стационарная точка. $M(1,1)$ — точка минимума, $z_{\min} = z(1,1) = 3$.

Глава 7
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

При изучении темы НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ вы изучите основные приемы нахождения первообразных (подведение под знак дифференциала, интегрирование по частям, замена переменной), научитесь интегрировать основные классы функций (рациональные дроби, тригонометрические и иррациональные выражения).

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете вычислить производные, разложить многочлен на множители, разложить рациональную функцию на элементарные дроби, решить системы уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов, выполнить другие численные расчеты и проверить полученные вами результаты.

7.1. Интегрирование подведением под знак дифференциала

Постановка задачи. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int F(x)g(x)\,dx.$$

План решения. Пусть $g(x)$ имеет очевидную первообразную $G(x)$, а $F(x)$ есть функция этой первообразной, т.е. $F(x) = u(G(x))$. Тогда

$$\int F(x)g(x)\,dx = \int u(G(x))G'(x)\,dx = \int u(G)\,dG.$$

Такого рода преобразование называется *подведением под знак дифференциала.*

Если метод избран удачно, то последний интеграл оказывается табличным или известным образом сводится к табличному.

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int \operatorname{ctg} x \, \ln\sin x\,dx.$$

Решение.

1. Представим подынтегральное выражение в виде произведения двух функций $F(x)g(x)$, где $g(x)$ имеет очевидную первообразную $G(x)$, а $F(x)$ есть функция этой первообразной, т.е. $F(x) = u(G(x))$.

В данном случае

$$F(x) = \frac{\ln \sin x}{\sin x}, \quad g(x) = \cos x, \quad G(x) = \sin x, \quad F(x) = \frac{\ln G}{G} = u(G).$$

2. Тогда

$$\int \frac{\ln \sin x}{\sin x} \cos x \, dx = \int \frac{\ln \sin x}{\sin x} \, d \sin x = \int \frac{\ln G}{G} \, dG \,,$$

где $G = \sin x$.

3. Последний интеграл не является табличным, но к нему снова можно применить метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{\ln G}{G} \, dG = \int \ln G \, \frac{1}{G} \, dG = \int \ln G \, d \ln G = \frac{\ln^2 G}{2} + C = \frac{\ln^2 \sin x}{2} + C.$$

Ответ. $\int \operatorname{ctg} x \, \ln \sin x \, dx = \dfrac{\ln^2 \sin x}{2} + C.$

Условия задач. *Найти неопределенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int \frac{3 \operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1} \, dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x - \cos x}{(\cos^2 x + \sin x)^2} \, dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^4} \, dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} \, dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \, dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^3} \, dx.$

8. $\displaystyle\int \frac{2 \operatorname{arctg}(x+2)}{x^2+4x+5} \, dx.$

9. $\displaystyle\int \frac{3\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+x} \, dx.$

10. $\displaystyle\int \frac{2 \arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

Ответы.

1. $\operatorname{arctg}^3 x + C$.
2. $\dfrac{1}{\cos^2 x + \sin x} + C$.
3. $-\dfrac{1}{9(x^3 + 3x + 1)^3} + C$.
4. $\operatorname{tg}^3 x + C$.
5. $2\sqrt{\ln x} + C$.
6. $\dfrac{1}{2}\arcsin x^2 + C$.
7. $-\dfrac{1}{2(x\sin x)^2} + C$.
8. $\operatorname{arctg}^2(x+2) + C$.
9. $\ln(2x\sqrt{x} + x) + C$.
10. $\arcsin^2 x - \sqrt{1 - x^2} + C$.

7.2. Интегрирование по частям

Постановка задачи. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int F(x)g(x)\,dx.$$

План решения. Пусть $g(x)$ имеет очевидную первообразную $G(x)$, а $F(x)$ — дифференцируемая функция, причем ее производная $f(x) = F'(x)$ является более простой функцией, чем $F(x)$. Тогда применяем формулу интегрирования по частям

$$\int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,dx.$$

Если метод избран удачно, то интеграл в правой части этого равенства оказывается табличным или известным образом сводится к табличному, например, повторным интегрированием по частям.

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}.$$

Решение.

1. Представим подынтегральное выражение в виде произведения двух функций $F(x)g(x)$, где $g(x)$ имеет очевидную первообразную $G(x)$, а $F(x)$ — дифференцируемая функция, причем ее производная $f(x) = F'(x)$ является более простой функцией, чем $F(x)$.

В данном случае

$$F(x) = x, \quad g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad G(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(x) = F'(x) = 1.$$

2. Применяем формулу интегрирования по частям

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx.$$

3. Последний интеграл не является табличным, но к нему можно применить метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{1}{\cos x} \sin x\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\cos x =$$

$$= \begin{cases} -\ln\cos x + C_1 & \text{при} \quad \cos x > 0, \\ -\ln(-\cos x) + C_2 & \text{при} \quad \cos x < 0. \end{cases}$$

Ответ. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x + \begin{cases} \ln\cos x + C_1 & \text{при} \quad \cos x > 0, \\ \ln(-\cos x) + C_2 & \text{при} \quad \cos x < 0. \end{cases}$

Заметим, что если бы мы выбрали $g(x) = x$, то, дифференцируя функцию $F(x) = 1/\cos^2 x$ и применяя формулу интегрирования по частям, получили бы более сложный интеграл, чем исходный.

Условия задач. *Найти неопределенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx.$
2. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx.$
3. $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx.$
4. $\displaystyle\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx.$
5. $\displaystyle\int x \ln x\,dx.$
6. $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx.$
7. $\displaystyle\int e^{2x} \cos x\,dx.$
8. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx.$
9. $\displaystyle\int \sin\ln x\,dx.$
10. $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx.$

Ответы.

1. $xe^x + C$. 2. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

3. $2x \sin x - x^2 \cos x + 2\cos x + C$.

4. $(x+1)^2 \sin x + 2(x+1)\cos x + C$.

5. $\dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$. 6. $-x \operatorname{ctg} x + \ln \sin x + C$.

7. $\dfrac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C$.

8. $\dfrac{x^2}{3} \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{6}\ln(x^2+1) + C$.

9. $\dfrac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$. 10. $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

7.3. Интегрирование рациональных функций с простыми вещественными корнями знаменателя

Постановка задачи. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\, dx.$$

План решения.

1. Введем обозначения:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Сравним степени числителя $P_n(x)$ и знаменателя $Q_m(x)$.

Если подынтегральная функция — неправильная рациональная дробь, т.е. степень числителя n больше или равна степени знаменателя m, то сначала выделяем целую часть рациональной функции, поделив числитель на знаменатель:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{\widetilde{P}_k(x)}{Q_m(x)} \quad (k < m).$$

Здесь многочлен $\widetilde{P}_k(x)$ — остаток от деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$, причем степень $\widetilde{P}_k(x)$ меньше степени $Q_m(x)$.

2. Разложим правильную рациональную дробь

$$\frac{\widetilde{P}_k(x)}{Q_m(x)}$$

на элементарные дроби. Если ее знаменатель имеет простые вещественные корни $r_1, r_2, \ldots, r_m$, т.е. $Q_m(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_m)$, то разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{\widetilde{P}_k(x)}{Q_m(x)} \equiv \frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2} + \ldots + \frac{A_m}{x - r_m}.$$

3. Для вычисления неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ приводим к общему знаменателю дроби в правой части тождества, после чего приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях слева и справа. Получим систему m уравнений с m неизвестными, которая имеет единственное решение.

4. Интегрируем целую часть (если она есть) и элементарные дроби, используя табличные интегралы, и записываем ответ

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx =$$

$$= F(x) + A_1 \ln|x - r_1| + A_2 \ln|x - r_2| + \ldots + A_m \ln|x - r_m| + C,$$

где $F(x) = \int M_{n-m}(x)\,dx$ — многочлен степени $n - m + 1$.

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)}\,dx.$$

Решение.

1. Подынтегральная функция — неправильная рациональная дробь, так как $n = m = 3$. Выделим целую часть:

$$\frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} = 2 - \frac{4x^2 + 24x + 8}{x(x+4)(x-2)}.$$

2. Так как знаменатель последней дроби имеет три различных вещественных корня $x = 0$, $x = -4$ и $x = 2$, то ее разложение на

элементарные дроби имеет вид

$$\frac{4x^2+24x+8}{x(x+4)(x-2)} \equiv \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+4} + \frac{A_3}{x-2}.$$

3. Чтобы найти коэффициенты A_1, A_2, A_3, приводим к общему знаменателю дроби в правой части тождества:

$$\frac{4x^2+24x+8}{x(x+4)(x-2)} \equiv \frac{A_1(x^2+2x-8)+A_2(x^2-2x)+A_3(x^2+4x)}{x(x+4)(x-2)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях слева и справа, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 4, \\ 2A_1 - 2A_2 + 4A_3 = 24, \\ -8A_1 = 8. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $A_1 = -1$, $A_2 = -1$, $A_3 = 6$.

Следовательно, подынтегральное выражение имеет вид

$$\frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)} = 2 - \left(-\frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{1}{x+4}\right) - \frac{6}{x-2}.$$

4. Интегрируем целую часть и элементарные дроби, используя табличные интегралы:

$$\int \frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)}\,dx = \int 2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+4}\,dx - \int \frac{6}{x-2}\,dx =$$

$$= 2x + \ln|x| + \ln|x+4| - 6\ln|x-2| + C.$$

Ответ. $\displaystyle\int \frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)}\,dx = 2x + \ln\frac{|x||x+4|}{(x-2)^6} + C.$

Условия задач. *Найти неопределенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)}\,dx.$
3. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx.$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-13x^2+36}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^5+3x^4-3x^2+2}{x^2-1}\,dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x(x-2)(x+2)}\,dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{2x^3-8x^2+4x-4}{x(x-1)(x-4)}\,dx.$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-15x+18}{x(x-3)(x+3)}\,dx.$

9. $\displaystyle\int \frac{2x^4-4x^3-8x^2+5x-10}{(x-1)(x-3)(x+2)}\,dx.$

10. $\displaystyle\int \frac{2x^6-4x^4+6x^3-18x^2+8}{x^5-5x^3+4x}\,dx.$

Ответы.

1. $\ln\left|\dfrac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right|+C.$

2. $\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{|(x-1)(x+3)^3|}{(x+2)^4}+C.$

3. $\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{(x+1)^4|x-2|^5}{(x-1)^4|x+2|^5}+C.$

4. $\dfrac{1}{60}\ln\dfrac{(x-3)^2|x+2|^3}{(x+3)^2|x-2|^3}+C.$

5. $\dfrac{x^4}{4}+x^3+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C.$

6. $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\dfrac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$

7. $2x+\ln\left|\dfrac{(x-4)(x+1)^2}{x}\right|+C.$

8. $x+\ln\left|\dfrac{(x+3)^3(x-3)}{x^2}\right|+C.$

9. $x^2+\ln\left|\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x-3}\right|+C.$

10. $x^2+\ln\left|\dfrac{x^2(x-2)^2(x+1)^3(x-1)}{(x+2)^2}\right|+C.$

7.4. Интегрирование рациональных функций с кратными вещественными корнями знаменателя

Постановка задачи. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int \frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}\,dx.$$

План решения.

1. Введем обозначения:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Сравним степени числителя $P_n(x)$ и знаменателя $Q_m(x)$.

Если подынтегральная функция — неправильная рациональная дробь, т.е. степень числителя n больше или равна степени знаменателя m, то сначала выделяем целую часть рациональной функции, поделив числитель на знаменатель:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{\widetilde{P}_k(x)}{Q_m(x)} \quad (k < m).$$

Здесь многочлен $\widetilde{P}_k(x)$ — остаток от деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$, причем степень $\widetilde{P}_k(x)$ меньше степени $Q_m(x)$.

2. Разложим правильную рациональную дробь $\dfrac{\widetilde{P}_k(x)}{Q_m(x)}$ на элементарные дроби. Если ее знаменатель имеет вещественные корни $r_1, r_2, \ldots, r_s$ кратности $n_1, n_2, \ldots, n_s$ соответственно, т.е.

$$Q_m(x) = (x - r_1)^{n_1} (x - r_2)^{n_2} \ldots (x - r_m)^{n_s},$$

то разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{\widetilde{P}_k(x)}{Q_m(x)} \equiv \frac{A_{11}}{x - r_1} + \frac{A_{12}}{(x - r_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1n_1}}{(x - r_1)^{n_1}} +$$

$$+ \frac{A_{21}}{x - r_2} + \frac{A_{22}}{(x - r_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2n_2}}{(x - r_2)^{n_2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{A_{s1}}{x - r_s} + \frac{A_{s2}}{(x - r_s)^2} + \ldots + \frac{A_{sn_s}}{(x - r_s)^{n_s}}.$$

3. Чтобы найти коэффициенты $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{sn_s}$, приводим к общему знаменателю дроби в правой части тождества, после чего приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях слева и справа. Получим систему $n_1 + n_2 + \ldots + n_s$ уравнений с $n_1 + n_2 + \ldots + n_s$ неизвестными, которая имеет единственное решение.

4. Интегрируем целую часть (если она есть) и элементарные дроби, используя табличные интегралы, и записываем ответ

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx =$$

$$= F(x) + A_{11}\ln|x-r_1| + \frac{(-1)A_{12}}{x-r_1} + \ldots + \frac{A_{1n_1}}{(1-n_1)(x-r_1)^{n_1-1}} + \ldots$$

$$\ldots + A_{s1}\ln|x-r_s| + \frac{(-1)A_{s2}}{x-r_s} + \ldots + \frac{A_{sn_s}}{(1-n_s)(x-r_s)^{n_s-1}},$$

где $F(x) = \int M_{n-m}(x)\,dx$ — многочлен степени $n-m+1$.

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$$

Решение.

1. Подынтегральная функция — правильная рациональная дробь.

2. Разложим ее на элементарные дроби. Так как знаменатель имеет два действительных корня: $r_1 = 2$ кратности единица и $r_2 = -2$ кратности три, разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3} = \frac{A_{11}}{x-2} + \frac{A_{21}}{x+2} + \frac{A_{22}}{(x+2)^2} + \frac{A_{23}}{(x+2)^3}.$$

3. Чтобы найти коэффициенты $A_{11},\ldots,A_{23}$, приводим к общему знаменателю дроби в правой части тождества:

$$\frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3} \equiv$$

$$\equiv \frac{A_{11}(x+2)^3 + A_{21}(x-2)(x+2)^2 + A_{22}(x-2)(x+2) + A_{23}(x-2)}{(x-2)(x+2)^3}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях слева и справа, получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} A_{11} + A_{21} = 1, \\ 6A_{11} + 4A_{21} + A_{22} = 6, \\ 12A_{11} - 2A_{21} + A_{23} = 13, \\ 8A_{11} - 4A_{21} - 4A_{22} - 2A_{23} = 6. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$A_{11} = 1, \quad A_{21} = 0, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = 1.$$

Следовательно, подынтегральное выражение имеет вид

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x+2)^3}.$$

3. Интегрируем сумму элементарных дробей, используя табличные интегралы:

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{(x+2)^3}\,dx = \ln|x-2| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C.$$

Ответ. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3}\,dx = \ln|x-2| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C.$

Условия задач. *Найти неопределенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x+1)(x-1)}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}\,dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-2)^2}\,dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}\,dx.$

8. $\displaystyle\int \frac{5x^3 - 17x^2 + 18x - 5}{(x-1)^3(x-2)}\,dx.$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx.$

10. $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)}\,dx.$

Ответы.

1. $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{x} + C.$

2. $\displaystyle\ln|x-5| + \frac{3}{2(x-2)^2} + C.$

3. $\displaystyle\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$

4. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln|(x+1)(x-1)^3| + \frac{3}{2(x+1)} + C.$

5. $\displaystyle \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + C.$

6. $\displaystyle \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{2x} + C.$

7. $\displaystyle \frac{1}{2}\ln\frac{|(x-1)(x-3)|}{x^2} + \frac{1}{x-1} + C.$

8. $\displaystyle \ln|(x-1)^2(x-2)^3| + \frac{1}{2(x-1)^2} + C.$

9. $\displaystyle \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{2(x-1)} + C.$

10. $\displaystyle \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{1}{8}\ln|(x-1)^{31}(x+1)| - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{9}{4(x-1)} + C.$

7.5. Интегрирование рациональных функций с простыми комплексными корнями знаменателя

Постановка задачи. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\, dx.$$

План решения.

1. Введем обозначения:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Сравним степени числителя $P_n(x)$ и знаменателя $Q_m(x)$.

Если подынтегральная функция — неправильная рациональная дробь, т.е. степень числителя n больше или равна степени знаменателя m, то сначала выделяем целую часть рациональной функции, поделив числитель на знаменатель:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{\widetilde{P}_k(x)}{Q_m(x)} \quad (k < m).$$

Здесь многочлен $\widetilde{P}_k(x)$ — остаток от деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$, причем степень $\widetilde{P}_k(x)$ меньше степени $Q_m(x)$.

2. Разложим правильную рациональную дробь

$$\frac{\widetilde{P}_k(x)}{Q_m(x)}$$

на элементарные дроби. Если ее знаменатель имеет простые комплексные корни $r_k = u_k \pm iv_k$, т.е.

$$Q_m(x) = (x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2)\ldots(x^2 + p_s x + q_s),$$

где

$$x^2 + p_k x + q_k = [x - (u_k + iv_k)][x - (u_k - iv_k)],$$

то разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{\widetilde{P}_k(x)}{Q_m(x)} \equiv \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2 + p_2 x + q_2} + \ldots + \frac{A_s x + B_s}{x^2 + p_s x + q_s}.$$

3. Для вычисления неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_s$, $B_1, \ldots, B_s$ приводим к общему знаменателю дроби в правой части тождества, после чего приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях слева и справа. Получим систему $2s$ уравнений с $2s$ неизвестными, которая имеет единственное решение.

4. Интегрируем элементарные дроби вида

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}.$$

Выделяем в знаменателе полный квадрат $(x + p/2)^2 + (q - p^2/4)$ (поскольку $q - p^2/4 > 0$, можно обозначить $q - p^2/4 = a^2$) и делаем замену переменной $t = x - p/2$. Получим

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{At + Ap/2 + B}{t^2 + a^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{At}{t^2 + a^2}\,dt + \int \frac{Ap/2 + B}{t^2 + a^2}\,dt =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2 + a^2) + \frac{Ap/2 + B}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{Ap/2+B}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}.$$

5. Складываем результаты интегрирования целой части (если она есть) и элементарных дробей и записываем ответ.

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

Решение.

1. Подынтегральная функция — правильная рациональная дробь.

2. Разложим ее на элементарные дроби. Знаменатель имеет две пары комплексно-сопряженных корней: $r_{1,2}=-1/2\pm i\sqrt{3}/2$ и $r_{3,4}=\pm i$. Следовательно, разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+x+1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+1}.$$

3. Чтобы найти коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2, приводим к общему знаменателю дроби в правой части тождества:

$$\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} \equiv \frac{(A_1x+B_1)(x^2+1)+(A_2x+B_2)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях слева и справа, получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} A_1+A_2 = 2, \\ A_2+B_1+B_2 = 3, \\ A_1+A_2+B_2 = 3, \\ B_1+B_2 = 2. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$A_1=1,\quad A_2=1,\quad B_1=1,\quad B_2=1.$$

Следовательно, подынтегральное выражение имеет вид

$$\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

4. Интегрируя элементарные дроби, получим

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1,$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C_2.$$

Ответ. $$\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)(x^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Условия задач. *Найти неопределенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-8}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{7x^2-1}{x^4+4x^2-5}\,dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^5-x^2}\,dx.$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,dx.$

9. $\displaystyle\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}\,dx.$

10. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-16}\,dx.$

Ответы.

1. $\displaystyle -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + C.$

2. $\displaystyle 3\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

3. $\displaystyle \frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$

4. $\displaystyle \frac{1}{4}\ln|(x-1)^3(x+1)| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$

5. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{6}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$

6. $\frac{1}{16}\ln\frac{x^2+1}{x^2+9}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{24}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$

7. $\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

8. $x-\frac{1}{2}\ln[(x^2+2x+2)(x+1)^4]+3\operatorname{arctg}(x+1)+C.$

9. $3x+\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C.$

10. $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

7.6. Интегрирование выражений $R(\sin x, \cos x)$

Постановка задачи. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

где R — рациональная функция двух переменных.

План решения.

1. С помощью подстановки

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

интегралы от функций $R(\sin x, \cos x)$ приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной t. Действительно, подставляя в подынтегральное выражение

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt,$$

получаем

$$R(\sin x,\cos x)\,dx=R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt=R_1(t)\,dt.$$

Подстановка $t=\operatorname{tg}(x/2)$ называется *универсальной*.

2. Применяем формулу замены переменной в неопределенном интеграле

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

3. Вычисляем первообразную рациональной функции t и возвращаемся к переменной x, подставляя $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

Замечание. Если подынтегральная функция имеет специальный вид, то лучше применить подстановки, требующие меньше вычислений:

а) если

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x, \cos^2 x) \cos x,$$

то применяем подстановку $t = \sin x$. Действительно, подынтегральное выражение приобретает вид

$$R_1(\sin x, \cos^2 x) \cos x\, dx = R_1(t, 1-t^2)\, dt;$$

б) если

$$R(\sin x, \cos x) = R_2(\sin^2 x, \cos x) \sin x,$$

то применяем подстановку $t = \cos x$. Действительно, подынтегральное выражение приобретает вид

$$R_2(\sin^2 x, \cos x) \sin x\, dx = -R_2(1-t^2, t)\, dt;$$

в) если

$$R(\sin x, \cos x) = R_3(\operatorname{tg} x),$$

то применяем подстановку $t = \operatorname{tg} x$. Действительно, подынтегральное выражение приобретает вид

$$R_3(\operatorname{tg} x)\, dx = R_3(t) \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

Пример 1. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sin x}{2+\sin x}\, dx.$$

Решение.

1. Сделаем подстановку $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

Подставляя в подынтегральное выражение

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt,$$

получим

$$\frac{\sin x}{2+\sin x}\, dx = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{2+\dfrac{2t}{1+t^2}}\, \frac{2}{1+t^2}\, dt = \frac{2t}{(t^2+t+1)(t^2+1)}\, dt.$$

2. Применяем формулу замены переменной в неопределенном интеграле

$$\int \frac{\sin x}{2+\sin x}\, dx = \int \frac{2t}{(t^2+t+1)(t^2+1)}\, dt.$$

3. Вычисляем первообразную рациональной функции t:

$$\int \frac{2t}{(t^2+t+1)(t^2+1)}\, dt = 2\operatorname{arctg} t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Возвращаемся к переменной x, подставляя $t = \operatorname{tg}(x/2)$:

$$\int \frac{\sin x}{2+\sin x}\, dx = x - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ответ. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2+\sin x}\, dx = x - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}} + C.$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}\, dx.$$

Решение.

1. Так как подынтегральная функция имеет вид $R(\operatorname{tg} x)$, сделаем подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Подставляя в подынтегральное выражение

$$\operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

получим

$$\frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}\,dx = \frac{3t^2 - 1}{t^2 + 5}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

2. Применяем формулу замены переменной в неопределенном интеграле

$$\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}\,dx = \int \frac{3t^2 - 1}{t^2 + 5}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

4. Вычисляем первообразную рациональной функции t :

$$\int \frac{3t^2 - 1}{(t^2+5)(1+t^2)}\,dt = -\operatorname{arctg} t + \frac{4}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C.$$

Возвращаемся к переменной x, подставляя $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}\,dx = -x + \frac{4}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

Ответ. $\displaystyle\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}\,dx = -x + \frac{4}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}\right) + C.$

Условия задач. *Найти неопределенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x - 1}.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos 2x - \sin 2x}.$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 - \sin x}.$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x - 5}.$

6. $\displaystyle\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x}\,dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$

8. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x + \cos^3 x}{\sin^4 x + \sin^2 x}\,dx.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(1 + \cos x)}\,dx.$

10. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \cos x}\,dx.$

Ответы.

1. $\frac{1}{2}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C.$ 2. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x+1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}x+1-\sqrt{2}}\right|+C.$

3. $\operatorname{arctg}\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$ 4. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

5. $2\left(3+9\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1}+C.$ 6. $\ln(\operatorname{tg}^2 x+9)+\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{3}\right)+C.$

7. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)+C.$ 8. $\sin x-\frac{2}{\sin x}-6\operatorname{arctg}(\sin x)+C.$

9. $\frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{2(1+\cos x)}+C.$ 10. $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

7.7. Интегрирование выражений $\sin^{2m}x\cos^{2n}x$

Постановка задачи. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx,$$

где m,n — натуральные числа.

План решения.

Применяем формулы понижения степени

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

до тех пор, пока не придем к табличным интегралам или к интегралам, которые известным образом сводятся к табличным.

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int\sin^4 3x\cos^4 3x\,dx.$$

Решение. Применяя формулы понижения степени, имеем

$$\int\sin^4 3x\cos^4 3x\,dx=2^{-4}\int(2\sin 3x\cos 3x)^4\,dx=$$

$$= 2^{-4}\int \sin^4 6x\,dx = 2^{-6}\int (1-\cos 12x)^2\,dx =$$

$$= 2^{-6}\int dx - 2^{-5}\int \cos 12x\,dx + 2^{-6}\int \cos^2 12x\,dx =$$

$$= 2^{-6}x - \frac{2^{-5}}{12}\sin 12x + 2^{-7}\int (1+\cos 24x)\,dx =$$

$$= 2^{-6}x - \frac{2^{-5}}{12}\sin 12x + 2^{-7}x + 2^{-7}\int \cos 24x\,dx =$$

$$= 2^{-6}x - \frac{2^{-5}}{12}\sin 12x + 2^{-7}x + \frac{2^{-7}}{24}\sin 24x + C.$$

Ответ.

$$\int \sin^4 3x\,\cos^4 3x\,dx = \frac{3}{2^7}x - \frac{1}{3\cdot 2^7}\sin 12x + \frac{1}{3\cdot 2^{10}}\sin 24x + C.$$

Условия задач. *Найти неопределенные интегралы.*

1. $\int \cos^2 2x\,dx.$
2. $\int \cos^6 3x\,dx.$
3. $\int \cos^4 \frac{x}{2}\,dx.$
4. $\int \sin^4 4x\,dx.$
5. $\int \sin^6 2x\,dx.$
6. $\int \sin^2 8x \cos^2 8x\,dx.$
7. $\int \cos^4 x \sin^2 x\,dx.$
8. $\int \cos^2 x \sin^4 x\,dx.$
9. $\int \sin^4 x \cos^6 x\,dx.$
10. $\int \sin^6 x \cos^4 x\,dx.$

Ответы.

1. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 4x}{8} + C.$
2. $\dfrac{5x}{16} + \dfrac{\sin 6x}{12} + \dfrac{\sin 12x}{64} - \dfrac{\sin^3 6x}{144} + C.$

3. $\dfrac{3x}{8}+\dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{16}+C.$ 4. $\dfrac{3x}{8}-\dfrac{\sin 8x}{16}+\dfrac{\sin 16x}{128}+C.$

5. $\dfrac{5x}{16}-\dfrac{\sin 4x}{8}+\dfrac{3\sin 8x}{128}+\dfrac{\sin^3 4x}{96}+C.$ 6. $\dfrac{x}{8}-\dfrac{\sin 32x}{256}+C.$

7. $\dfrac{x}{16}-\dfrac{\sin 4x}{64}+\dfrac{\sin^3 2x}{48}+C.$ 8. $\dfrac{x}{16}-\dfrac{\sin 4x}{64}-\dfrac{\sin^3 2x}{48}+C.$

9. $\dfrac{3x}{256}-\dfrac{\sin 4x}{256}+\dfrac{\sin 8x}{2048}+\dfrac{\sin^5 2x}{320}+C.$

10. $\dfrac{3x}{256}-\dfrac{\sin 4x}{256}+\dfrac{\sin 8x}{2048}-\dfrac{\sin^5 2x}{320}+C.$

7.8. Интегрирование выражений $R\left(x,\ \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \ldots\right)$

Постановка задачи. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int R\left(x,\ \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \ldots\right)dx,$$

где R — рациональная функция и $p,q,\ldots$ — натуральные числа.

План решения.

1. С помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n,$$

где n — общий знаменатель дробей $1/p, 1/q, \ldots$, приходим к интегралам от рациональных функций.

2. Вычисляем первообразную рациональной функции t и возвращаемся к переменной x, подставляя $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x})(x+2)^2}\,dx.$$

Решение.

1. Чтобы сделать подстановку, приводящую к интегралу от рациональной функции, нужно преобразовать подынтегральную функцию так, чтобы она содержала корни любой степени, но из о д н о г о и т о г о ж е выражения вида $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Преобразуем подынтегральное выражение, выделяя $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$:

$$\int \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x})(x+2)^2}\,dx = \int \frac{4\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}-1}{\left(1+4\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}\right)(x+2)^2}\,dx$$

2. Применяем подстановку $t=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$:

$$x=\frac{4}{t^2+1}-2, \quad dx=-\frac{8t}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Делая замену переменной в неопределенном интеграле, получаем

$$\int \frac{4\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}-1}{\left(1+4\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}\right)(x+2)^2}\,dx = \int \frac{4t-1}{4t+1}\,\frac{(t^2+1)^2}{16}\left(-\frac{8t}{(t^2+1)^2}\right)dt.$$

3. Вычисляем первообразную рациональной функции t:

$$\frac{1}{2}\int \frac{t(4t-1)}{4t+1}\,dt = \frac{1}{2}\left[\int\left(t-\frac{1}{2}\right)dt+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{4t+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t+\frac{1}{16}\ln|4t+1|+C.$$

Возвращаемся к переменной x, подставляя $t=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$.

Ответ. $$\int \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x})(x+2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{2-x}{2+x}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}+\frac{1}{16}\ln\left(4\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}+1\right)+C.$$

Условия задач. *Найти неопределенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.
5. $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2\sqrt{2x+3}}$.
6. $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.
7. $\displaystyle\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\,\frac{dx}{x^3}$.
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$.
9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x+8}-1}{(x+8)(1+\sqrt[3]{x+8})}\,dx$.
10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

Ответы.

1. $(1+\sqrt[4]{2x-1})^2+\ln(\sqrt[4]{2x-1}-1)^2+C$. 2. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$.

3. $6\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$.

4. $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$. 5. $\displaystyle -\frac{\sqrt{2x+3}}{x}+C$.

6. $\displaystyle \frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$.

7. $\displaystyle \frac{5}{4}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{4/5}-\frac{5}{9}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{9/5}+C$. 8. $\displaystyle -3\left(\frac{x-5}{x-7}\right)^{1/6}+C$.

9. $6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+8}-6\ln\sqrt[6]{x+8}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+8}|+C$.

10. $\displaystyle \ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C$.

7.9. Интегрирование выражений $R(x,\sqrt{a^2\pm x^2})$ и $R(x,\sqrt{x^2-a^2})$

Постановка задачи. *Найти неопределенные интегралы вида:*

а) $\displaystyle\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx$;

б) $\displaystyle\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx$;

в) $\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx$;

где R — рациональная функция.

План решения.

1. Чтобы избавиться от радикала, используем тригонометрические или гиперболические подстановки:

а) $x = a\sin t$ или $x = a\,\mathrm{th}\,t$;

б) $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x = a\,\mathrm{sh}\,t$;

в) $x = \dfrac{a}{\cos t}$ или $x = a\,\mathrm{ch}\,t$.

2. Применив формулу замены переменной в неопределенном интеграле, получим интегралы вида

$$\int R_1(\sin t, \cos t)\,dt.$$

3. Вычисляем последний интеграл с помощью известных подстановок или методом понижения степени.

4. Возвращаемся к переменной x и записываем ответ.

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

Решение.

1. Чтобы избавиться от радикала, воспользуемся подстановкой $x = 3\sin t$. Тогда $dx = 3\cos t$ и $\sqrt{9-x^2} = 3\cos t$.

2. Сделаем замену переменной в неопределенном интеграле:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{9\sin^2 t\; 3\cos t}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}\,dt = 9\int \sin^2 t\,dt.$$

3. Применяя формулы понижения степени, получим

$$9\int \sin^2 t\,dt = \frac{9}{2}\int (1-\cos 2t)\,dt = \frac{9}{2}\,t - \frac{9}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{9}{2}\,t - \frac{9}{4}\sin 2t + C.$$

4. Возвращаемся к переменной x, подставляя $t = \arcsin(x/3)$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right) + C.$$

Замечание. Ответ можно упростить, если воспользоваться тем, что $\sin 2t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$ и $\sin t = x/3$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C.$$

Ответ. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C.$

Условия задач. *Найти неопределенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx.$
2. $\displaystyle\int \sqrt{2+x^2}\,dx.$
3. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-4}\,dx.$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$
5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\,dx.$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}.$
7. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}}.$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(2+x^2)^3}}.$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}.$

Ответы.

1. $2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$
2. $\ln(x+\sqrt{2+x^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{2+x^2} + C.$
3. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C.$ 4. $\arccos\frac{1}{x} + C.$
5. $3\ln\left|\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-x^2} + C.$ 6. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}\right| + C.$
7. $2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} + C.$ 8. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$
9. $\dfrac{x}{2\sqrt{2+x^2}} + C.$ 10. $\dfrac{1}{2}\left(\arccos\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right) + C.$

7.10. Интегрирование дифференциального бинома

Постановка задачи. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{1}$$

где m, n и p — рациональные числа.

План решения. Выражение $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ называется дифференциальным биномом. Условия его интегрируемости в элементарных функциях получены П. Л. Чебышевым.

Условия Чебышева. Интеграл (1) выражается через конечную комбинацию элементарных функций в следующих трех случаях:

1) p — целое число; в этом случае подстановка $x=z^s$, где s — общий знаменатель дробей m и n, приводит к интегралу от рациональной функции.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ — целое число; в этом случае подстановка $a+bx^n=z^s$, где s — знаменатель дроби p, приводит к интегралу от рациональной функции.

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ — целое число; в этом случае подстановка $ax^{-n}+b=z^s$, где s — знаменатель дроби p, приводит к интегралу от рациональной функции.

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}\,dx.$$

Решение. Перепишем интеграл в виде

$$\int\frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}\,dx=\int x^{-7/5}(1+x^{1/3})^{1/5}\,dx.$$

Подынтегральное выражение имеет вид $x^m(1+x^n)^p$ при

$$m=-\frac{7}{5},\quad n=\frac{1}{3},\quad p=\frac{1}{5},\quad \frac{m+1}{n}+p=-1.$$

Следовательно, имеет место третий случай интегрируемости.

Применяя подстановку

$$x^{-1/3}+1=z^5$$

и учитывая, что

$$x=(z^5-1)^{-3}, \quad dx=-3(z^5-1)^{-4}\,5z^4dz,$$

получаем

$$\int x^{-7/5}(1+x^{1/3})^{1/5}\,dx=$$

$$=\int (z^5-1)^{21/5}(1+(z^5-1)^{-1})^{1/5}\,\frac{(-15)z^4}{(z^5-1)^4}\,dz=$$

$$=-\frac{15}{6}z^6+C=-\frac{5}{2}(x^{-1/3}+1)^{6/5}+C=-\frac{5}{2}\left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{6/5}+C.$$

Ответ. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\,\sqrt[5]{x^2}}\,dx=-\frac{5}{2}\left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{6/5}+C.$

Условия задач. *Найти неопределенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}\,dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}\,dx.$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^3}}\,dx.$
4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx.$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\,\sqrt[3]{2-x^2}}\,dx.$
6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,dx.$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}\,dx.$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{x\,\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx.$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,dx.$

Ответы.

1. $\displaystyle -\left(\frac{1+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{4/3}+C.$
2. $\displaystyle -\frac{2}{3}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{3/2}+C.$

3. $\dfrac{2}{3}\ln(\sqrt{1+x^3}-1)-\ln|x|+C.$

4. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C.$

5. $-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt[3]{2-x^3}}{x}\right)^2+C.$ 6. $\dfrac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C.$

7. $\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$ 8. $-\dfrac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8}+\dfrac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}+C.$

9. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+\ln\dfrac{|x|}{(\sqrt[3]{x}+1)^3}+C.$

10. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$

Глава 8

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

При изучении темы ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ вы познакомитесь с формулой Ньютона–Лейбница и научитесь применять ее для вычисления определенных интегралов, используя технику нахождения первообразных. Вы научитесь применять определенные интегралы для решения геометрических задач (вычисление площадей плоских фигур, длин дуг кривых и объемов тел).

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете найти новые пределы интегрирования (при использовании различных подстановок), вычислить первообразные и применить формулу Ньютона–Лейбница, выполнить все численные расчеты и проверить правильность полученных вами результатов.

8.1. Интегрирование подведением под знак дифференциала

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Вычислить определенный интеграл*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx.$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Пусть $g(x)$ имеет очевидную первообразную $G(x)$, а $F(x)$ есть функция этой первообразной, т.е. $F(x) = u(G(x))$. Тогда

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = \int_a^b u(G(x))G'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta u(G)\,dG,$$

где $\alpha = G(a)$, $\beta = G(b)$.

Такого рода преобразование называется подведением под знак дифференциала.

Если метод избран удачно, то последний интеграл оказывается табличным или известным образом сводится к табличному, после чего применяем формулу Ньютона–Лейбница.

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^4+1}.$$

Решение.

1. Представим подынтегральное выражение в виде произведения двух функций $F(x)g(x)$, где $g(x)$ имеет очевидную первообразную $G(x)$, а $F(x)$ есть функция этой первообразной, т.е. $F(x) = u(G(x))$.

В данном случае

$$F(x)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+(x^2)^2}, \quad g(x) = 2x, \quad G(x) = x^2, \quad F(x)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+G^2} = u(G).$$

2. Тогда

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+(x^2)^2}\,dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+G^2}\,dG,$$

где $G = x^2$ и $G(0) = 0$, $G(1) = 1$.

3. Последний интеграл является табличным. Применяем формулу Ньютона–Лейбница:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+G^2}\,dG = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} G\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{8}.$

Условия задач. *Вычислить определенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3}\,dx.$

3. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^3+1}{(x^4+4x+2)^2}\,dx.$

4. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}\,dx.$

5. $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{1+\ln^3 x}{x}\,dx.$

6. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

7. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^3}\,dx.$

8. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{2\,\mathrm{arctg}\,x+x}{1+x^2}\,dx.$

9. $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{3\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+x}\,dx.$

10. $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{2\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Ответы. 1. $1/4$. 2. $-1/4$. 3. $5/56$. 4. 1. 5. $5/4$. 6. $\pi/12$. 7. $14/\pi^2$. 8. $\pi^2/16+\ln\sqrt{2}$. 9. $\ln(20/3)$. 10. $(\pi^2-18\sqrt{3}+36)/36$.

8.2. Интегрирование по частям

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Вычислить определенный интеграл*

$$\int\limits_a^b F(x)g(x)\,dx.$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Пусть на отрезке $[a,b]$ функция $g(x)$ имеет очевидную первообразную $G(x)$, а $F(x)$ — дифференцируемая функция, причем ее производная $f(x)=F'(x)$ является более простой функцией, чем $F(x)$. Тогда применяем формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x)\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

Если метод избран удачно, то интеграл в правой части этого равенства оказывается табличным или известным образом сводится к табличному, например повторным интегрированием по частям.

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 x\ln^2 x\,dx.$$

Решение.

1. Представим подынтегральное выражение в виде произведения двух функций $F(x)g(x)$, где $g(x)$ имеет очевидную первообразную $G(x)$, а $F(x)$ — дифференцируемая функция, причем ее производная $f(x)=F'(x)$ является более простой функцией, чем $F(x)$.

В данном случае

$$F(x)=\ln^2 x,\quad g(x)=x,\quad G(x)=\frac{x^2}{2},\quad f(x)=F'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}.$$

2. Применяем формулу интегрирования по частям

$$\int_1^2 x\ln^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx=2\ln^2 2-\int_1^2 x\ln x\,dx.$$

3. Последний интеграл не является табличным, но к нему можно повторно применить формулу интегрирования по частям:

$$\int_1^2 x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=2\ln 2-\frac{x^2}{4}\Big|_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}.$$

Ответ. $\displaystyle\int_1^2 x\ln^2 x\,dx=2\ln^2 2-2\ln 2+\frac{3}{4}.$

Условия задач. *Вычислить определенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx.$

3. $\int\limits_1^2 \ln x\,dx.$ 4. $\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx.$

5. $\int\limits_1^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$ 6. $\int\limits_0^1 \arcsin^2 x\,dx.$

7. $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx.$ 8. $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

9. $\int\limits_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx.$ 10. $\int\limits_1^{e^{\pi/2}} \cos\ln x\,dx.$

Ответы. 1. $(e-2)/e$. 2. $(\pi-2)/4$. 3. $2\ln 2-1$. 4. 4π. 5. $\pi/6-\sqrt{3}+1$. 6. $\pi^2/4-2$. 7. $e-2$. 8. $2\pi/3-\ln\operatorname{tg}(5\pi/12)$. 9. $3(e^{\pi}-1)/5$. 10. $(e^{\pi/2}-1)/2$.

8.3. Интегрирование выражений $R(\sin x, \cos x)$

Постановка задачи. *Вычислить определенный интеграл*

$$\int\limits_a^b R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

где R — рациональная функция двух переменных.

План решения.

1. Если a и b таковы, что функция $\operatorname{tg}(x/2)$ определена на $[a, b]$, то с помощью подстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

интегралы от функций $R(\sin x, \cos x)$ приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной t. Действительно, подставляя в подынтегральное выражение

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt,$$

получаем

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt = R_1(t)\,dt.$$

Подстановка $t = \operatorname{tg}(x/2)$ называется *универсальной.*

2. Находим новые пределы интегрирования

$$\alpha = \operatorname{tg}\frac{a}{2}, \quad \beta = \operatorname{tg}\frac{b}{2}.$$

3. Применяем формулу замены переменной в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b R(\sin x, \cos x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

4. Вычисляем первообразную рациональной функции t и применяем формулу Ньютона–Лейбница.

Замечание. Если подынтегральная функция имеет специальный вид, то лучше применить подстановки, требующие меньших вычислений:

а) если $R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x, \cos^2 x)\cos x$, то применяем подстановку $t = \sin x$. Действительно, подынтегральное выражение приобретает вид

$$R_1(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,dx = R_1(t, 1-t^2)\,dt;$$

б) если $R(\sin x, \cos x) = R_2(\sin^2 x, \cos x)\sin x$, то применяем подстановку $t = \cos x$. Действительно, подынтегральное выражение приобретает вид

$$R_2(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx = -R_2(1-t^2, t)\,dt;$$

в) если $R(\sin x, \cos x) = R_3(\operatorname{tg} x)$, то применяем подстановку $t = \operatorname{tg} x$ (при условии, что функция $\operatorname{tg} x$ определена на $[a, b]$). Действительно, подынтегральное выражение приобретает вид

$$R_3(\operatorname{tg} x)\,dx = R_3(t)\,\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Пример 1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\sin x}\,dx.$$

Решение.

1. Поскольку функция $\operatorname{tg}(x/2)$ определена на $[0,\pi/2]$, сделаем подстановку

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Подставляя в подынтегральное выражение

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt,$$

получим

$$\frac{\sin x}{2+\sin x}\,dx = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{2+\dfrac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{2t}{(t^2+t+1)(t^2+1)}\,dt.$$

2. Находим новые пределы интегрирования

$$t(0)=0, \quad t\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

3. Применяем формулу замены переменной в определенном интеграле

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{2t}{(t^2+t+1)(t^2+1)}\,dt.$$

4. Вычисляем первообразную рациональной функции t и применяем формулу Ньютона–Лейбница

$$\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+t+1)(t^2+1)}\,dt = 2\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}\,dx.$$

Решение.

1. Так как подынтегральная функция имеет вид $R(\operatorname{tg} x)$ и функция $\operatorname{tg} x$ определена на $[0, \arccos(1/\sqrt{6})]$, сделаем подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Подставляя в подынтегральное выражение

$$\operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

получаем рациональную функцию t:

$$\frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}\,dx = \frac{3t^2 - 1}{t^2+5}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

2. Находим новые пределы интегрирования:

$$\operatorname{tg}(0) = 0, \quad \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \sqrt{5}.$$

3. Применяем формулу замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_0^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}\,dx = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{3t^2 - 1}{t^2+5} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

4. Вычисляем первообразную рациональной функции t и применяем формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{3t^2 - 1}{t^2+5} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\operatorname{arctg} t\Big|_0^{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg}\sqrt{5}.$$

Ответ. $$\int_0^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg}\sqrt{5}.$$

Условия задач. *Вычислить определенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{5+4\sin x+3\cos x}\,dx.$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3+5\sin x+3\cos x}\,dx.$
3. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x}\,dx.$
4. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\cos x}\,dx.$
5. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}\,dx.$
6. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2}{\sin^4 x}\,dx.$
7. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx.$
8. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{4\cos^2 x-2\sin 2x+\sin^2 x}\,dx.$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{5+\cos^2 x}\,dx.$
10. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{2\sin x+3\cos x}{\sin^2 x\cos x+9\cos^3 x}\,dx.$

Ответы. 1. $\frac{1}{6}$. 2. $\frac{1}{5}\ln\frac{8}{3}$. 3. $\ln 2-\frac{1}{2}$. 4. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}$. 5. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln 3$. 6. $\frac{1}{3}$. 7. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1+\ln\sqrt{3})$. 8. $\frac{1}{2}$. 9. $\frac{1}{\sqrt{30}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{6}}$. 10. $\ln\frac{10}{9}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

8.4. Интегрирование выражений $\sin^{2m} x\,\cos^{2n} x$

Постановка задачи. *Вычислить определенный интеграл*

$$\int_a^b \sin^{2m} x\,\cos^{2n} x\,dx,$$

где m и n — натуральные числа.

План решения. Применяем формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

до тех пор, пока не придем к табличным интегралам или к интегралам, которые известным образом сводятся к табличным.

Замечание. Полезно иметь в виду, что

$$\int_0^{2\pi} \sin kx\,dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos kx\,dx = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 3x\,\cos^4 3x\,dx.$$

Решение. Применяя формулы понижения степени, имеем

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 3x\,\cos^4 3x\,dx = 2^{-4}\int_0^{2\pi} (2\sin 3x\cos 3x)^4\,dx =$$

$$= 2^{-4}\int_0^{2\pi} \sin^4 6x\,dx = 2^{-6}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 12x)^2\,dx =$$

$$= 2^{-6}\int_0^{2\pi} dx - 2^{-5}\int_0^{2\pi} \cos 12x\,dx + 2^{-6}\int_0^{2\pi} \cos^2 12x\,dx =$$

$$= 2^{-5}\pi + 2^{-7}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 24x)\,dx =$$

$$= 2^{-5}\pi + 2^{-7}\int_0^{2\pi} dx + 2^{-7}\int_0^{2\pi} \cos 24x\,dx = 2^{-5}\pi + 2^{-6}\pi = \frac{3\pi}{64}.$$

Ответ. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^4 3x\,\cos^4 3x\,dx = \frac{3\pi}{64}.$

Условия задач. *Вычислить определенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} 2^3 \sin^2 x \cos^2 x\, dx.$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2^3 \sin^2 x \cos^4 x\, dx.$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4}\, dx.$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2^5 \cos^6 x\, dx.$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2^5 \sin^6 x\, dx.$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x\, dx.$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^6 x\, dx.$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx.$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2m} x\, dx.$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \cos^{2m} x\, dx.$

Ответы. 1. π. 2. π. 3. π. 4. 5π. 5. 5π. 6. 3π. 7. π.

8. $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\dfrac{\pi}{2}$. 9. $\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\,\dfrac{\pi}{2}$. 10. $\dfrac{(2n-1)!!\,(2m-1)!!}{(2n+2m)!!}\,\dfrac{\pi}{2}$.

8.5. Интегрирование выражений $R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\right)$

Постановка задачи. *Вычислить определенный интеграл*

$$\int_{\alpha}^{\beta} R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\right) dx,$$

где R — рациональная функция и $p, q, \ldots$ — натуральные числа.

План решения. С помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n,$$

где n — общий знаменатель дробей $1/p, 1/q, \ldots$, приходим к интегралам от рациональных функций.

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^2 \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x})(x+2)^2}\,dx.$$

Решение.

1. Чтобы сделать подстановку, приводящую к интегралу от рациональной функции, нужно преобразовать подынтегральную функцию так, чтобы она содержала корни любой степени, но из одного и того же выражения вида $\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Поэтому преобразуем подынтегральное выражение, выделяя $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$:

$$\int_0^2 \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x})(x+2)^2}\,dx=\int_0^2 \frac{4\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}-1}{\left(1+4\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}\right)(x+2)^2}\,dx.$$

2. Применяем подстановку $\dfrac{2-x}{2+x}=t^2$:

$$x=\frac{4}{t^2+1}-2, \quad dx=-\frac{8t}{(t^2+1)^2}\,dt, \quad t(0)=1, \quad t(2)=0.$$

Делая замену переменной в определенном интеграле, получаем

$$\int_0^2 \frac{4\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}-1}{\left(1+4\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}\right)(x+2)^2}\,dx=\int_1^0 \frac{4t-1}{4t+1}\,\frac{(t^2+1)^2}{16}\left(-\frac{8t}{(t^2+1)^2}\right)dt.$$

Вычисляем первообразную рациональной функции и применяем формулу Ньютона–Лейбница:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{t(4t-1)}{4t+1}\,dt = \frac{1}{4}t^2\,\Big|_0^1 - \frac{1}{4}t\,\Big|_0^1 + \frac{1}{16}\ln|4t+1|\,\Big|_0^1 = \frac{\ln 5}{16}.$$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x})(x+2)^2}\,dx = \frac{\ln 5}{16}.$

Условия задач. *Вычислить определенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx.$

2. $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\,dx.$

3. $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}\,dx.$

4. $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx.$

5. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx.$

6. $\displaystyle\int\limits_1^8 \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx.$

7. $\displaystyle\int\limits_1^2 x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$

8. $\displaystyle\int\limits_0^{63} \frac{6-\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{(x+1)^3}-7(x+1)-6\sqrt[4]{(x+1)^3}}\,dx.$

9. $\displaystyle\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx.$

10. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x-2}}{(\sqrt{3x-2}+4\sqrt{2-x})(3x-2)^2}\,dx.$

Ответы. 1. $7+2\ln 2$. 2. $\pi/6$. 3. $2-\ln 2$. 4. $3(\sqrt[3]{9}-1)/8$. 5. $[\sqrt{2}-1-\ln(1+\sqrt{2})]/2$. 6. $9/2-3\pi/2+6\operatorname{arctg}2$. 7. $\ln(2+\sqrt{3})/2$. 8. $\ln(16/81)$. 9. $8+3\sqrt{3}2\pi/2$. 10. $\ln 5/16$.

8.6. Интегрирование выражений $R(x,(a^2 \pm x^2)^{1/2})$ и $R(x,(x^2-a^2)^{1/2})$

Постановка задачи. *Вычислить определенные интегралы вида:*

а) $\displaystyle\int_\alpha^\beta R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx$;

б) $\displaystyle\int_\alpha^\beta R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx$;

в) $\displaystyle\int_\alpha^\beta R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx$;

где R — рациональная функция.

План решения.

1. Чтобы избавиться от радикала, используем тригонометрические или гиперболические подстановки:

а) $x = a\sin t$ или $x = a\,\mathrm{th}\,t$;

б) $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x = a\,\mathrm{sh}\,t$;

в) $x = \dfrac{a}{\cos t}$ или $x = a\,\mathrm{ch}\,t$.

2. Применив формулу замены переменной в определенном интеграле, получим интегралы вида

$$\int_{t_1}^{t_2} R_1(\sin t,\cos t)\,dt \quad \text{или} \quad \int_{t_1}^{t_2} R_1(\mathrm{sh}\,t,\mathrm{ch}\,t)\,dt.$$

3. Вычисляем полученные интегралы с помощью известных подстановок или методом понижения степени.

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

Решение.

1. Чтобы избавиться от радикала, используем подстановку

$x = 3\sin t$. Тогда

$$dx = 3\cos t\,dt, \quad t(0) = \arcsin 0 = 0, \quad t\left(\frac{3}{2}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

и $\sqrt{9-x^2} = |3\cos t| = 3\cos t$, поскольку $\cos t > 0$ при $t \in [0, \pi/6]$.

2. Сделаем замену переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int\limits_0^{\pi/6} \frac{9(\sin t)^2 \cdot 3\cos t}{\sqrt{9-9(\sin t)^2}}\,dt = 9\int\limits_0^{\pi/6} \sin^2 t\,dt.$$

3. Применяя формулы понижения степени, получим

$$9\int\limits_0^{\pi/6} \sin^2 t\,dt = \frac{9}{2}\int\limits_0^{\pi/6} (1-\cos 2t)\,dt = \frac{3}{4}\pi - \frac{9}{2}\int\limits_0^{\pi/6} \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{9}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi/6} = \frac{3}{4}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{3}{4}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{8}.$

Условия задач. *Вычислить определенные интегралы.*

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

2. $\displaystyle\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$

3. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx.$

4. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$

5. $\displaystyle\int\limits_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

6. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx.$

7. $\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx.$

8. $\displaystyle\int\limits_3^5 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx.$

9. $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx.$

10. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}.$

Ответы. 1. $\dfrac{\pi}{4}$. 2. $\dfrac{81\pi}{16}$. 3. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. 4. $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$. 5. $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$. 6. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 7. $\dfrac{128\sqrt{2}}{45}$. 8. $\dfrac{4}{45}$. 9. $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}+\ln\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. 10. $\dfrac{\pi}{4}$.

8.7. Вычисление площадей в декартовых координатах

Постановка задачи. *Вычислить площадь области, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \geq f_2(x)$ или $f_1(x) \leq f_2(x)$ для всех точек области) и, возможно, прямыми $x = a$ и $x = b$.*

План решения. Если область D задана системой неравенств

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ u(x) \leq y \leq v(x), \end{cases}$$

то площадь области D вычисляется по формуле

$$S_D = \int_a^b (v(x) - u(x))\,dx. \tag{1}$$

Если неравенства, определяющие область D, неизвестны, т.е. неизвестны a и b и неизвестно, какая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ больше другой на (a, b), то выполняем следующие операции.

1. Находим a и b как абсциссы точек пересечения графиков функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, т.е. решаем уравнение

$$f_1(x) = f_2(x).$$

2. Исследуем знак разности $f_1(x) - f_2(x)$ на $[a, b]$. Для этого достаточно вычислить значение $f_1(x) - f_2(x)$ в какой-нибудь точке из (a, b). Если оно положительно, то $f_1(x) \geq f_2(x)$ и, следовательно, $u(x) = f_2(x)$ и $v(x) = f_1(x)$. Если оно отрицательно, то $f_1(x) \leq f_2(x)$ и, следовательно, $u(x) = f_1(x)$ и $v(x) = f_2(x)$.

3. Применяем формулу (1) и находим S_D.

Записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример. Вычислить площадь области, ограниченной графиками функций

$$y = x^2 - 4x + 3, \quad y = -x^2 + 2x + 3.$$

Решение.

1. Находим абсциссы a и b точек пересечения графиков. Для этого решаем уравнение

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3.$$

Получаем $a = 0, \quad b = 3$.

2. Исследуем знак функции $\varphi = x^2 - 4x + 3 - (-x^2 + 2x + 3)$ на отрезке $[a, b] = [0, 3]$. Для этого придадим x любое значение из $(0, 3)$, например $x = 1$. Получаем, что $\varphi(1) = -4$. Следовательно, $\varphi < 0$ при $x \in (0, 3)$. Поэтому $x^2 - 4x + 3 \leq -x^2 + 2x + 3$ при $x \in [0, 3]$ и область D определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ x^2 - 4x + 3 \leq y \leq -x^2 + 2x + 3. \end{cases}$$

3. Применяем формулу (1) при $v(x) = -x^2 + 2x + 3, \quad u(x) = x^2 - 4x + 3, \quad a = 0$ и $b = 3$:

$$S_D = \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3 - x^2 + 4x - 3)\, dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx = 9.$$

Ответ. $S = 9$ (ед. длины)^2.

Условия задач. *Вычислить площади областей, ограниченных графиками заданных функций.*

1. $y = 32 - x^2, \quad y = -4x.$
2. $y = 3\sqrt{x}, \quad y = 3/x, \quad x = 4.$
3. $x = 5 - y^2, \quad x = -4y.$
4. $y = \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0, \quad x = \ln 4.$
5. $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0 \quad (x \geq 0).$
6. $y = \sqrt{x}, \quad y = 1/x, \quad x = 16.$

7. $x = 27 - y^2$, $x = -6y$.

8. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ $(x \leq 0)$.

9. $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3/2$.

10. $y = 2/x$, $y = 5e^x$, $y = 2$, $y = 5$.

Ответы. 1. 288. 2. $14 - 3\ln 4$. 3. 36. 4. $(6\sqrt{3} - 2\pi)/3$. 5. $\sqrt{2} - 1$. 6. $42 - \ln 16$. 7. 288. 8. $1 + \sqrt{2}$. 9. $(3\pi + \sqrt{3})/4$. 10. 3.

8.8. Вычисление длин дуг $y = f(x)$

Постановка задачи. *Вычислить длину кривой, заданной уравнением*

$$y = f(x)$$

и ограниченной точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$.

План решения. Длина l кусочно гладкой кривой $y = f(x)$, ограниченной точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \tag{1}$$

1. Находим $y' = f'(x)$.

2. Вычисляем дифференциал длины дуги

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

3. Находим длину дуги, вычисляя определенный интеграл (1). Записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Дифференцируя уравнение кривой, получим

$$y' = \frac{-e^x + e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh} x.$$

2. Вычисляем дифференциал длины дуги:

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, dx = \operatorname{ch} x\, dx.$$

3. Находим длину дуги, вычисляя определенный интеграл (1):

$$l = \int_0^3 \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x\Big|_0^3 = \operatorname{sh} 3.$$

Ответ. $l = \operatorname{sh} 3$ ед. длины.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Вычислить длины дуг заданных кривых.*

1. $y = \ln x, \qquad 2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6}.$
2. $y = \ln\cos x, \qquad 0 \le x \le \pi/6.$
3. $y = e^x, \qquad \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}.$
4. $y = \ln\sin x, \qquad \pi/3 \le x \le \pi/2.$
5. $y = 2\sqrt{x}, \qquad 1/3 \le x \le 1/8.$
6. $y = \operatorname{ch} x, \qquad 0 \le x \le 1.$
7. $y = x^2/2, \qquad 0 \le x \le 1.$
8. $y = 1 - \ln x, \qquad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$
9. $y = 1 - \operatorname{ch} x, \qquad 0 \le x \le 3.$
10. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \qquad 0 \le x \le 1/2.$

Ответы. 1. $2 + \ln\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 2. $\dfrac{\ln 3}{2}$. 3. $1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. 4. $\dfrac{\ln 3}{2}$. 5. $2 + \ln\dfrac{3}{2}$. 6. $\operatorname{sh} 1$. 7. $\dfrac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2}$. 8. $1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. 9. $\operatorname{sh} 3$. 10. $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

8.9. Вычисление длин дуг $x = x(t)$, $y = y(t)$

Постановка задачи. *Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta.$$

План решения. Если кривая задана уравнениями в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta.$$

где $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — кусочно-гладкие функции, то длина l дуги кривой определяется формулой

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt, \tag{1}$$

где α и β — значения параметра, соответствующие граничным точкам дуги.

1. Находим x_t' и y_t'.

2. Вычисляем дифференциал длины дуги

$$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt.$$

3. Находим длину дуги, вычисляя определенный интеграл (1).
Записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Решение.

1. Находим x_t' и y_t' :

$$x_t' = t^2\cos t, \qquad y_t' = t^2\sin t.$$

2. Вычисляем дифференциал длины дуги:

$$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt = \sqrt{t^4\cos^4 t + t^4\sin^4 t}\, dt = t^2\, dt.$$

3. Находим длину дуги, вычисляя определенный интеграл (1):

$$l = \int_0^\pi t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}.$$

Ответ. $l = \pi^3/3$ ед. длины.

Условия задач. *Вычислить длины дуг заданных кривых.*

1. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

2. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/3.$

3. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

4. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

5. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$

6. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

7. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/6.$

8. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/3.$

9. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/6.$

10. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi \le t \le \pi/2.$

Ответы. 1. 8. 2. $2\pi/3$. 3. 3. 4. 16. 5. $\sqrt{2}\,(e-1)$. 6. $\sqrt{2}\,(e^\pi - 1)$. 7. $\pi/2$. 8. $\pi^2/18$. 9. 3. 10. $8 - 4\sqrt{2}$.

8.10. Вычисление длин дуг $\varrho = \varrho(\varphi)$

Постановка задачи. *Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах*

$$\varrho = \varrho(\varphi), \qquad \alpha \leq \varphi \leq \beta.$$

План решения.

Если кусочно гладкая кривая задана уравнением в полярных координатах $\varrho = \varrho(\varphi)$, то длина дуги равна

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varrho(\varphi)^2 + \varrho'(\varphi)^2}\, d\varphi, \tag{1}$$

где α и β — значения φ, соответствующие граничным точкам дуги.

1. Находим $\varrho'(\varphi)$.

2. Вычисляем дифференциал длины дуги

$$dl = \sqrt{\varrho(\varphi)^2 + \varrho'(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

3. Находим длину дуги, вычисляя определенный интеграл (1).

Записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах

$$\varrho = 6\sin\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

Решение.

1. Находим $\varrho'(\varphi)$:

$$\varrho'(\varphi) = 6\cos\varphi.$$

2. Вычисляем дифференциал длины дуги:

$$dl = \sqrt{\varrho(\varphi)^2 + \varrho'(\varphi)^2}\, d\varphi = \sqrt{36\sin^2\varphi + 36\cos^2\varphi}\, d\varphi = 6\, d\varphi.$$

3. Находим длину дуги, вычисляя определенный интеграл (1):

$$l = \int\limits_{0}^{\pi/3} 6\, d\varphi = 6\varphi\big|_0^{\pi/3} = 2\pi.$$

Ответ. $l = 2\pi$ ед. длины.

Условия задач. *Вычислить длины дуг заданных кривой.*

1. $\varrho = \varphi, \quad 0 \le \varphi \le 1.$
2. $\varrho = \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}.$
3. $\varrho = 2\sin\varphi, \quad \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi.$
4. $\varrho = 1 - \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$
5. $\varrho = 1 + \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$
6. $\varrho = e^{2\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$
7. $\varrho = 1 + \sin\varphi, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}.$
8. $\varrho = 1 - \sin\varphi, \quad \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}.$
9. $\varrho = 3\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}.$
10. $\varrho = 3\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}.$

Ответы. 1. $[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]/2$. 2. $\pi/2$. 3. π. 4. 2. 5. 2. 6. $\sqrt{5}(e^{4\pi} - 1)/2$. 7. 2. 8. 2. 9. $\pi/2$. 10. π.

8.11. Вычисление объемов по площадям поперечных сечений

Постановка задачи. *Вычислить объем тела, если известны площади его поперечных сечений.*

План решения. Если $S = S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси OX и пересекающей ее в точке с абсциссой x, то объем части тела, заключенной между плоскостями $x = x_1$ и $x = x_2$, определяется формулой

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx. \tag{1}$$

1. Находим $S(x)$.

2. Подставляем $S(x)$ в формулу (1) и вычисляем определенный интеграл.

Записываем ответ, не забывая о размерности.

Замечание. Аналогично решается задача, если известны площади сечений плоскостями, перпендикулярными оси OY ($S(y)$) или оси OZ ($S(z)$).

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{196}=1, \quad z=0, \quad z=7.$$

Решение. Если $S=S(z)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси OZ и пересекающей ее в точке с аппликатой z, то объем части тела, заключенной между плоскостями $z=z_1$ и $z=z_2$, определяется формулой

$$V=\int_{z_1}^{z_2} S(z)\,dz. \tag{2}$$

1. Сечение заданного тела плоскостью $z=\text{const}$ определяется неравенством

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\leq 1-\frac{z^2}{196},$$

т.е. при $|z|<14$ является эллипсом

$$\frac{196x^2}{16(196-z^2)}+\frac{196y^2}{9(196-z^2)}\leq 1$$

с полуосями

$$a=\frac{4\sqrt{196-z^2}}{14}, \qquad b=\frac{3\sqrt{196-z^2}}{14}.$$

Площадь этого эллипса равна

$$S=\pi ab=\frac{3\pi}{49}(196-z^2).$$

Таким образом, при $0\leq z\leq 7$

$$S(z)=\frac{3\pi}{49}(196-z^2).$$

2. Подставляем $S(z)$ в формулу (2) и вычисляем определенный интеграл:

$$V=\frac{3\pi}{49}\int_0^7 (196-z^2)\,dz=77\pi \text{ (ед. длины)}^3.$$

Ответ. 77π (ед. длины)^3.

Условия задач. *Вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями.*

1. $z = 4x^2 + 9y^2, \qquad z = 6.$
2. $z = 9x^2 + 4y^2, \qquad z = 6.$
3. $z = 2x^2 + 8y^2, \qquad z = 4.$
4. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \qquad z = 0, \quad z = 2.$
5. $\dfrac{x^2}{16} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1, \qquad z = 0, \quad z = 3.$
6. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 - 3z^2 = 1, \qquad z = 0, \quad z = 1.$
7. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} - 2z^2 = 1, \qquad z = 0, \quad z = 1.$
8. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{27} - z^2 = 1, \qquad z = 0\ , \quad z = 2.$
9. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = -1, \qquad z = 2.$
10. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{z^2}{9} = -1, \qquad z = 6.$

Ответы. 1. 3π. 2. 3π. 3. 2π. 4. 4π. 5. 8π. 6. 6π. 7. 5π. 8. 42π. 9. 8π. 10. 50π.

8.12. Вычисление объемов тел вращения

Постановка задачи. *Вычислить объем тела, образованного вращением области, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и, возможно, прямыми $x = a$ и $x = b$, вокруг оси OX.*

План решения. Объем тела, образованного вращением области, ограниченной кривыми $y = u(x)$ и $y = v(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, где $u(x) \le v(x)$, т.е. области, определяемой системой неравенств

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ u(x) \le y \le v(x), \end{cases}$$

вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b \left(v(x)^2 - u(x)^2\right) dx. \tag{1}$$

1. Определяем область D. Если неравенства, определяющие область D, неизвестны, т.е. неизвестны a и b и/или неизвестно, какая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ больше другой на отрезке $[a,b]$, то выполняем следующие операции.

а) находим a и b как абсциссы точек пересечения графиков функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, т.е. решаем уравнение

$$f_1(x) = f_2(x);$$

б) исследуем знак разности $f_1(x) - f_2(x)$ на $[a,b]$. Для этого достаточно вычислить значение $f_1(x) - f_2(x)$ в какой-нибудь точке из (a,b). Если оно положительно, то $f_1(x) \geq f_2(x)$ и, следовательно, $u(x) = f_2(x)$ и $v(x) = f_1(x)$. Если оно отрицательно, то $f_1(x) \leq f_2(x)$ и, следовательно, $u(x) = f_1(x)$ и $v(x) = f_2(x)$.

2. Вычисляем объем по формуле (1).

Записываем ответ, не забывая о размерности.

Замечание. Аналогично решается задача, если тело образовано вращением области вокруг оси OY или оси OZ.

Пример. Вычислить объем тела, образованного вращением области, ограниченной графиками функций

$$y = x^3 \quad y = \sqrt{x},$$

вокруг оси OX.

Решение.

1. Определяем область D:

а) находим абсциссы a и b точек пересечения графиков. Для этого решаем уравнение

$$x^3 = \sqrt{x}.$$

Получаем

$$a = 0, \quad b = 1;$$

б) на отрезке $[0,1]$ $\sqrt{x} \geq x^3$. Следовательно, $u(x) = x^3$ и $v(x) = \sqrt{x}$.

2. Вычисляем объем по формуле (1):

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^3)^2]\, dx = \pi \int_0^1 (x - x^6)\, dx = \frac{5\pi}{14}.$$

Ответ. $5\pi/14$ (ед. длины)^3.

Условия задач. *Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси OX областей, ограниченных графиками заданных функций.*

1. $y = -x^2 + 1, \quad y = 0.$
2. $y = \sin(\pi x/2), \quad y = x.$
3. $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$
4. $y = x^2, \quad y = 2x.$
5. $y = \cos x, \quad y = \sin x, \quad x = 0 \quad (0 \le x \le \pi/4).$
6. $y = \sin^2 x, \quad y = 0, \quad x = \pi/2 \quad (0 \le x \le \pi/2).$
7. $y = e^x, \quad y = 1, \quad x = 1.$
8. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = e.$
9. $y = \dfrac{2}{x}, \quad y = 1, \quad x = 1.$
10. $y = \cos^2 x, \quad y = 0 \quad (-\pi/2 \le x \le \pi/2).$

Ответы. 1. $16\pi/15$. 2. $(5\pi^2 - 48)/(6\pi)$. 3. $3\pi/10$. 4. $16\pi/15$. 5. $\pi^2/4 - 1/2$. 6. $3\pi^2/16$. 7. $\pi(e^2 - 4e + 5)/2$. 8. $\pi(e - 2)$. 9. $\pi(3 - 4\ln 2)$. 10. $3\pi^2/8$.

Глава 9

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При изучении темы КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ вы познакомитесь с понятиями криволинейных интегралов первого рода (по длине дуги) и второго рода (по координатам) от функций двух и трех переменных и научитесь вычислять их вдоль различных плоских и пространственных кривых, заданных параметрически, в декартовых и в полярных координатах, приводя криволинейные интегралы к определенным.

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете вычислить производные функций, задающих кривую, решить системы уравнений, определяющие граничные значения параметра, вычислить полученные вами определенные интегралы и проверить правильность полученных вами результатов.

9.1. Криволинейные интегралы первого рода

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Вычислить криволинейный интеграл*

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl,$$

где L — часть гладкой кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t_1 \le t \le t_2, \\ z = z(t), \end{cases}$$

и dl — дифференциал длины дуги.

План решения. Криволинейный интеграл первого рода по кривой L определяется формулой

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\,\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt. \qquad (1)$$

Подчеркнем, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления обхода кривой и всегда $t_1 \le t_2$.

1. Вычисляем $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ и $dl = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$.

2. Вычисляем криволинейный интеграл по формуле (1) и записываем ответ.

Замечание 1. Если граничные точки кривой L $M(x_1,y_1,z_1)$ и $N(x_2,y_2,z_2)$ заданы в декартовых координатах, то t_1 и t_2 определяем, решая системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = x(t_1), \\ y_1 = y(t_1), \\ z_1 = z(t_1); \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x(t_2), \\ y_2 = y(t_2), \\ z_2 = z(t_2). \end{cases}$$

Замечание 2. Если кривая задана как линия пересечения двух поверхностей:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

то ее необходимо параметризовать.

Замечание 3. Если плоская кривая задана уравнением $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$, то дифференциал длины дуги равен $dl = \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$ и формула (1) имеет вид

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\,\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx. \qquad (1')$$

Если плоская кривая задана в полярных координатах ($x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$) уравнением $\varrho = \varrho(\varphi)$ $(a \le \varphi \le b)$, то дифференциал длины дуги равен

$$dl = \sqrt{\varrho(\varphi)^2+\varrho'(\varphi)^2}\,d\varphi$$

и формула (1) имеет вид

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(\varrho(\varphi)\cos\varphi, \varrho(\varphi)\sin\varphi)\,\sqrt{\varrho(\varphi)^2 + \varrho'(\varphi)^2}\,d\varphi. \qquad (1'')$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{z^2}{x^2+y^2}\,dl,$$

где L — первый виток винтовой линии

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = t, \end{cases}$$

Решение.

1. Вычисляем: $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$, $z'(t) = 1$, $dl = \sqrt{2}\,dt$ и $f(x,y) = z^2/(x^2+y^2) = t^2$.

2. Подставляем эти результаты в формулу (1) и вычисляем определенный интеграл:

$$\int\limits_L \frac{z^2}{x^2+y^2}\,dl = \int\limits_0^{2\pi} t^2\,\sqrt{2}\,dt = \frac{8\sqrt{2}\pi^3}{3}.$$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_L \frac{z^2}{x^2+y^2}\,dl = \frac{8\sqrt{2}\pi^3}{3}.$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (x-y)\,dl,$$

где L — отрезок прямой от точки $A(0,0)$ до точки $B(4,3)$.

Решение.

1. В данном случае уравнение прямой есть $y = 3x/4$ $(0 \le x \le 4)$ и, следовательно, $y'(x) = 3/4$ и $dl = 5/4\,dt$.

2. Подставляем эти результаты в формулу $(1')$ и вычисляем определенный интеграл:

$$\int\limits_L (x-y)\,dl = \int\limits_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\frac{5}{4}\,dx = \frac{5}{2}.$$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_L (x-y)\,dl = \frac{5}{2}.$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl,$$

где L — часть спирали Архимеда $\varrho = \varphi \quad (0 \le \varphi \le \pi/2)$.

Решение.

1. Вычисляем: $\varrho'(\varphi) = 1$, $dl = \sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi$ и $f(x,y) = \varphi$, так как $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi$ при $0 \le \varphi \le \pi/2$.

2. Подставляем эти результаты в формулу $(1'')$ и вычисляем определенный интеграл:

$$\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl = \int\limits_0^{\pi/2} \varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi = \frac{1}{3}(\varphi^2+1)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{(\pi^2+4)^{3/2}-8}{24}.$$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl = \frac{(\pi^2+4)^{3/2}-8}{24}.$

Условия задач. *Вычислить криволинейные интегралы.*

1. $\displaystyle\int\limits_L y^2\,dl$, *$L$ — часть кривой* $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ (*арка циклоиды*).

2. $\displaystyle\int\limits_L z\,dl$, *$L$ — часть кривой* $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ $(0 \le t \le \pi)$ (*первый виток конической винтовой линии*).

3. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,dl$, L — *часть кривой* $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=2t$ $(0\le t\le\pi)$ (*первый виток винтовой линии*).

4. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, L — *часть кривой* $x=t$, $y=t^2/2$, $z=t^3/3$ $(0\le t\le 1)$.

5. $\int\limits_L \sqrt{y}\,dl$, L — *часть параболы* $y=x^2$ *от точки* $A(0,0)$ *до точки* $B(2,4)$.

6. $\int\limits_L x\,dl$, L — *отрезок прямой от точки* $A(1,0)$ *до точки* $B(0,2)$.

7. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, L — *граница треугольника с вершинами* $(0,0)$, $(1,0)$ *и* $(0,1)$.

8. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, L — *окружность* $x^2+y^2=2x$.

9. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, L — *кардиоида* $\varrho=1-\cos\varphi$.

10. $\int\limits_L |y|\,dl$, L — *лемниската Бернулли* $\varrho=\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Ответы. 1. $\dfrac{64}{3}$. 2. $\dfrac{(2+\pi^2)^{3/2}-2\sqrt{2}}{3}$. 3. $\dfrac{2\pi\sqrt{5}(3+16\pi^2)}{3}$.
4. $\dfrac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$. 5. $\dfrac{1}{12}(17^{3/2}-1)$. 6. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 7. $1+\sqrt{2}$.
8. 8. 9. $\dfrac{32}{3}$. 10. $2(2-\sqrt{2})$.

9.2. Криволинейные интегралы второго рода

Постановка задачи. *Вычислить криволинейный интеграл*

$$\int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

где L — часть гладкой кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t_1 \le t \le t_2, \\ z = z(t). \end{cases}$$

План решения. Криволинейный интеграл второго рода по кривой L определяется формулой

$$\int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$
$$\int_{t_1}^{t_2} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt. \tag{1}$$

1. Вычисляем $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$.

2. Вычисляем криволинейный интеграл по формуле (1) и записываем ответ.

Замечание 1. Если граничные точки кривой L $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ заданы в декартовых координатах, то t_1 и t_2 определяем, решая системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = x(t_1), \\ y_1 = y(t_1), \\ z_1 = z(t_1); \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x(t_2), \\ y_2 = y(t_2), \\ z_2 = z(t_2). \end{cases}$$

Замечание 2. Если кривая задана как линия пересечения двух поверхностей:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

то ее необходимо параметризовать.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{y}{3}\,dx - 3x\,dy + x\,dz$$

по части кривой L, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 1 - 2\cos t - 2\sin t. \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2},$$

Решение.

1. Вычисляем: $x'(t) = -2\sin t$, $y'(t) = 2\cos t$ и $z'(t) = 2\sin t - 2\cos t$.

2. Вычисляем криволинейный интеграл по формуле (1):

$$\int\limits_L \frac{y}{3}\,dx - 3x\,dy + x\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left[\frac{2}{3}\sin t(-2\sin t) - 6\cos t(2\cos t) + 2\cos t(2\sin t - 2\cos t)\right] dt =$$

$$= 2 - \frac{13}{3}\pi.$$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_L y/3\,dx - 3x\,dy + x\,dz = 2 - \frac{13}{3}\pi.$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (x-y)\,dx + \,dy + z\,dz$$

от точки $M(2,0,4)$ до точки $N(-2,0,4)$ $(y \ge 0)$ по кривой L, образованной пересечением параболоида $z = x^2 + y^2$ и плоскости $z = 4$,

Решение. В сечении получается окружность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 4. \end{cases}$$

Поэтому параметрические уравнения кривой L имеют вид

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 4. \end{cases}$$

1. Вычисляем: $x'(t) = -2\sin t$, $y'(t) = 2\cos t$ и $z'(t) = 0$.
Определяем t_1 и t_2 из условий

$$\begin{cases} 2 = 2\cos t_1, \\ 0 = 2\sin t_1, \\ 4 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 = 2\cos t_2, \\ 0 = 2\sin t_2, \\ 4 = 4. \end{cases}$$

Учитывая, что $y \geq 0$, получаем $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi$.

2. Вычисляем криволинейный интеграл по формуле (1):

$$\int\limits_L (x-y)\,dx + dy + z\,dz = \int\limits_0^{\pi} [(2\cos t - 2\sin t)(-2\sin t) + 2\cos t]\,dt = 2\pi.$$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_L (x-y)\,dx + dy + z\,dz = 2\pi.$

Условия задач. *Вычислить криволинейные интегралы.*

1. $\displaystyle\int\limits_L (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz$, L — *часть кривой* $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ *от точки* $M(0,0,0)$ *до точки* $N(1,1,1)$.

2. $\displaystyle\int\limits_L (2-y)\,dx + x\,dy$, L — *арка циклоиды* $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

3. $\displaystyle\int\limits_L y\,dx + z\,dy + x\,dz$, L — *первый виток винтовой линии* $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$.

4. $\displaystyle\int\limits_L (x+y)dx + (x-y)dy$, L — *окружность* $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

5. $\displaystyle\int\limits_L \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, L — *окружность* $x^2 + y^2 = 1$.

6. $\int\limits_L (4x+y)\,dx + (x+4y)\,dy$, L — *часть параболы* $y = x^4$ *от точки* $M(1,1)$ *до точки* $N(-1,1)$.

7. $\int\limits_L 2xy\,dx + x^2\,dy$, L — *отрезок прямой от точки* $M(0,0)$ *до точки* $N(1,1)$.

8. $\int\limits_L y\,dx + x\,dy + (x+y+z)\,dz$, L — *отрезок прямой от точки* $M(2,3,4)$ *до точки* $N(3,4,5)$.

9. $\int\limits_L z\,dx + x\,dy + y\,dz$, L — *линия пересечения цилиндра* $x^2+y^2=4$ *и плоскости* $z=0$.

10. $\int\limits_L ydx - xdy + zdz$, L — *линия пересечения сферы* $x^2+y^2+z^2=4$ *и конуса* $x^2+y^2=z^2$ $(z \geq 0)$.

Ответы. 1. $1/35$. 2. -2π. 3. $-\pi$. 4. 0. 5. -2π. 6. -2. 7. 1. 8. $33/2$. 9. 4π. 10. -4π.

Глава 10

РЯДЫ

При изучении темы РЯДЫ вы познакомитесь с понятиями сходимости, суммы и остатка ряда, научитесь исследовать сходимость числовых рядов, применяя теоремы сравнения и различные признаки сходимости. Вы познакомитесь с понятиями функционального и степенного рядов, научитесь находить их области сходимости и суммы. Вы узнаете, что такое ряд Тейлора, научитесь находить разложения функций в ряд Тейлора и применять полученные разложения в приближенных вычислениях.

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете вычислить пределы, выполнить приближенные вычисления и проверить полученные вами результаты.

10.1. Понятие суммы ряда

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Найти сумму ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^2+pn+q},$$

где A, p, q — целые числа.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. *Суммой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется предел S последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$, т.е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \tag{1}$$

где $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

1. По условию задачи

$$a_n = \frac{A}{n^2+pn+q}.$$

Если корни знаменателя различаются на целое число, т.е. $n^2+pn+q = (n+a)(n+a+k)$, где k — натуральное число, то члены последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ легко найти, так как в выражении $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ многие слагаемые взаимно уничтожаются.

2. Разлагаем общий член ряда на элементарные дроби:

$$\frac{A}{n^2+pn+q} = \frac{1}{k}\left(\frac{A}{n+a} - \frac{A}{n+a+k}\right),$$

и выписываем несколько членов ряда так, чтобы было видно, какие слагаемые сокращаются при вычислении частичных сумм ряда.

3. Находим n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

сократив соответствующие слагаемые.

4. Вычисляем сумму ряда по формуле (1)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

и записываем ответ.

Пример. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{72}{n^2+5n+4}.$$

Решение.

1. Корни знаменателя $n = -1$ и $n = -4$ различаются на целое число, т.е. $n^2+5n+4 = (n+1)(n+1+3)$. Следовательно, члены последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ легко найти, так как в выражении $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ многие слагаемые взаимно уничтожаются.

2. Разлагаем общий член ряда на элементарные дроби

$$a_n = \frac{72}{n^2+5n+4} = \frac{24}{n+1} - \frac{24}{n+4}$$

и выписываем несколько членов ряда:

$$a_1 = \frac{24}{2} - \frac{24}{5}, \quad a_2 = \frac{24}{3} - \frac{24}{6}, \quad a_3 = \frac{24}{4} - \frac{24}{7},$$

$$a_4 = \frac{24}{5} - \frac{24}{8}, \quad a_5 = \frac{24}{6} - \frac{24}{9}, \quad a_6 = \frac{24}{7} - \frac{24}{10},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-5} = \frac{24}{n-4} - \frac{24}{n-1}, \qquad a_{n-4} = \frac{24}{n-3} - \frac{24}{n},$$

$$a_{n-3} = \frac{24}{n-2} - \frac{24}{n+1}, \qquad a_{n-2} = \frac{24}{n-1} - \frac{24}{n+2},$$

$$a_{n-1} = \frac{24}{n} - \frac{24}{n+3}, \qquad a_n = \frac{24}{n+1} - \frac{24}{n+4}.$$

3. Сокращая все слагаемые, какие возможно, находим n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$$

$$= \frac{24}{2} + \frac{24}{3} + \frac{24}{4} - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4} = 26 - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4}.$$

4. Вычисляем сумму ряда по формуле (1):

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(26 - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4} \right) = 26.$$

Ответ. $S = 26$.

Условия задач. *Найти суммы рядов.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+5n+6}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty} \frac{3}{n^2-5n+6}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{25n^2+5n-6}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2-1}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2+3n}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{90}{4n^2+8n-5}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2-3n-2}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{16n^2-8n-3}$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n(n+1)(n+2)}$.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

Ответы. 1. $S = 2$. 2. $S = 1$. 3. $S = 2$. 4. $S = 2$. 5. $S = 11$. 6. $S = 23$. 7. $S = 1$. 8. $S = 4$. 9. $S = 2$. 10. $S = 1$.

10.2. Первая теорема сравнения

Постановка задачи. *Исследовать сходимость ряда с неотрицательными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где $a_n = f(n, u_1(n), u_2(n), \ldots)$ *и* $u_1(n), u_2(n), \ldots$ — *функции с известными наименьшими и наибольшими значениями (например, синус, косинус и т.п.), причем функция* f *монотонно зависит от* $u_1, u_2, \ldots$

План решения.

1. Проверяем, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда).

2. Поскольку $a_n \geq 0$, применяем *первую теорему сравнения.*

Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если $a_n \leq b_n$, *то из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если $a_n \geq b_n$, *то из расходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует расходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Чтобы сделать вывод о сходимости (расходимости) данного ряда, мы должны установить справедливость одной из двух гипотез (проверяем их в любом порядке).

I. Исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
II. Исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

I. Проверяем первую гипотезу. Чтобы установить, что исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, нужно найти сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что

$$a_n \leq b_n. \tag{1}$$

В качестве эталонного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ используем один из следующих рядов:

а) сходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c}{n^p}$ при $p > 1$;

б) сходящийся геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cq^n$ при $0 < q < 1$ (c — некоторое положительное число).

Если существует сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что выполняется неравенство (1), то по первой теореме сравнения исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. В противном случае, проверяем вторую гипотезу.

II. Чтобы установить, что исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, надо найти расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что

$$a_n \geq b_n. \tag{2}$$

В качестве эталонного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ используем один из следующих рядов:

а) расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c}{n^p}$ при $p \leq 1$;

б) расходящийся геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cq^n$ при $q \geq 1$ (c — некоторое положительное число).

Если существует расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что выполняется неравенство (2), то по первой теореме сравнения исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Замечание. Для оценки общего члена ряда используем неравенства:

$$-1 \leq \cos n \leq 1, \quad -1 \leq \sin n \leq 1,$$

$$1 \leq \ln n \leq n^p \ (\forall p > 0), \quad \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} n \leq \frac{\pi}{2} \ \text{ и т. п.}$$

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}.$$

Решение.

1. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} = 0,$$

т.е. необходимое условие сходимости ряда выполнено.

2. Так как $-1 \le \sin n \le 1$ и $1 \le 2 + \sin n \le 3$ при всех $n \ge 1$ и

$$\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} > 0,$$

то можно применить первую теорему сравнения.

3. Чтобы сделать вывод о сходимости (расходимости) данного ряда, мы должны установить справедливость одной из двух гипотез (проверяем в любом порядке).

I. Исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Поскольку $-1 \le \sin n \le 1$, имеем $1 \le 2+\sin n \le 3$, $\sqrt{n^3+1} < 2n^{3/2}$, и, следовательно,

$$\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} \le \frac{2n^{3/2}}{n^2} = \frac{2}{n^{1/2}}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{1/2}}$$

расходится как гармонический с $p = 1/2 < 1$, то гипотеза о сходимости исходного ряда не подтвердилась.

Проверяем вторую гипотезу.

II. Исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Поскольку $-1 \le \sin n \le 1$, имеем $1 \le 2+\sin n \le 3$, $\sqrt{n^3+1} > \sqrt{n^3}$, и, следовательно,

$$\frac{\sqrt{n^3}}{n^2(2+\sin n)} \ge \frac{n^{3/2}}{3n^2} = \frac{1}{3n^{1/2}}. \tag{3}$$

Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^{1/2}}$$

расходится как гармонический с $p = 1/2 < 1$, то в силу неравенства (3) по первой теореме сравнения расходится и исходный ряд.

Ответ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2(2+\sin n)}$ расходится.

Условия задач. *Исследовать сходимость рядов.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n^3)}{n(n+2)(n+3)}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-2\sin n}{n-\ln n}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n^2+3}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2\ln n}{n^3-2}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5-2\cos n}{\sqrt[5]{n^3}}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n(n^2+3)}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2+1}$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[5]{n^{11}+1}}$.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}$.

Ответы. 1. Ряд сходится. 2. Ряд расходится. 3. Ряд сходится. 4. Ряд расходится. 5. Ряд расходится. 6. Ряд сходится. 7. Ряд сходится. 8. Ряд сходится. 9. Ряд сходится. 10. Ряд расходится.

10.3. Вторая теорема сравнения

Постановка задачи. *Исследовать сходимость ряда с положительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

План решения.

1. Проверяем, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда).

2. Проверяем, что $a_n > 0$ для всех $n \geq 1$.

3. Делаем вывод о сходимости или расходимости данного ряда, используя *вторую (предельную) теорему сравнения.*

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *причем существует номер* N *такой, что при всех* $n > N$ $a_n > 0$ *и* $b_n > 0$.

Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

В качестве эталонного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ используем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$, или геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cq^n$ $(q > 0)$, который сходится при $q < 1$ и расходится при $q \geq 1$. Таким образом, нужно найти последовательность A/n^p (или Bq^n) такую, что

$$a_n \sim \frac{A}{n^p} \quad (\text{или } a_n \sim Bq^n) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Вывод: по второй теореме сравнения исходный ряд сходится, если $p > 1$ $(q < 1)$, и расходится, если $p \leq 1$ $(q \geq 1)$.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}} .$$

Решение.

1. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}} = 0.$$

2. Проверяем, что члены данного ряда положительны. Действительно,

$$\arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}} > 0$$

при всех $n \geq 1$, так как $n/(n^2+3)^{5/2} \in (0,1)$.

3. Делаем вывод о сходимости или расходимости данного ряда, используя вторую (предельную) теорему сравнения.

Имеем

$$\arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}} \sim \frac{1}{n^4} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

сходится как гармонический с $p = 4 > 1$. Следовательно, в силу второй (предельной) теоремы сравнения исходный ряд также сходится.

Ответ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \dfrac{n}{(n^2+3)^{5/2}}$ сходится.

Условия задач. *Исследовать сходимость рядов.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+6}{n^3+5}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-\cos\frac{\pi}{n^2}\right)$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{n^4}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^7}}$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\frac{n^4+3}{n^4+2}$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n+3}{n(n+2)^3}$.
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n}{7^n+2n}$.
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\arcsin\frac{n^2+1}{n^4-2}$.
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(e^{1/2n^3}-1\right)$.
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n^2}$.

Ответы. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится. 3. Ряд сходится. 4. Ряд расходится. 5. Ряд сходится. 6. Ряд сходится. 7. Ряд сходится. 8. Ряд сходится. 9. Ряд расходится. 10. Ряд сходится.

10.4. Признак Даламбера

Постановка задачи. *Исследовать сходимость ряда с положительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где $a_n \sim b_n$ и b_n содержит произведения многих сомножителей (например, факториалы).

План решения. Если при вычислении предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

можно сократить многие множители в числителе и знаменателе дроби b_{n+1}/b_n, то обычно применяют *признак Даламбера.*

Пусть дан ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \varrho,$$

то при $\varrho < 1$ ряд сходится, при $\varrho > 1$ расходится. (Если $\varrho = 1$, то признак Даламбера ответа не дает.)

1. Проверяем, что $a_n > 0$ при всех $n \geq 1$.

2. Упрощаем, если требуется, выражение для a_n, т.е. будем исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такого, что $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, а затем воспользуемся второй теоремой сравнения.

3. Вычисляем b_{n+1}.

4. Вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \varrho. \tag{1}$$

5. Применяем признак Даламбера и вторую теорему сравнения.

Если $\varrho < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Следовательно, по второй теореме сравнения сходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если $\varrho > 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Следовательно, по второй теореме сравнения расходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{n!} \sin\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Решение.

1. Проверяем, что члены ряда положительны. Действительно,

$$a_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{n!} \sin\frac{1}{2^{n+1}} > 0$$

при всех $n \geq 1$.

2. Поскольку $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, можно упростить выражение для a_n:

$$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{n!} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \sim \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!},$$

т.е. будем исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где

$$b_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!},$$

и затем воспользуемся второй теоремой сравнения.

Поскольку b_n содержит произведения сомножителей типа факториалов, следует применить признак Даламбера.

3. Вычисляем b_{n+1}:

$$b_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{2^{n+2} (n+1)!}.$$

4. Вычисляем ϱ по формуле (1)

$$\varrho = \lim_{n \to \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{2^{n+2} (n+1)!} \cdot \frac{2^{n+1} n!}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3n+1}{2(n+1)} = \frac{3}{2}.$$

5. Применяем признак Даламбера и вторую теорему сравнения.

Так как $\varrho = 3/2 > 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$$

расходится. Следовательно, по второй теореме сравнения расходится и исходный ряд.

Ответ. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{n!} \sin \frac{1}{2^{n+1}}$ расходится.

Условия задач. *Исследовать сходимость рядов.*

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n+2}{2^n(n+1)!}$. 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n!)^3}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}$. 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^5-1)}{n!}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{(2n)!}$. 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n+2}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+2)!}{(3n)!}$. 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$. 10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

Ответы. 1. Ряд сходится ($\varrho = 0$). 2. Ряд сходится ($\varrho = 0$). 3. Ряд расходится ($\varrho = +\infty$). 4. Ряд сходится ($\varrho = 0$). 5. Ряд сходится ($\varrho = 0$). 6. Ряд расходится ($\varrho = +\infty$). 7. Ряд сходится ($\varrho = 4/9$). 8. Ряд сходится ($\varrho = 0$). 9. Ряд сходится ($\varrho = 2/e$). 10. Ряд расходится ($\varrho = 3/e$).

10.5. Признак Коши

Постановка задачи. *Исследовать сходимость ряда с положительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где $a_n \sim b_n$ *и* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}$ *существует и легко вычисляется.*

План решения. Если b_n имеет, например, вид $g(n)\,f(n)^{n^k}$, где f и g — рациональные функции n, то $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}$ существует и легко вычисляется. В таком случае применяем радикальный *признак Коши.*

Пусть дан ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \varrho, \tag{1}$$

то при $\varrho < 1$ *ряд сходится, при* $\varrho > 1$ *расходится.* (Если $\varrho = 1$, то признак Коши ответа не дает.)

1. Проверяем, что $a_n > 0$ при всех $n \geq 1$.

2. Упрощаем, если требуется, выражение для a_n, т.е. будем исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такого, что $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, а затем воспользуемся второй теоремой сравнения.

3. Вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \varrho.$$

4. Применяем радикальный признак Коши и вторую теорему сравнения.

Если $\varrho < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Следовательно, по второй теореме сравнения сходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если $\varrho > 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Следовательно, по второй теореме сравнения расходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Замечание. Полезно иметь в виду, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1,$$

где $P(n)$ — многочлен относительно n.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}.$$

Решение.

1. Проверяем, что члены ряда положительны. Действительно,

$$a_n = n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n} > 0$$

при всех $n \geq 1$.

2. Поскольку $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$, упрощаем выражение для a_n:

$$n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n} \sim n^4 \left(\frac{\pi}{4n}\right)^{2n},$$

т.е. будем исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где

$$b_n = n^4 \left(\frac{\pi}{4n}\right)^{2n},$$

и затем воспользуемся второй теоремой сравнения.

Очевидно, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$ существует и легко вычисляется. В таком случае применяем радикальный признак Коши.

3. Вычисляем ϱ по формуле (1), учитывая, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left[n^4 \left(\frac{\pi}{4n}\right)^{2n}\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{4/n} \left(\frac{\pi}{4n}\right)^2 = 0 < 1.$$

4. Применяем радикальный признак Коши и вторую теорему сравнения.

Так как $\varrho = 0 < 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{\pi}{4n}\right)^{2n}$$

сходится. Следовательно, по второй теореме сравнения сходится и исходный ряд.

Ответ. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}$ сходится.

Условия задач. *Исследовать сходимость рядов.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3+n}{3n^3-1}\right)^{n^2}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{7n+1}\right)^{n^3}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+3}\right)^{n^2}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{5n+1}\right)^{n^2}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^{n}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{9n+1}\right)^{n/2}$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}$.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} e^{-n}$.

Ответы. 1. Ряд расходится ($\varrho = +\infty$). 2. Ряд сходится ($\varrho = 0$). 3. Ряд сходится ($\varrho = 0$). 4. Ряд сходится ($\varrho = 0$). 5. Ряд сходится ($\varrho = 0$). 6. Ряд сходится ($\varrho = 3/5$). 7. Ряд сходится ($\varrho = 1/4$). 8. Ряд сходится ($\varrho = 2/3$). 9. Ряд сходится ($\varrho = 3/5$). 10. Ряд расходится ($\varrho = 3/e$).

10.6. Интегральный признак Коши

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Исследовать сходимость ряда с положительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где $a_n \sim b_n = f(n)$, *причем первообразная функции* $f(x)$ *легко вычисляется.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Если $b_n = f(n)$, причем первообразная функции $f(x)$ легко вычисляется, то применяем *интегральный признак Коши.*

Если функция $f(x)$, *принимающая в точках* $x = n$ $(n \in \mathbb{N})$ *значения* $f(n) = b_n > 0$, *убывает в некотором промежутке* $b < x < +\infty$ $(b \geq 1)$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *и несобственный интеграл* $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

1. Упрощаем, если требуется, выражение для a_n, т.е. будем исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такого, что $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$ и $b_n = f(n)$ выбраны так, чтобы функция $f(x)$ имела очевидную первообразную $F(x)$. Затем используем вторую теорему сравнения.

2. Исследуем сходимость несобственного интеграла по определению:

$$\int_b^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} F(b) - F(a).$$

3. Применяем интегральный признак Коши к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и затем делаем вывод о сходимости или расходимости исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, используя вторую теорему сравнения.

Замечание. Интегральный признак Коши применяется, в частности, к рядам вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(\ln n)$.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}.$$

Решение.

1. Упрощаем выражение для a_n

$$\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)} \sim \frac{3}{n\ln n}$$

и будем исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\ln n}$ с помощью интегрального признака Коши, так как функция $f(x) = \frac{3}{x\ln x}$ имеет очевидную первообразную $F(x) = 3\ln\ln x$. Затем используем вторую теорему сравнения.

2. Исследуем сходимость несобственного интеграла по определению:

$$\int_2^{+\infty} \frac{3\,dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{3\,dx}{x\ln x} = 3 \lim_{b\to+\infty} [\ln\ln b - \ln\ln 2] = +\infty.$$

Интеграл расходится.

3. Применяем интегральный признак Коши:

Функция $f(x) = \frac{3}{x\ln x}$ непрерывна в промежутке $[2, +\infty)$ и убывает в нем к нулю. Следовательно, из расходимости интеграла следует расходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n\ln n}.$$

По второй теореме сравнения расходится и исходный ряд.

Ответ. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$ расходится.

Условия задач. *Исследовать сходимость рядов.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln(2n)}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2 n}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)\sqrt{\ln(2n+1)}}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3(n+1)}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\sqrt[3]{\ln n}}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln^3(3n+1)}}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln(n+3)}}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)\ln^2 n}$.

9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+2)\ln^2 n}$.

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(n^4-2)\ln n}$.

Ответы. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится. 3. Ряд расходится. 4. Ряд сходится. 5. Ряд расходится. 6. Ряд сходится. 7. Ряд расходится. 8. Ряд сходится. 9. Ряд сходится. 10. Ряд расходится.

10.7. Признак Лейбница

Постановка задачи. *Исследовать сходимость знакочередующегося ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad a_n > 0.$$

План решения.

1. Проверяем, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда).

2. Исследуем сходимость ряда, составленного из модулей,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

используя теоремы сравнения и признаки сходимости для рядов с положительными членами.

Если ряд из модулей сходится, то исходный ряд сходится абсолютно.

3. Если ряд из модулей расходится, то остается еще возможность того, что исходный ряд сходится условно.

Чтобы исследовать эту возможность, применяем *признак Лейбница*.

Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится (по крайней мере, условно).

В данном случае, если условия признака Лейбница выполнены, то исходный ряд сходится условно (так как уже выяснено, что абсолютно он не сходится).

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Решение.

1. Проверим выполнение необходимого условия сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

2. Исследуем сходимость ряда, составленного из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Так как при $n \to \infty$

$$1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n},$$

то по второй (предельной) теореме сравнения ряд из модулей расходится.

3. Проверяем условия признака Лейбница:

а) ряд знакочередующийся с $a_n = 1 - \cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

б) члены ряда убывают по абсолютной величине:

$$1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \forall n \geq 1;$$

в) члены ряда стремятся к нулю при $n \to \infty$ (см. п. 1).

Следовательно, по признаку Лейбница исходный ряд сходится.

Ответ. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ сходится условно.

Условия задач. *Исследовать сходимость рядов.*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3n+1}{n(n+2)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2n^2}{n^5+n^2+1}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^5+3n^2+2}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\sin(n^2\sqrt{n})}{n^2\sqrt{n}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2n^2-1}{3n^3}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^{n^2}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\dfrac{3n+2}{2n}\right)^{n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin^2\dfrac{\pi}{3^n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi n}{\sqrt{n+2}}$.

Ответы. 1. Ряд сходится условно. 2. Ряд сходится абсолютно. 3. Ряд сходится условно. 4. Ряд сходится абсолютно. 5. Ряд сходится условно. 6. Ряд сходится условно. 7. Ряд сходится абсолютно. 8. Ряд расходится. 9. Ряд сходится абсолютно. 10. Ряд сходится условно.

10.8. Приближенное вычисление суммы ряда

Постановка задачи. *Вычислить сумму знакочередующегося числового ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \quad a_n>0,$$

с заданной точностью α.

План решения.

1. Если $a_{n+1} < a_n$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то для остатка ряда R_n справедливо неравенство

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

2. Если $a_{n+1} < \alpha$, то и $|R_n| < \alpha$. Поэтому, решая неравенство

$$a_{n+1} < \alpha,$$

находим количество членов ряда, которое необходимо взять для вычисления суммы ряда с заданной точностью α.

3. Непосредственно вычисляем n-ю частичную сумму и записываем ответ:

$$S \approx S_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n.$$

Пример. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(1+n^3)^2}$$

с точностью $\alpha = 0,001$.

Решение.

1. Данный ряд знакочередующийся и сходящийся (абсолютно). Члены ряда убывают по абсолютной величине:

$$\frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2} < \frac{n}{(1+n^3)^2} \qquad \forall n \geq 1.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2}.$$

2. Если $a_{n+1} < \alpha$, то и $|R_n| < \alpha$. Поэтому, решая неравенство

$$\frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2} < \frac{1}{1000},$$

находим количество членов ряда, которое необходимо взять для вычисления суммы ряда с заданной точностью α. Получаем $n \geq 3$, т.е. достаточно взять первые три члена ряда.

3. Вычисляем:

$$S_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{81} - \frac{3}{28^2} \approx -0,229.$$

Ответ: $S \approx -0,229 \pm 0,001$.

Условия задач. *Вычислить суммы знакочередующихся рядов с заданной точностью α.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\alpha = 0,01$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$, $\alpha = 0,001$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!!}$, $\alpha = 0,001$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(3n)!}$, $\alpha = 0,001$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!n}$, $\alpha = 0,0001$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^n n!}$, $\alpha = 0,001$.
7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^3+2}$, $\alpha = 0,01$.
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n^3}$, $\alpha = 0,01$.
9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!}$, $\alpha = 0,01$.
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}$, $\alpha = 0,01$.

Ответы. 1. $S \simeq 0,84$. 2. $S \simeq 0,896$. 3. $S \simeq -0,275$. 4. $S \simeq -0,332$. 5. $S \simeq -0,4796$. 6. $S \simeq -0,393$. 7. $S \simeq 0,13$. 8. $S \simeq -0,45$. 9. $S \simeq 0,36$. 10. $S \simeq 0,04$.

10.9. Область сходимости функционального ряда

Постановка задачи. *Найти область сходимости функционального ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

План решения. При каждом допустимом значении x рассматриваем данный ряд как числовой и исследуем его сходимость, применяя теоремы сравнения, признаки Коши, Даламбера и др. Таким образом находим те значения x, при которых данный ряд сходится. Совокупность таких значений x образует область сходимости ряда.

При использовании признаков Даламбера или Коши поступаем следующим образом.

1. Находим $\varrho(x)$ по одной из формул (если пределы существуют)

$$\varrho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \quad \text{или} \quad \varrho(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|},$$

где $f_n(x)$ — общий член ряда.

2. Так как по признакам Даламбера или Коши ряд сходится при $\varrho < 1$ и расходится при $\varrho > 1$, находим интервал сходимости, решая неравенство $\varrho(x) < 1$.

3. Исследуем поведение ряда в граничных точках интервала сходимости.

Записываем ответ.

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+\sqrt{n}+1)^{x+1}}.$$

Решение.

1. Для каждого фиксированного x все члены данного ряда положительны:

$$a_n = \frac{n^3}{(n^2+\sqrt{n}+1)^{x+1}} > 0 \qquad \forall n \geq 1.$$

2. Используем вторую (предельную) теорему сравнения. Имеем

$$\frac{n^3}{(n^2+\sqrt{n}+1)^{x+1}} \sim \frac{1}{n^{2(x+1)-3}} \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Так как при $2(x+1)-3>1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(x+1)-3}}$$

сходится, а при $2(x+1)-3 \leq 1$ расходится (как обобщенный гармонический), то по второй теореме сравнения ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+\sqrt{n}+1)^{x+1}}$$

сходится при всех $x > 1$.

Ответ. Область сходимости ряда — $(1, \infty)$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3(x^2-4x+7)^n}.$$

Решение.

1. Для того чтобы применить признак Даламбера, находим $\varrho(x)$ по формуле

$$\varrho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}|}{|f_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4^{n+1}}{(n+1)^3|x^2-4x+7|^{n+1}}}{\dfrac{4^n}{n^3|x^2-4x+7|^n}} = \frac{4}{|x^2-4x+7|}.$$

2. Так как по признаку Даламбера ряд сходится при $\varrho < 1$ и расходится при $\varrho > 1$, находим интервал сходимости, решая неравенство $\varrho(x) < 1$:

$$\frac{4}{|x^2-4x+7|} < 1.$$

Получаем $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

3. Исследуем сходимость ряда в граничных точках:

при $x = 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

сходится (как обобщенный гармонический с $p = 3 > 1$);

при $x = 3$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

также сходится.

Ответ. Область сходимости ряда — $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

Условия задач. *Найти области сходимости функциональных рядов.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[3]{n}+1)^{x+3}}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(x^2-6x+10)^n}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^{x^2+4x}+3}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(x^2-5x+9)^n}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{x^2-2}+1}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2(x^2+3)^n}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^{x}}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2-4x+8)^n}$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^{3+3x-x^2}}$.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2(x^2-2x+6)^n}$.

Ответы. 1. $(3,+\infty)$. 2. $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$. 3. $(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$. 4. $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$. 5. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. 6. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 7. $(3,+\infty)$. 8. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$. 9. $(0,3)$. 10. $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$.

10.10. Область сходимости степенного ряда

Постановка задачи. *Найти область сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n.$$

План решения.

1. Если существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}},$$

то можно найти радиус сходимости степенного ряда по формуле Даламбера

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \tag{1}$$

или по формуле Коши

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{2}$$

Тогда интервал сходимости ряда есть $-R < x - x_0 < R$.

Замечание. Формулы (1) и (2) применимы лишь тогда, когда все коэффициенты степенного ряда c_n отличны от нуля. В противном случае находим $\varrho(x)$ по одной из формул

$$\varrho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \quad \text{или} \quad \varrho(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|},$$

где $f_n(x)$ — общий член ряда (см. задачу 10.9). По признакам Даламбера или Коши ряд сходится при $\varrho < 1$ и расходится при $\varrho > 1$. Следовательно, находим интервал сходимости, решая неравенство $\varrho(x) < 1$.

2. Исследуем поведение степенного ряда в граничных точках интервала сходимости $x = x_0 \pm R$.

Записываем ответ.

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}(x+1)^n.$$

Решение.

1. В данном случае $c_n = \dfrac{(n+1)^5}{2n+1} \neq 0$ при всех n. Поэтому можно применить формулы (1) или (2) для радиуса сходимости степенного ряда.

По формуле Даламбера

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} \Big/ \frac{(n+2)^5}{2n+3} = 1.$$

Следовательно, интервал сходимости определяется неравенствами $-1 < x + 1 < 1$ и имеет вид $(-2, 0)$.

2. Исследуем сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости. В точке $x = -2$ степенной ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}(-1)^n$$

и в точке $x = 0$ степенной ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}(1)^n.$$

Оба ряда расходятся, так как не удовлетворяют необходимому условию сходимости рядов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}(\pm 1)^n \neq 0.$$

Следовательно, в этих точках ряд расходится.

Ответ. Область сходимости степенного ряда — $(-2, 0)$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}(x-2)^{2n}.$$

Решение.

1. В данном случае $c_n = 0$ при всех нечетных n. Поэтому нельзя применять формулы для радиуса сходимости степенного ряда.

Используем признак Коши, для чего вычислим

$$\varrho(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|},$$

где $f_n(x) = \dfrac{1}{n+1}(x-2)^{2n}$.

Находим $\varrho(x)$:

$$\varrho(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}(x-2)^{2n}} = (x-2)^2.$$

По признаку Коши ряд сходится при $\varrho < 1$ и расходится при $\varrho > 1$. Следовательно, интервал сходимости определяется неравенством $(x-2)^2 < 1$ и имеет вид $(1, 3)$.

2. Исследуем сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости. В точке $x = 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}(-1)^n$$

сходится условно по признаку Лейбница.

В точке $x = 3$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}(1)^n.$$

расходится.

Ответ. Область сходимости степенного ряда — $[1,3)$.

Условия задач. *Найти области сходимости степенных рядов.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n9^n}.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n}}.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{4^n}.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}.$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3+3n)4^n}.$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x+3)^n.$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2 3^n}(x+2)^n.$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)2^n}(x+4)^n$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}(x+2)^{2n+1}.$

Ответы. 1. $(-7,11)$. 2. $(2,4)$. 3. $(-7,-3)$. 4. $[-2,1)$. 5. $[-1,5)$. 6. $[1,5]$. 7. $[-4,-2]$. 8. $[-5,1)$. 9. $(-6,-2]$. 10. $(-\infty,+\infty)$.

10.11. Вычисление суммы ряда почленным интегрированием

Постановка задачи. *Найти сумму функционального ряда вида*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f(x)^n}{n}$$

и указать область сходимости ряда к этой сумме.

План решения.

1. Находим область сходимости ряда.

По признаку Коши интервал сходимости определяется неравенством

$$|f(x)| < 1.$$

Если $f(x) = 1$, ряд расходится. Если $f(x) = -1$, ряд сходится условно (по признаку Лейбница). Следовательно, область сходимости определяется неравенствами $-1 \leq f(x) < 1$.

2. Делаем в исходном ряде замену $f(x) = t$, получим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \tag{1}$$

с областью сходимости $[-1, 1)$.

3. Известна формула для вычисления суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{n=k}^{\infty} t^n = \frac{t^k}{1-t}, \quad |t| < 1. \tag{2}$$

4. Кроме того, имеем очевидное равенство

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=k}^{\infty} \int_0^t u^{n-1}\, du, \quad t \in (-1, 1).$$

5. Учитывая, что степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0, t]$, целиком принадлежащем интервалу сходимости, и используя формулу (2), получаем

$$S(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \int_0^t \sum_{n=k}^{\infty} u^{n-1}\, du = \int_0^t \frac{u^k}{1-u}\, du, \quad t \in (-1, 1). \tag{3}$$

Заметим, что так как ряд (1) сходится в граничной точке $t = -1$, то сумма ряда непрерывна в этой точке (справа). Следовательно, $S(-1) = \lim\limits_{t \to -1+0} S(t)$.

6. Вычисляем интеграл, делаем замену t на $f(x)$ и записываем ответ: сумму ряда и область его сходимости.

Замечание. Если ряд имеет вид

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f(x)^n}{(n+a)(n+b)},$$

то применяем теорему о почленном интегрировании степенного ряда дважды или разлагаем дробь на элементарные:

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b}\right) \frac{1}{b-a},$$

и вычисляем сумму каждого ряда почленным интегрированием.

Пример. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n}$$

и указать область сходимости ряда к этой сумме.

Решение.

1. Находим область сходимости ряда.

По признаку Коши интервал сходимости определяется неравенством $|\sin x| < 1$.

В граничных точках при $x = \pi/2 + 2\pi k$ ряд расходится, при $x = 3\pi/2 + 2\pi k$ ряд сходится условно.

Следовательно, данный ряд сходится при всех $x \neq \pi/2 + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

2. Сделаем замену $\sin x = t$. Получим геометрический ряд (1) с областью сходимости $[-1, 1)$.

3. Используем формулу для вычисления суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t}, \quad |t| < 1. \tag{4}$$

4. Кроме того, имеем очевидное равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t u^{n-1}\, du, \quad t \in (-1, 1).$$

5. Учитывая, что степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0,t]$, целиком принадлежащем интервалу сходимости, и используя формулу (4), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}u^{n-1}\,du=\int_0^t\frac{1}{1-u}\,du=-\ln(1-t),\qquad |t|<1. \tag{5}$$

Заметим, что так как ряд (1) сходится в граничной точке $t=-1$, то его сумма непрерывна в этой точке (справа). Следовательно, формула (5) справедлива при всех $t\in[-1,1)$.

6. Заменяя t на $\sin x$, получаем при $x\neq\pi/2+2\pi k$

$$S(x)=-\ln(1-\sin x)\,.$$

Ответ. $S(x)=-\ln(1-\sin x)\,,\quad x\neq\pi/2+2\pi k.$

Условия задач. *Найти суммы функциональных рядов и указать области их сходимости к этим суммам.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n x^n}{n}.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)}.$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-16x^4)^n}{n+1}.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{nx^{n-1}}.$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)x^{2n}}.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{n+1}}{n(n+1)}.$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)x^n}.$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{2n+1}.$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}.$

Ответы.

1. $S=-\ln(1-6x),\quad x\in[-1/6,1/6)\,.$

2. $S=(x-x^2)\ln(1-x)+x^2,\quad x\in[-1,1].$

3. $S = -8\ln\dfrac{8x^4-1}{8x^4}, \quad x \in \left(-1/\sqrt[4]{8}, 1/\sqrt[4]{8}\right).$

4. $S = -\dfrac{x}{3}\ln\dfrac{x-3}{x}, \quad x \in (-\infty,-3] \cup (3,+\infty).$

5. $S = -\dfrac{x^2}{2}\ln\dfrac{x^2-2}{x^2}, \quad x \in (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},+\infty).$

6. $S = (1-2x)\ln(1-2x)+2x, \quad x \in [-1/2, 1/2].$

7. $S = \dfrac{3-x}{3}\ln\dfrac{3-x}{3}+\dfrac{x}{3}, \quad x \in (-\infty,-3] \cup [3,+\infty).$

8. $S = \operatorname{arctg} x, \quad x \in [-1,1].$

9. $S = \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{2x} - 1 \quad x \in [-1/2, 1/2].$

10. $S = 2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2), \quad x \in [-1,1].$

10.12. Вычисление суммы ряда почленным дифференцированием

Постановка задачи. *Найти сумму функционального ряда вида*

$$\sum_{n=k}^{\infty}(n+b)f(x)^n$$

и указать область сходимости ряда к этой сумме.

План решения.

1. Находим область сходимости ряда.

По признаку Коши интервал сходимости определяется неравенством

$$|f(x)| < 1.$$

Если $f(x) = \pm 1$, ряд расходится (не выполнено необходимое условие сходимости). Следовательно, область сходимости определяется неравенствами $-1 < f(x) < 1$.

2. Делаем в исходном ряде замену $f(x) = t$ и записываем его в виде суммы двух рядов

$$\sum_{n=k}^{\infty} nt^n + b\sum_{n=k}^{\infty} t^n.$$

Следовательно, достаточно найти суммы рядов

$$\sum_{n=k}^{\infty} t^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=k}^{\infty} nt^n.$$

3. Известна формула для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{n=k}^{\infty} t^n = \frac{t^k}{1-t}, \quad |t| < 1. \tag{1}$$

4. Кроме того, имеем очевидное равенство

$$\sum_{n=k}^{\infty} nt^n = t\sum_{n=k}^{\infty} nt^{n-1} = t\sum_{n=k}^{\infty} \frac{d}{dt}t^n.$$

5. Учитывая, что степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости, и используя формулу (1), получаем

$$\sum_{n=k}^{\infty} nt^n = t\frac{d}{dt}\sum_{n=k}^{\infty} t^n = t\frac{d}{dt}\,\frac{t^k}{1-t}, \quad t \in (-1,1).$$

6. Вычисляем производную и делаем замену t на $f(x)$.

Записываем ответ: сумму ряда и область его сходимости.

Замечание. Если ряд имеет вид

$$\sum_{n=k}^{\infty} (n^2 + bn + c)f(x)^n,$$

то вычисляем сумму трех рядов, причем при вычислении суммы ряда

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^2 f(x)^n$$

применяем теорему о почленном дифференцировании степенного ряда дважды.

Пример. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+6)x^{7n}$$

и указать область сходимости ряда к этой сумме.

Решение.

1. Находим область сходимости ряда.

По признаку Коши интервал сходимости определяется неравенством $|x^7|<1$. Отсюда $-1<x<1$. В граничных точках $x=\pm1$ ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости. Следовательно, ряд сходится в интервале $(-1,1)$.

2. Делаем в исходном ряде замену $x^7=t$ и записываем его в виде суммы двух рядов

$$S(t)=6\sum_{n=0}^{\infty}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}nt^n=6S_1(t)+S_2(t).$$

Следовательно, достаточно найти суммы рядов

$$S_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\qquad S_2(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n.$$

3. Используем формулу для вычисления суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t},\quad |t|<1. \tag{2}$$

Следовательно, $S_1(t)=\dfrac{1}{1-t}$ при всех $t\in(-1,1)$.

4. Кроме того, имеем очевидное равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}nt^n=t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dt}t^n.$$

5. Учитывая, что степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости, и используя формулу (2), получаем

$$S_2(t)=\sum_{n=1}^{\infty} nt^n = t\,\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty} t^n = t\,\frac{d}{dt}\,\frac{t}{1-t}=\frac{t}{(1-t)^2},\quad t\in(-1,1).$$

Таким образом,

$$S(t)=6S_1(t)+S_2(t)=\frac{6}{1-t}+\frac{t}{(1-t)^2}=\frac{6-5t}{(1-t)^2},\quad t\in(-1,1).$$

Заменяя t на x^7, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+6)x^{7n}=\frac{6-5x^7}{(1-x^7)^2}\quad \forall x\in(-1,1).$$

Ответ. $S(x)=\dfrac{6-5x^7}{(1-x^7)^2},\quad x\in(-1,1).$

Условия задач. *Найти суммы функциональных рядов и указать области их сходимости к этим суммам.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n2^n x^n.$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+4}.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}nx^{n-1}}{3^{n-1}}.$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)x^n}{2^n}.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}.$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n^2-2n+1)x^n.$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(n+1)x^n.$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n.$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(x^3+1)^{n-1}.$

Ответы.

1. $S = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$.
2. $S = \dfrac{2x}{(1-2x)^2}$, $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.
3. $S = \dfrac{x^4}{(1-x^2)^2}$, $x \in (-1, 1)$.
4. $S = \dfrac{9}{(x+3)^2}$, $x \in (-3, 3)$.
5. $S = \dfrac{16}{(2-x)^3}$, $x \in (-2, 2)$.
6. $S = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$, $x \in (-1, 1)$.
7. $S = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(1-x)^3}$, $x \in (-1, 1)$.
8. $S = \dfrac{2x}{(1+x)^3}$, $x \in (-1, 1)$.
9. $S = \dfrac{3x - x^2}{(1-x)^3}$, $x \in (-1, 1)$.
10. $S = \dfrac{1}{x^6}$, $x \in (-\sqrt[3]{2}, 0)$.

10.13. Ряд Тейлора

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням x $(x_0 = 0)$.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Преобразуем функцию $f(x)$ к виду, допускающему использование табличных разложений e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$.

2. Находим разложение функции в ряд Тейлора, используя табличные разложения, сложение (вычитание) рядов, умножение ряда на число.

3. Определяем область сходимости полученного ряда к функции $f(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если необходимо разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$, сначала делаем замену переменной $t = x - x_0$, находим разложение по степеням t и возвращаемся к переменной x.

ПРИМЕР. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{3}{2 - x - x^2}$$

в ряд Тейлора по степеням x $(x_0 = 0)$.

Решение.

1. Чтобы использовать табличные разложения, разложим данную функцию на элементарные дроби:

$$\frac{3}{2-x-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+2}.$$

2. Используя табличное разложение

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\ldots+t^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}t^n, \qquad t\in(-1,1),$$

получим

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \qquad x\in(-1,1),$$

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x/2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, \quad x\in(-2,2).$$

Таким образом,

$$\frac{3}{2-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

3. Областью сходимости полученного ряда является пересечение вышеуказанных областей сходимости, т.е. $(-1,1)\cap(-2,2)=(-1,1)$.

Ответ. $$\frac{3}{2-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n \qquad \forall x\in(-1,1).$$

Условия задач. *Разложить функции в ряды Тейлора* $(x_0=0)$.

1. $\dfrac{5}{6-x-x^2}$.
2. $\ln(1-x-20x^2)$.
3. $\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$.
4. $\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$.
5. $\dfrac{x}{3+2x}$.
6. $\sqrt[4]{16+x}$.
7. xe^{2x^2+1}.
8. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{27-x}}$.
9. $\ln(12x^2+7x+1)$.
10. $\cos^2 3x$.

Ответы.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n, \quad x\in(-2,2).$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n-5^n}{n}x^n, \quad x\in\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right).$

3. $\displaystyle\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \quad x\in(-\infty,+\infty).$

4. $\displaystyle\frac{x}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!\,2^n\,3^{2n+1}}x^{2n+1}, \quad x\in(-3,3).$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{3^{n+1}}x^{n+1}, \quad x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right).$

6. $\displaystyle 2+\frac{x}{32}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3\cdot7\cdot11\ldots(4n-5)}{2^{6n-1}n!}x^n, \quad x\in[-16,16].$

7. $\displaystyle e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^{2n+1}, \quad x\in(-\infty,+\infty).$

8. $\displaystyle\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{n!3^{4n+1}}x^n, \quad x\in(-27,27).$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^n+3^n}{n}x^n, \quad x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right].$

10. $\displaystyle 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n6^{2n}}{2\,(2n)!}x^{2n}, \quad x\in(-\infty,+\infty).$

10.14. Приближенные вычисления с помощью степенных рядов

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Вычислить интеграл*

$$\int_0^b f(x)\,dx$$

с точностью α, где $f(x)$ разложима в степенной ряд, имеющий радиус сходимости $R>b$.

План решения. Практические вычисления обычно сводятся к суммированию того или иного числового ряда. В данном случае такой ряд получается, если разложить подынтегральное выражение в степенной ряд и проинтегрировать его почленно.

1. Разлагаем подынтегральную функцию в степенной ряд по степеням x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

и определяем его область сходимости.

2. Степенной ряд можно интегрировать почленно по любому отрезку, принадлежащему интервалу сходимости. Поэтому, интегрируя почленно полученный ряд и используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

3. Вычисляем сумму числового ряда с заданной точностью (оценивая остаток ряда).

Замечание. Если разложить подынтегральную функцию в ряд не по степеням x, а по степеням $x - b/2$, то ряд будет сходится быстрее, т.е. для обеспечения заданной точности может потребоваться меньше слагаемых, однако в итоге вычисления оказываются более сложными.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_0^{0,1} \cos(100x^2)\,dx$$

с точностью $\alpha = 0,001$.

Решение.

1. Разлагаем подынтегральную функцию в ряд Тейлора по степе-

ням x:

$$\cos(100x^2) = 1 - \frac{(10^2x^2)^2}{2!} + \frac{(10^2x^2)^4}{4!} - \frac{(10^2x^2)^6}{6!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(10^2x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n}x^{4n}}{(2n)!}.$$

Разложение справедливо при всех x.

2. Интегрируем почленно полученный ряд:

$$\int_0^{0,1} \cos(10^2x^2)\,dx = \int_0^{0,1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n}x^{4n}}{(2n)!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n}}{(2n)!} \int_0^{0,1} x^{4n}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n}}{(2n)!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\bigg|_0^{0.1} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}.$$

3. Оценим остаток ряда. Так как ряд знакочередующийся,

$$a_n = \frac{1}{10(4n+1)(2n)!} > a_{n+1} = \frac{1}{10(4n+5)(2n+2)!}$$

и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то справедливо неравенство

$$|R_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{10(4n+5)(2n+2)!}.$$

Для вычисления интеграла с заданной точностью достаточно взять два члена ряда, так как

$$R_1 \le \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 4!} < 0,001.$$

4. Производя вычисления, получаем

$$\int_0^{0,1} \cos(100x^2)\,dx \cong \frac{1}{10} - \frac{1}{10 \cdot 5 \cdot 2!} \cong 0,090.$$

Ответ. $\displaystyle\int_0^{0,1} \cos(100x^2)\,dx \cong 0,090 \pm 0,001.$

Условия задач. *Вычислить интегралы с точностью* $\alpha = 0,001$.

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx.$

2. $\displaystyle\int\limits_0^1 \sin x^2\,dx.$

3. $\displaystyle\int\limits_0^{0,5} \frac{1}{1+x^4}\,dx.$

4. $\displaystyle\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\,dx.$

5. $\displaystyle\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2/4}\,dx.$

6. $\displaystyle\int\limits_0^{2/3} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}}\,dx.$

7. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx.$

8. $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx.$

9. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx.$

10. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}}\,dx.$

Ответы. 1. $S \cong 0,747$. 2. $S \cong 0,310$. 3. $S \cong 0,494$. 4. $S \cong 0,190$. 5. $S \cong 0,508$. 6. $S \cong 0,490$. 7. $S \cong 0,662$. 8. $S \cong 0,608$. 9. $S \cong 0,012$. 10. $S \cong 0,495$.

Глава 11

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При изучении темы ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ вы познакомитесь с различными типами уравнений первого и второго порядков и освоите методы их решения. Вы изучите линейные уравнения с постоянными коэффициентами, структуру их общего решения и методы его нахождения (метод Эйлера, метод подбора частных решений, метод Лагранжа).

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете вычислить интегралы, решить системы уравнений, продифференцировать найденные решения и выполнить численные расчеты (например, при решении задачи Коши), а также проверить полученные вами результаты.

11.1. Понятие решения

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Доказать, что функция* $y = y(x)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению* $F(x, y, y') = 0$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Для доказательства того, что функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x, y, y') = 0$, достаточно вычислить производную $y'(x)$, подставить $y(x)$ и $y'(x)$ в это уравнение и убедиться в том, что получается тождество, т.е. $F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ для всех допустимых x.

ПРИМЕР. Доказать, что функция $y = -\sqrt{x^4 - x^2}$ удовлетворяет уравнению

$$xyy' - y^2 = x^4.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$y' = -\frac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2}}.$$

Подставим y и y' в левую часть уравнения и проведем необходимые преобразования:

$$x\left(-\sqrt{x^4-x^2}\right)\left(-\frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2}}\right)-(x^4-x^2)=x(2x^3-x)-x^4+x^2=x^4.$$

Получаем тождество $x^4 \equiv x^4$.

Ответ. Функция $y=-\sqrt{x^4-x^2}$ удовлетворяет заданному уравнению.

Условия задач. *Доказать, что функция $y=y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f(x,y,y')=0$.*

1. $y = xe^{-x^2/2}, \quad xy' = (1-x^2)y.$

2. $y = 5e^{-2x} + \dfrac{e^x}{3}, \quad y' + 2y = e^x.$

3. $y = x\sqrt{1-x^2}, \quad yy' = x - 2x^3.$

4. $y = \sqrt{x^2 - cx}, \quad (x^2+y^2)dx - 2xydy = 0.$

5. $y = e^{\operatorname{tg}(x/2)}, \quad y'\sin x = y\ln y.$

6. $y = \dfrac{b+x}{1+bx}, \quad y - xy' = b(1+x^2y').$

7. $y = -\sqrt{2/x^2-1}, \quad 1+y^2+xyy' = 0.$

8. $y = \dfrac{a+7x}{ax+1}, \quad y - xy' = a(1+x^2y').$

9. $y = e^{x+x^2} + 2e^x, \quad y' - y = 2xe^{x+x^2}.$

10. $y = 2 + c\sqrt{1-x^2}, \quad (1-x^2)y' + xy = 2x.$

11.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Постановка задачи. *Найти интегральные кривые дифференциального уравнения вида*

$$E(x)F(y)\,dx = G(x)H(y)\,dy. \qquad (1)$$

План решения.

1. В области, где $G(x) \neq 0$ и $F(y) \neq 0$ разделяем переменные, т.е. представляем уравнение (1) в виде

$$\frac{E(x)}{G(x)}\,dx = \frac{H(y)}{F(y)}\,dy.$$

2. Вычислим интегралы в уравнении

$$\int \frac{E(x)}{G(x)}\,dx = \int \frac{H(y)}{F(y)}\,dy$$

и преобразуем его к виду $\varphi(x,y) = C$.

3. Ответ записываем в таком виде: интегральные кривые определяются уравнением $\varphi(x,y) = C$ при всевозможных значениях C.

Замечание. Если одно или оба уравнения $G(x) = 0$ и $F(y) = 0$ имеют решения $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$, то равенства $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$ и $y = y_1$, $y = y_2, \ldots$ нужно присоединить к ответу, так как они являются интегральными кривыми дифференциального уравнения (1).

Пример. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2y\,dy - 3xy^2\,dx.$$

Решение.

1. Перепишем исходное уравнение в виде

$$3x(2+y^2)\,dx = 2y(x^2+3)\,dy. \tag{2}$$

Поскольку $x^2 + 3 > 0$ и $2 + y^2 > 0$, разделяем переменные, т.е. представляем уравнение (2) в виде

$$\frac{3x}{x^2+3}\,dx = \frac{2y}{2+y^2}\,dy.$$

2. Вычислим интегралы в уравнении

$$\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx = \int \frac{2y}{2+y^2}\,dy.$$

Имеем

$$\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+3) + C_1,$$

$$\int \frac{2y}{2+y^2}\,dy = \ln(2+y^2) + C_2.$$

Следовательно,

$$\frac{3}{2}\ln(x^2+3) = \ln(2+y^2) + C_0,$$

где $C_0 = C_2 - C_1$.

3. Упростив это равенство, получим

$$\frac{(x^2+3)^3}{(2+y^2)} = C.$$

Ответ. Интегральные кривые определяются уравнением

$$\frac{(x^2+3)^3}{(2+y^2)} = C$$

при всевозможных значениях C.

Условия задач. *Найти интегральные кривые дифференциальных уравнений.*

1. $y\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$.
2. $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.
3. $y'\,y = -2x \sec y$.
4. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.
5. $y\,(1+x^2)\,y' + x\,(1+y^2) = 0$.
6. $e^x\,dx - (1+e^y)\,y\,dy = 0$.
7. $y' = 2e^x \cos x$.
8. $y' = y \ln y$.
9. $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
10. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Ответы.

1. $\ln|y| + \operatorname{arctg} x = C$.
2. $\sin y \cos x = C$.
3. $x^2 + y\sin y + \cos y = C$.
4. $\ln|\operatorname{tg}(y/2)| + 2\sin x = C$.
5. $(x^2+1)\,(1+y^2) = C$.
6. $2\ln(1+e^x) - y^2 = C$.
7. $y = e^x(\cos x + \sin x) + C$.
8. $\ln|\ln y| - x = C$.
9. $y = \ln(1+x^2) + C$.
10. $y = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$.

11.3. Однородные уравнения

Постановка задачи. *Найти интегральные кривые однородного дифференциального уравнения первого порядка, т.е. дифференциального уравнения вида*

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0, \tag{1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — однородные функции одинакового порядка, т.е. $P(tx,ty)=t^nP(x,y)$ и $Q(tx,ty)=t^nQ(x,y)$.

План решения.

1. Преобразуем уравнение (1) к виду

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1'}$$

2. Делаем подстановку $y(x)=x\,z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'=z+x\,z'$ и уравнение (1′) приводится к виду

$$x\,\frac{dz}{dx}=f(z)-z,$$

т.е. к уравнению с разделяющимися переменными.

Заметим, что подстановку $y(x)=xz(x)$ можно делать сразу в уравнении (1), не приводя его к виду (1′).

3. Разделяем переменные в области, где $f(z)-z\neq 0$:

$$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}.$$

4. Интегрируем полученное уравнение с разделенными переменными и делаем замену $z(x)=y(x)/x$. Записываем ответ.

Замечания.

1. Если $z=z_0$ — корень уравнения $f(z)-z=0$, то решением уравнения (1) будет также $y=z_0x$.

2. Интегральные кривые однородного уравнения можно искать и в полярных координатах.

Пример. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$y'=\frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}.$$

Решение.

1. Преобразуем заданное уравнение к виду

$$y' = \frac{1 + 2\dfrac{y}{x} - 5\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2 - 6\dfrac{y}{x}}$$

(мы разделили числитель и знаменатель правой части заданного уравнения на x^2).

2. Делаем подстановку $y = xz(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y' = z + xz'$ и уравнение приводится к виду

$$z'x + z = \frac{1 + 2z - 5z^2}{2 - 6z},$$

т.е. к уравнению с разделяющимися переменными.

В результате простых преобразований получаем

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1 + z^2}{2 - 6z}.$$

3. Разделяем переменные ($1 + z^2 \neq 0$ и $x \neq 0$):

$$\frac{2 - 6z}{1 + z^2}\,dz = \frac{dx}{x}.$$

4. Интегрируя, получаем

$$2\operatorname{arctg} z - 3\ln(1 + z^2) = \ln|x| + C.$$

Заменяя z на y/x, получаем

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 3\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \ln|x| = C.$$

Ответ. Интегральные кривые определяются уравнением

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ln\frac{(x^2 + y^2)^3}{|x|^5} = C$$

при всевозможных значениях C.

Условия задач. *Найти интегральные кривые дифференциальных уравнений.*

1. $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$.

2. $y' = \dfrac{y}{x} - 1$.

3. $x^2 y' = xy + y^2 e^{-x/y}$.

4. $x \cos \dfrac{y}{x}\, dy + \left(x - y \cos \dfrac{y}{x}\right) dx = 0$.

5. $(x^2 + 2xy)\, dx + xy\, dy = 0$.

6. $xy' \ln \left(\dfrac{y}{x}\right) = x + y \ln \left(\dfrac{y}{x}\right)$.

7. $y\, dx + (2\sqrt{xy} - x)\, dy = 0$.

8. $(4y^2 + x^2)\, y' = xy$.

9. $xy' \sin \left(\dfrac{y}{x}\right) + x = y \sin \left(\dfrac{y}{x}\right)$.

10. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\, y'$.

Ответы.

1. $e^{-y/x} + \ln|x| = C$.

2. $x\, e^{y/x} = C$.

3. $e^{x/y} + \ln|x| = C$.

4. $\ln|x| + \sin \dfrac{y}{x} = C$.

5. $\ln|x + y| + \dfrac{x}{x + y} = C$

6. $\ln x - \dfrac{y}{x}\left(\ln \dfrac{y}{x} - 1\right) = C$.

7. $\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \ln|y| = C$.

8. $\ln|y| = \dfrac{x^2}{8y^2} + C$.

9. $Cx = e^{\cos(y/x)}$.

10. $y^2 = Cxe^{-y/x}$.

11.4. Линейные уравнения 1-го порядка

Постановка задачи. *Решить задачу Коши для уравнения*

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{1'}$$

План решения.

1-й способ.

1. Запишем соответствующее однородное линейное уравнение:

$$y' + p(x)y = 0. \tag{2}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

2. Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение однородного уравнения (2)

$$y = C \exp\left\{-\int p(x)\,dx\right\}. \tag{3}$$

3. Применяем метод вариации произвольной постоянной:

а) ищем решение неоднородного уравнения (1) в виде (3), считая C неизвестной функцией x, т.е. полагая $C = C(x)$;

б) подставляем в уравнение (1) y и y', определяемые из соотношения (3), где $C = C(x)$. Из полученного дифференциального уравнения определяем функцию $C(x)$.

4. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (1) получаем в виде

$$y = C(x) \exp\left\{-\int p(x)\,dx\right\}. \tag{3'}$$

Здесь $C(x)$ содержит произвольную постоянную C_0.

5. Используя начальные условия (1′), находим значение C_0 и получаем решение поставленной задачи Коши.

Записываем ответ в виде $y = \varphi(x)$.

2-й способ.

1. Ищем решение уравнения (1) в виде

$$y = u(x)v(x), \tag{4}$$

где u и v — неизвестные функции x.

2. Уравнение (1) принимает вид

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x). \tag{5}$$

3. Поскольку теперь мы имеем две неизвестные функции, а уравнение, которому они должны удовлетворять, только одно, то еще одно уравнение мы можем принять произвольно, лишь бы оно не сужало множество решений y.

Пусть одна из функций (например, $u(x)$) удовлетворяет уравнению

$$u' + p(x)u = 0. \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$v'u = q(x). \tag{7}$$

Решая уравнение (6) (с разделяющимися переменными), находим u, не равное тождественно нулю, чтобы не сужать множество решений y.

4. Подставляем $u(x)$ в уравнение (7) и решаем его относительно v.

5. Записываем общее решение уравнения в виде $y(x) = u(x)v(x)$.

6. Используя начальные условия (1′), получаем решение поставленной задачи Коши.

Записываем ответ в виде $y = \varphi(x)$.

Пример. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$y' - \frac{1}{x}\,y = -\frac{2}{x^2} \tag{8}$$

с начальным условием

$$y(1) = 1.$$

Решение.

1-й способ.

1. Записываем соответствующее однородное линейное уравнение:

$$y' - \frac{1}{x}\,y = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

2. Разделяя переменные и интегрируя, получаем общее решение однородного уравнения

$$y = Cx.$$

3. Применяем метод вариации произвольной постоянной:

а) ищем решение неоднородного уравнения (8) в виде

$$y = C(x)x,$$

где $C(x)$ — неизвестная функция x;

б) подставляя в уравнение (8)

$$y = C(x)x \quad \text{и} \quad y' = C'(x)x + C(x),$$

получаем дифференциальное уравнение относительно $C(x)$

$$C'(x)x = -\frac{2}{x^2}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные

$$dC = -\frac{2}{x^3}\,dx$$

и интегрируя, получаем

$$C(x) = \frac{1}{x^2} + C_0,$$

где C_0 — произвольная постоянная.

4. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (8) имеет вид

$$y = \left(\frac{1}{x^2} + C_0\right)x. \tag{9}$$

5. Используя начальное условие $y(1) = 1$, получаем

$$\frac{1}{1^2} + C_0 = 1,$$

находим $C_0 = 0$ и подставляем в общее решение (9).

Ответ. $y = 1/x$.

2-й способ.

1. Ищем решение уравнения (8) в виде

$$y = u(x)v(x),$$

где u и v — неизвестные функции x.

2. Уравнение (8) принимает вид

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -\frac{2}{x^2}. \tag{10}$$

3. Поскольку теперь мы имеем две неизвестные функции, а уравнение, которому они должны удовлетворять, только одно, то еще одно уравнение мы можем принять произвольно, лишь бы оно не сужало множество решений y.

Пусть одна из функций (например, $u(x)$) удовлетворяет уравнению

$$u' - \frac{1}{x}u = 0. \tag{11}$$

Тогда уравнение (10) принимает вид

$$v'u = -\frac{2}{x^2}. \tag{12}$$

Решая уравнение (11) (с разделяющимися переменными), находим

$$u(x) = Ax,$$

где A — произвольная постоянная ($A \neq 0$, чтобы не сужать множество решений).

4. Подставляем $u(x)$ в уравнение (12) и решаем его относительно v:

$$v' = -\frac{2}{Ax^3} \Longrightarrow v = \frac{1}{Ax^2} + B,$$

где B — произвольная постоянная.

5. Записываем общее решение уравнения (8) в виде

$$y(x) = u(x)v(x) = \frac{1}{x} + Cx,$$

где $C = AB$ — произвольная постоянная.

6. Используя начальное условие $y(1) = 1$, находим $C = 0$.

Ответ. $y = 1/x$.

Условия задач. *Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений.*

1. $xy' + y - e^x = 0, \qquad y(0) = 1.$
2. $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}, \qquad y(0) = 0.$
3. $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, \qquad y(0) = 0.$

4. $y' - y\,\mathrm{th}\,x = \mathrm{ch}^2\,x,$ $\quad y\,(0) = 0.$

5. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x,$ $\quad y\,(e) = \dfrac{e^2}{2}.$

6. $y'\sin x - y\cos x = 1,$ $\quad y\,(\frac{\pi}{2}) = 0.$

7. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x,$ $\quad y\,(0) = 0.$

8. $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4,$ $\quad y\,(0) = 0.$

9. $xy' - 2y = 2x^4,$ $\quad y\,(1) = 0.$

10. $y' + y\cos x = e^{\sin x},$ $\quad y\,(0) = 0.$

Ответы.

1. $y = \dfrac{e^x - 1}{x}.$ 2. $y = \dfrac{x}{\cos x}.$

3. $y = e^{-\mathrm{tg}\,x} + \mathrm{tg}\,x - 1.$ 4. $y = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,x.$

5. $y = \dfrac{x^2}{2}\ln x.$ 6. $y = -\cos x.$

7. $y = \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}\right)\dfrac{1}{\cos x}.$ 8. $y = x^3.$

9. $y = x^4 - x^2.$ 10. $y = x\,e^{-\sin x}.$

11.5. Уравнение Бернулли

Постановка задачи. *Найти решение задачи Коши для уравнения Бернулли*

$$y' + g(x)y = f(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{1'}$$

План решения.

1. С помощью подстановки

$$y = z^{1/(1-\alpha)},$$

уравнение приводится к линейному

$$z' + p(x)z = q(x), \tag{2}$$

где $p = (1-\alpha)g$ и $q = (1-\alpha)f$.

2. Решаем линейное уравнение (2) и делаем замену $z = y^{1-\alpha}$.

3. Используя начальное условие (1′), находим решение поставленной задачи Коши.

Записываем ответ в виде $y = \varphi(x)$.

Замечание. При решения уравнения Бернулли можно не приводить его к линейному, а искать решение в виде $y = u(x)v(x)$ или применять метод вариации произвольной постоянной.

Пример. Найти решение задачи Коши

$$xy' + y = xy^2 \tag{3}$$

с начальным условием

$$y(1) = 1.$$

Решение.

Преобразовав уравнение к виду

$$y' + \frac{1}{x}y = y^2,$$

убеждаемся, что это уравнение Бернулли с $\alpha = 2$.

1. С помощью подстановки

$$y = z^{1/(1-\alpha)} = z^{-1}$$

уравнение (3) приводится к линейному

$$z' - \frac{1}{x}z = -1. \tag{4}$$

2. Решаем уравнение (4) методом вариации произвольной постоянной:

а) решаем однородное уравнение

$$z' - \frac{1}{x}z = 0,$$

получаем $z = Cx$;

б) ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$z = C(x)x;$$

в) подставляя в уравнение (4)

$$z = C(x)x, \quad z' = C'(x)x + C(x),$$

получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$C'(x)x = -1.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$C(x) = C_0 - \ln x.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (4) имеет вид

$$z = x(C_0 - \ln x),$$

или, после замены $z = y^{-1}$,

$$y = \frac{1}{x(C_0 - \ln x)}.$$

3. Используя начальное условие $y(1) = 1$:

$$\frac{1}{1(C_0 - 0)} = 1,$$

получаем $C_0 = 1$.

Ответ. $y = \dfrac{1}{x(1 - \ln x)}$.

Условия задач. *Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений.*

1. $xy' = 4y = x^2\sqrt{y}$, $\quad y(1) = 0$.
2. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{arctg} x$, $\quad y(1) = \dfrac{\pi^4}{128}$.
3. $xy' + y = -x^2y^2$, $\quad y(1) = 1$.

4. $xy' + y = y^2 \ln x,$ $\qquad y(1) = 1.$

5. $(x+1)y' + y = -y^2(x+1),$ $\qquad y(0) = 1.$

6. $y' + 2y = e^x y^2,$ $\qquad y(0) = 1.$

7. $y' + y = xy^2,$ $\qquad y(0) = 1.$

8. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x},$ $\qquad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi^2}.$

9. $y'\operatorname{sh} x + y\operatorname{ch} x = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{2}\, y^2,$ $\qquad y(0) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} 1}.$

10. $y' - y\operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0,$ $\qquad y(0) = 1.$

Ответы.

1. $y = \dfrac{x^4}{4} \ln^2 |x|.$ 2. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg}^4 x.$ 3. $y = \dfrac{1}{x^2}.$

4. $y = \dfrac{1}{1+\ln x}.$ 5. $y = \dfrac{1}{(1+x)(1+\ln|1+x|)}.$ 6. $y = e^{-x}.$

7. $y = \dfrac{1}{1+x}.$ 8. $y = \left(\dfrac{1+\ln|\cos x|}{x} + \operatorname{tg} x\right)^2.$ 9. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}.$

10. $y = \dfrac{1}{(x+1)\cos x}.$

11.6. Уравнения в полных дифференциалах

Постановка задачи. *Найти интегральные кривые дифференциального уравнения*

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \tag{1}$$

План решения.

1. Если в некоторой области D $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имеют непрерывные частные производные и выполнено условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ — дифференциал некоторой функции $U(x,y)$. Тогда уравнение (1) называется *уравнением в полных диффе-*

ренциалах и может быть записано в виде

$$dU(x,y) = 0, \tag{1'}$$

где $U(x,y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая неизвестная функция.

Из $(1')$ следует, что интегральные кривые определяются уравнением $U(x,y) = C$ при всевозможных значениях C.

Для отыскания U заметим, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y). \tag{2}$$

2. Интегрируя первое равенство в (2) по x, получим

$$U = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — неизвестная функция, которую еще предстоит найти.

3. Дифференцируя U по y, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx + \varphi'(y).$$

Используя второе равенство в (2), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

4. Находим $\varphi(y)$ и затем $U(x,y)$.

Ответ. Интегральные кривые определяются уравнением $U(x,y) = C$ при всевозможных значениях C.

Пример. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$x\,dx + y\,dy + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0. \tag{3}$$

Решение.

1. Преобразуем уравнение (3):

$$\left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0.$$

В данном случае

$$P(x,y) = \left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right), \quad Q(x,y) = \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Эти функции непрерывно дифференцируемы в области $x^2 + y^2 > 0$. Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right) \quad (x^2+y^2>0).$$

Поэтому $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ — дифференциал некоторой функции $U(x,y)$ в любой односвязной области D, не содержащей точку $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, уравнение (3) является уравнением в полных дифференциалах и может быть записано в виде

$$dU(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in D.$$

При этом

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = y + \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{4}$$

2. Интегрируя первое равенство в (4) по x, получим, что при $y \neq 0$

$$U = \int \left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — неизвестная функция, которую еще предстоит найти.

3. Дифференцируя U по y, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y).$$

Используя второе равенство в (2), получим

$$\frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = y + \frac{x}{x^2+y^2}.$$

После преобразований имеем

$$\varphi'(y) = y.$$

4. Отсюда

$$\varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C,$$

и, следовательно,

$$U(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C, \quad y > 0 \text{ или } y < 0.$$

Ответ. Интегральные кривые в области $y > 0$ или в области $y < 0$ определяются уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C$$

при всевозможных значениях C.

Условия задач. *Найти интегральные кривые дифференциальных уравнений.*

1. $(x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0.$

2. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$

3. $(2x + 5y)\,dx + (5x + 3y^2)\,dy = 0.$

4. $(2xy + 3y^2)\,dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)\,dy = 0.$

5. $(3y^2 + 2xy + 2x)\,dx + (6xy + x^2 + 3)\,dy = 0.$

6. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2xy\,dy = 0.$

7. $(x^3 - 3xy^2 + 2)\,dx - (3x^2y - y^2)\,dy = 0.$

8. $(x\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)\,dx + (x\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)\,dy = 0.$

9. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})\,dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0.$

10. $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y^2}{(x - y)^2}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{(x - y)^2} - \dfrac{1}{y}\right)dy = 0.$

Ответы.

1. $\dfrac{x^2}{2} + xy + y^2 = C.$
2. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$
3. $x^2 + 5xy + y^3 = C.$
4. $x^2y + 3xy^2 - y^3 = C.$
5. $3xy^2 + x^2y + 3y + x^2 = C.$
6. $\dfrac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C.$
7. $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \dfrac{y^3}{3} = C.$
8. $y \operatorname{sh} x + x \operatorname{sh} y = C.$
9. $x^2 + \dfrac{2}{3}(x^2 + y^2)^{3/2} = C.$
10. $\dfrac{xy}{x - y} + \ln\dfrac{x}{y} = C.$

11.7. Уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}) = 0$

Постановка задачи. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}) = 0$$

План решения.

1. Полагая $y^{(k)} = p(x)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, p, p') = 0.$$

2. Определяя тип этого уравнения и применяя соответствующий метод решения, находим $p = f(x, C_1)$, где C_1 — произвольная постоянная.

3. Так как $p = y^{(k)}(x)$, имеем

$$y^{(k)} = f(x, C_1).$$

Последовательно интегрируя k раз (при каждом интегрировании не забывая о произвольной постоянной), получим ответ

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad n = k + 1,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3.$$

Решение.

1. Поскольку дифференциальное уравнение не содержит y, то полагая $y' = p(x)$, имеем $y'' = p'(x)$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$(1+x^2)p' + 2xp = 12x^3.$$

2. Уравнение

$$p' + \frac{2x}{1+x^2}p = \frac{12x^3}{1+x^2}$$

линейное относительно p и p'. Решая его, например, методом вариации произвольной постоянной, находим

$$p = \frac{3x^4 + C}{1+x^2}.$$

3. Так как $p = y'(x)$, имеем

$$y' = \frac{3x^4 + C}{1+x^2}.$$

Интегрируя, получим общее решение $y = (C+3)\operatorname{arctg} x + x^3 - 3x + C_2$.

Ответ. $y = C_1 \operatorname{arctg} x + x^3 - 3x + C_2$.

Условия задач. *Найти общие решения дифференциальных уравнений.*

1. $y'' = 1 - y'^2$.	2. $xy'' + y' = 0$.
3. $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.	4. $x^2y'' + xy' = 1$.
5. $xy''' + y'' = 1 + x$.	6. $y'''^2 + y''^2 = 1$.
7. $y'(1+y'^2) = y''$.	8. $y'' = -x/y'$.
9. $x\,y'' + y' + x = 0$.	10. $y'''^2 = 4y''$.

Ответы.

1. $y = \ln|e^{2x} + C_1| - x + C_2$. 2. $y = C_1 + C_2 \ln|x|$.

3. $y = (1 + C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1x + C_2$.

4. $y = \dfrac{1}{2}(\ln|x|)^2 + C_1 \ln|x| + C_2$.

5. $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{2} + C_1\, x \ln|x| + C_2\, x + C_3.$

6. $y = \sin(C_1 + x) + C_2\, x + C_3.$

7. $x - C_1 = \ln|\sin(y - C_2)|.$

8. $y = C_1 x^2 \left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right) + C_2 x + C_3.$

9. $y = C_1 \ln|x| - \dfrac{x^2}{4} + C_2.$

10. $y = \dfrac{1}{2}(C_1 + x)^4 + C_2\, x + C_3.$

11.8. Уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения*

$$F(y, y', y'') = 0$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Поскольку дифференциальное уравнение не содержит явно независимой переменной x, полагаем

$$y' = p(y),$$

где $p(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда по формуле для производной сложной функции имеем

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}p(y) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Получим уравнение первого порядка относительно $p(y)$

$$F\left(y, p, p\,\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

2. Определяя тип этого уравнения и применяя соответствующий метод решения, находим $p = f(y, C)$, где C — произвольная посто янная.

3. Используя начальные условия (оба), находим $C = C_1$.

4. Подставляя C_1, получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = f(y, C_1).$$

Разделяя переменные в области, где $f(y, C_1) \neq 0$, получаем

$$\frac{dy}{f(y, C_1)} = dx$$

и, интегрируя, находим $x = \varphi(y, C_1, C_2)$.

Проверяем, не является ли решение $f(y, C_1) = 0$ особым решением исходного уравнения, удовлетворяющим начальным условиям.

5. Используем начальные условия для нахождения второй постоянной C_2 (значение C_1 уже было найдено в п. 3) и получаем решение задачи Коши.

Ответ записываем в виде $y = y(x)$ или $x = x(y)$.

Пример. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y''y^3 + 1 = 0$$

с начальными условиями

$$y(1) = -1, \quad y'(1) = -1.$$

Решение.

1. Поскольку дифференциальное уравнение не содержит явно независимой переменной x, полагаем

$$y' = p(y),$$

где $p(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда по формуле для производной сложной функции имеем

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}p(y) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Получим уравнение первого порядка относительно $p(y)$

$$\frac{dp}{dy}py^3 = -1.$$

2. Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$p^2 = \frac{1}{y^2} + C_1,$$

т.е.

$$y' = -\sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1}$$

(знак минус мы выбрали из начального условия $y'(1) = -1 < 0$.)

3. Из начальных условий (обоих) имеем $y' = -1$ при $y = -1$. Отсюда, $C_1 = 0$. Учитывая, что в силу первого начального условия $y < 0$ и, следовательно, $|y| = -y$, получаем

$$y' = \frac{1}{y}.$$

4. Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$x = \frac{y^2}{2} + C_2.$$

5. Из начального условия $y(1) = -1$ получим $C_2 = 1/2$. Следовательно,

$$y = -\sqrt{2x - 1}.$$

(Знак минус мы выбрали из начального условия $y(1) = -1 < 0$.)

Ответ. $y = -\sqrt{2x - 1}$.

Условия задач. *Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений.*

1.	$y''\,y^3 = 1,$	$y\,(1/2) = 1,$	$y'\,(1/2) = 1.$
2.	$y\,y'' + y'^2 = 1,$	$y(0) = 1,$	$y'(0) = 1.$
3.	$y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0,$	$y(0) = 2,$	$y'(0) = 2.$
4.	$y^2 + y'^2 - 2y\,y'' = 0,$	$y(0) = 1,$	$y'(0) = 1.$
5.	$3y'\,y'' = y + y'^3 + 1,$	$y(0) = -2,$	$y'(0) = 0.$

6. $y'\,y^2 + y\,y'' - y'^2 = 0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=2.$

7. $2y\,y'' - 3y'^2 = 4y^2,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

8. $(1+y\,y')\,y'' = (1+y'^2)\,y',\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$

9. $2y\,y'' + y^2 - y'^2 = 0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$

10. $y\,y' + y'^2 + y\,y'' = 0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=\dfrac{1}{e-1}.$

Ответы.

1. $2y^2 - 4x^2 = 1.$ 2. $y = x+1.$ 3. $y = 2e^x.$ 4. $y = e^x.$

5. $y = -\dfrac{3}{2}(y+2)^{2/3}.$ 6. $y = \dfrac{3\,e^{3x}}{2+e^{3x}}.$ 7. $y = \sec^2 x.$

8. $y = e^x.$ 9. $y = \sin x + 1.$ 10. $y = \dfrac{e-e^{-x}}{e-1}.$

11.9. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Постановка задачи. *Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*

$$y'' + py' + qy = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx],$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, $Q_m(x)$ — многочлен степени m и p, q, a, b — действительные числа.

План решения.

Общее решение неоднородного линейного уравнения n-го порядка имеет следующую структуру:

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + y_{\text{ч.н.}}, \tag{1}$$

где $y_1, y_2 \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений и $y_{\text{о.о.}}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_{\text{ч.н.}}$ — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения.

1. Записываем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

и ищем его решение в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ — неизвестное число.

Подставляя $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ в уравнение (2) и сокращая $e^{\lambda x}$, получаем так называемое характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{3}$$

2. Решаем характеристическое уравнение. Обозначим корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2. Тогда фундаментальная система решений и общее решение уравнения (2) записываются в одном из следующих трех видов:

а) если λ_1 и λ_2 вещественны и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то фундаментальная система решений — это $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ и общее решение имеет вид

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

б) если λ_1 и λ_2 вещественны и $\lambda_1 = \lambda_2$, то фундаментальная система решений — это $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ и общее решение имеет вид

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x};$$

в) если λ_1 и λ_2 комплексные, т.е. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то фундаментальная система решений — это $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ и общее решение имеет вид

$$y_{\text{о.о.}} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

3. Ищем какое-либо частное решение неоднородного уравнения. Поскольку правая часть уравнения имеет вид

$$e^{ax}[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx], \tag{4}$$

можно применить метод подбора *частных решений*:

если $a \pm ib$ не является корнем характеристического уравнения (3), то

$$y_{\text{ч.н.}} = e^{ax}[\widetilde{P}_k(x) \cos bx + \widetilde{Q}_k(x) \sin bx],$$

где $\widetilde{P}_k(x)$ и $\widetilde{Q}_k(x)$ — многочлены степени $k = \max\{n, m\}$ с неопределенными коэффициентами;

если $a \pm ib$ есть корень характеристического уравнения(3) кратности s, то

$$y_{\text{ч.н.}} = x^s e^{ax}[\widetilde{P}_k(x)\cos bx + \widetilde{Q}_k(x)\sin bx],$$

где $\widetilde{P}_k(x)$ и $\widetilde{Q}_k(x)$ — многочлены степени $k = \max\{n, m\}$ с неопределенными коэффициентами.

4. Находим неопределенные коэффициенты, подставляя $y_{\text{ч.н.}}$ в исходное уравнение.

Записываем ответ по формуле (1).

Замечание. Аналогично решаются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами любого порядка.

Пример. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения

$$y'' + y = x \sin x. \tag{5}$$

Решение.

1. Записываем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0 \tag{6}$$

и ищем его решение в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ — неизвестное число.

Подставляя $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ в уравнение (6) и сокращая $e^{\lambda x}$, получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

2. Характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Имеем фундаментальную систему решений

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x$$

и общее решение однородного уравнения (6)

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

3. Ищем какое-либо частное решение неоднородного уравнения (5). В нашем случае правая часть неоднородного уравнения имеет вид (4) с $a = 0$, $b = 1$, $n = 0$, $m = 1$.

Так как характеристическое уравнение имеет комплексные корни $a \pm ib = \pm i$ кратности $s = 1$ и $\max\{n, m\} = 1$, то частное решение ищем в виде

$$y_{\text{ч.н.}} = x[(A_1 x + A_2)\cos x + (B_1 x + B_2)\sin x],$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — неизвестные числа (неопределенные коэффициенты).

4. Находим неопределенные коэффициенты, дифференцируя $y_{\text{ч.н.}}$ два раза и подставляя в уравнение (5).

Приравнивая коэффициенты в обеих частях равенства при $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x\sin x$, получаем четыре уравнения

$$\begin{cases} 2A_1 + 2B_2 = 0, \\ 4B_1 = 0, \\ -2A_2 + 2B_1 = 0, \\ -4A_1 = 1, \end{cases}$$

из которых определяем $A_1 = -1/4$, $A_2 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 1/4$. Таким образом,

$$y_{\text{ч.н.}} = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

По формуле (1) находим общее решение неоднородного уравнения

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

Ответ. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{x^2}{4}\cos x + \dfrac{x}{4}\sin x.$

Условия задач. *Найти общие решения дифференциальных уравнений.*

1. $y'' + y = \cos x$.
2. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.
3. $y'' - 2y' + 5y = e^x\cos 2x$.
4. $y'' + y = 3\sin x$.
5. $y'' + y = 4x\cos x$.
6. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.
7. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$.
8. $y'' - 2y = 2x\,e^x(\cos x - \sin x)$.
9. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$.
10. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$.

Ответы.

1. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{x}{2} \sin x.$

2. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \dfrac{2}{5}(3 \sin 2x + \cos 2x).$

3. $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^x + \dfrac{x}{4} e^x \sin 2x.$

4. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{3}{2} x \cos x.$

5. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x + x^2 \sin x.$

6. $y = C_1\, e^{3x} + C_2\, e^{-3x} + \dfrac{1}{37} e^{3x}(6 \sin x - \cos x).$

7. $y = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{2x} - \dfrac{e^{2x}}{20}(\sin 2x + 2 \cos 2x).$

8. $y = C_1\, e^{-x\sqrt{2}} + C_2 e^{x\sqrt{2}} + x\, e^x \sin x + e^x \cos x.$

9. $y = C_1\, e^x + C_2\, e^{-x} + 2 \cos x - \sin x.$

10. $y = (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)\, e^{3x} + \dfrac{1}{102}(14 \cos x + 5 \sin x).$

11.10. Принцип суперпозиции

Постановка задачи. *Найти общее решение линейного дифференциального уравнения n - го порядка с постоянными коэффициентами*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = F(x), \tag{1}$$

где $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$.

План решения.

Принцип суперпозиции. Если правая часть уравнения (1) есть сумма нескольких функций

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$$

и Y_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — какое-нибудь частное решение каждого уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{2}$$

то в силу линейности уравнения (1) его общее решение имеет вид

$$y = y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k, \tag{3}$$

где y_0 — общее решение однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0.$$

1. Находим фундаментальную систему решений и общее решение y_0 однородного уравнения.

2. Для каждого неоднородного уравнения (2) ($i = 1, 2, \ldots, k$) находим частное решение Y_i (используя, например, метод подбора или метод вариации произвольных постоянных).

Записываем ответ в виде (3).

Пример. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения

$$y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x.$$

Решение.

1. Записываем соответствующее однородное уравнение

$$y''' - 100y' = 0 \tag{4}$$

и ищем его решение в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ — неизвестное число.

Подставляя $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ в уравнение (4) и сокращая $e^{\lambda x}$, получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 100\lambda = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет три корня $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10$ и $\lambda_3 = -10$.

Таким образом, имеем фундаментальную систему решений

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{10x}, \quad y_3 = e^{-10x}$$

и общее решение однородного уравнения

$$y_0 = C_1 + C_2 e10x + C_3 e^{-10x}.$$

2. Решаем неоднородное уравнение, используя принцип суперпозиции:

а) ищем частное решение Y_1 неоднородного уравнения

$$y''' - 100y' = 20e^{10x} \tag{5}$$

в виде $Y_1 = xAe^{10x}$, где A — неопределенный коэффициент (так как $a + ib = 10$ — корень характеристического уравнения кратности $s = 1$).

Дифференцируя Y_1 три раза и подставляя в уравнение (5), находим $A = 1/10$. Таким образом,

$$Y_1 = \frac{x}{10}\, e^{10x};$$

б) ищем частное решение Y_2 неоднородного уравнения

$$y''' - 100y' = 100\cos 10x \tag{6}$$

в виде $Y_2 = B_1 \cos 10x + B_2 \sin 10x$, где B_1 и B_2 — неопределенные коэффициенты (так как $a \pm ib = \pm 10i$ не являются корнями характеристического уравнения, то множитель x отсутствует).

Дифференцируя Y_2 три раза и подставляя в уравнение (6), находим $B_1 = 0$ и $B_2 = -1/20$. Таким образом,

$$Y_2 = -\frac{1}{20} \sin 10x.$$

Используя принцип суперпозиции (3), получаем

$$y = y_0 + Y_1 + Y_2 = C_1 + C_2 e^{10x} + C_3 e^{-10x} + \frac{x}{10}\, e^{10x} - \frac{1}{20} \sin 10x.$$

Ответ. $y = C_1 + C_2 e^{10x} + C_3 e^{-10x} + \dfrac{x}{10}\, e^{10x} - \dfrac{1}{20} \sin 10x.$

Условия задач. *Найти общие решения дифференциальных уравнений.*

1. $y'' + y' = 5x + 2\,e^x$. 2. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x + x\,e^{-x}$.

3. $y'' - 3y' = x + \cos x$. 4. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$.

5. $y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1$. 6. $y'' + 9y = x\,e^{3x} + 2x \sin x$.

7. $y'' + y = 2x \cos x \cos 2x$. 8. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 2e^{3x} + 3e^{2x}$.

9. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3x\,e^x$. 10. $y^{\text{IV}} + 2y'' + y = e^x + \sin x + \sin 2x$.

Ответы.

1. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x + \frac{5}{2} x^2 - 5x.$

2. $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6} - \cos x\right) e^{-x}.$

3. $y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x) - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}.$

4. $y = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)\, e^x + \frac{1}{37}(\sin 3x + 6\cos 3x) + \frac{e^x}{9}.$

5. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4}(3\sin 2x + 2\cos 2x) + \frac{1}{4}.$

6. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{4} x \sin x - \frac{1}{16}\cos x + \frac{1}{54}(3x - 1)\, e^{3x}.$

7. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x - \frac{x}{8}\cos 3x + \frac{3}{32}\sin 3x.$

8. $y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)\, e^{2x} + e^{3x} + \frac{3}{2} x^2 e^{2x}.$

9. $y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right) e^x.$

10. $y = (C_1 x + C_2)\cos x + (C_3 x + C_4)\sin x + \frac{1}{4} e^x - \frac{1}{8} x^2 \sin x + \frac{1}{9}\sin 2x.$

11.11. Метод Лагранжа

Постановка задачи. *Найти решение задачи Коши для линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами*

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{1'}$$

План решения.

1. Записываем соответствующее однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0. \tag{2}$$

Находим фундаментальную систему решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и общее решение однородного уравнения

$$y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x).$$

2. Применяем *метод Лагранжа* (метод вариации произвольных постоянных).

Если известна фундаментальная система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ однородного уравнения (2), то общее решение соответствующего неоднородного уравнения (1) может быть найдено по формуле

$$y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x),$$

где функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{3}$$

Интегрируя, находим функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и записываем общее решение неоднородного уравнения.

3. Используя начальные условия (1′), находим решение задачи Коши.

Записываем ответ в виде $y = y(x)$.

Пример. Найти решение задачи Коши

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение.

1. Записываем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + y = 0.$$

Находим фундаментальную систему решений $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$ и общее решение однородного уравнения

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2. Применяем метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных):

а) ищем решение данного неоднородного уравнения в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x;$$

б) записываем систему уравнений для определения функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = 1/\cos x. \end{cases}$$

Решая ее (так как решение ищем в окрестности точки $x = 0$, то $\cos x > 0$), получим

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x, \quad C_2'(x) = 1.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(x) = \ln\cos x + C_1^*, \quad C_2(x) = x + C_2^*;$$

в) записываем полученное общее решение данного неоднородного уравнения

$$y = (\ln\cos x + C_1^*)\cos x + (x + C_2^*)\sin x.$$

3. Используя начальные условия, определяем константы C_1^* и C_2^*. Так как

$$y(0) = (\ln\cos 0 + C_1^*)\cos 0 + (0 + C_2^*)\sin 0 = 0,$$

то $C_1^* = 1$. Так как

$$y'(0) = (\ln\cos 0 + C_1^*)\sin 0 + \left(-\frac{\sin 0}{\cos 0}\right)\cos 0 + \sin 0 + (0 + C_2^*)\cos 0 = 0,$$

то $C_2^* = 0$.

Ответ. $y = \cos x(\ln\cos x + 1) + x\sin x$.

Условия задач. *Найти решения задач Коши для, дифференциальных уравнений.*

1. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}, \qquad y(1) = 0, \qquad y'(1) = 0.$

2. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

3. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$, $\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = -2.$

4. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$, $\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0.$

5. $y'' + y = \operatorname{tg} x$, $\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 1.$

6. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$, $\quad y(1) = e,\quad y'(1) = 3\,e.$

7. $y'' - y = \operatorname{th} x$, $\quad y(0) = 2 + \dfrac{\pi}{2},\quad y'(0) = 1.$

8. $y'' - 2y = 4\,x^2 e^{x^2}$, $\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = 0.$

9. $y'' - y = \dfrac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$, $\quad y(1) = e - 4,\quad y'(1) = e - 2.$

10. $y'' - 2y + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$, $\quad y(-1) = \dfrac{1}{e} - 1,\quad y'(-1) = \dfrac{1}{e} - 1.$

Ответы.

1. $y = (1 - x + x\ln x)\,e^{-x}.$

2. $y = \dfrac{\pi}{2}\cos x + \sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|.$

3. $y = -x\cos 2x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \sin 2x\ln|\cos x|.$

4. $y = \dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x| + \dfrac{x}{2}\sin 2x.$

5. $y = \cos x + \sin x + \cos\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|.$

6. $y = x\,e^x\,(1 + \ln x).$ 7. $y = (e^x + e^{-x})(1 + \operatorname{arctg} e^x).$

8. $y = e^{x\sqrt{2}} + e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2}.$ 9. $y = e^x - 4\sqrt{x}.$ 10. $y = e^x + \dfrac{1}{x}.$

Глава 12

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При изучении темы КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ вы научитесь записывать области (на плоскости и в пространстве) с помощью неравенств в декартовых, полярных, цилиндрических и сферических координатах, расставлять пределы интегрирования и сводить кратные интегралы к повторным. Вы научитесь также решать задачи геометрии и механики с использованием двойных и тройных интегралов (в декартовых, полярных, обобщенных полярных, цилиндрических и сферических координатах).

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете решить неравенства, вычислить полученные повторные интегралы, выполнить все численные расчеты и проверить правильность полученных вами результатов.

12.1. Изменение порядка интегрирования

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Изменить порядок интегрирования*

$$I = \int\limits_a^b dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx + \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_3(y)}^{x_4(y)} f(x,y)\,dx.$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Область интегрирования состоит из двух областей D_1 и D_2. Зададим их неравенствами

$$D_1 = \left\{ (x,y): \quad \begin{array}{c} a \le y \le b, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{array} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x,y): \quad \begin{array}{c} c \le y \le d, \\ x_3(y) \le x \le x_4(y) \end{array} \right\}.$$

2. Решаем системы неравенств, определяющих области D_1 и D_2, относительно y и получаем

$$y_1^{(1)}(x) \le y \le y_2^{(1)}(x), \quad y_1^{(2)}(x) \le y \le y_2^{(2)}(x).$$

3. Определяем границы изменения x, решая неравенства

$$y_1^{(1)}(x) \le y_2^{(1)}(x), \quad y_1^{(2)}(x) \le y_2^{(2)}(x).$$

Получаем $l_1 \le x \le m_1$ и $l_2 \le x \le m_2$.

4. Области D_1 и D_2 можно представить в виде

$$D_1 = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} l_1 \le x \le m_1, \\ y_1^{(1)}(x) \le y \le y_2^{(1)}(x) \end{array} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} l_2 \le x \le m_2, \\ y_1^{(2)}(x) \le y \le y_2^{(2)}(x) \end{array} \right\}.$$

5. Записываем интегралы I с измененным порядком интегрирования:

$$I = \int\limits_{l_1}^{m_1} dx \int\limits_{y_1^{(1)}(x)}^{y_2^{(1)}(x)} f(x,y)\,dy + \int\limits_{l_2}^{m_2} dx \int\limits_{y_1^{(2)}(x)}^{y_2^{(2)}(x)} f(x,y)\,dy.$$

6. Если $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$ и $y_2^{(1)}(x) = y_1^{(2)}(x)$ или $y_2^{(2)}(x) = y_1^{(1)}(x)$, то I можно представить одним интегралом

$$I = \int\limits_{l}^{m} dx \int\limits_{y_1^{(1)}(x)}^{y_2^{(2)}(x)} f(x,y)\,dy \quad \text{или} \quad I = \int\limits_{l}^{m} dx \int\limits_{y_1^{(2)}(x)}^{y_2^{(1)}(x)} f(x,y)\,dy.$$

Записываем ответ.

Пример. *Изменить порядок интегрирования*

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Решение.

1. Область интегрирования состоит из двух областей D_1 и D_2. Зададим их неравенствами

$$D_1 = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} 0 \le y \le 1, \\ 0 \le x \le \sqrt{y} \end{array} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} 1 \le y \le \sqrt{2}, \\ 0 \le x \le \sqrt{2-y^2} \end{array} \right\}.$$

2. Решаем системы неравенств, определяющих области D_1 и D_2, относительно y и получаем

$$x^2 \le y \le 1, \quad 1 \le y \le \sqrt{2-x^2}.$$

3. Определяем границы изменения x, решая неравенства

$$x^2 \le 1, \quad 1 \le \sqrt{2-x^2}.$$

Учитывая, что $x \ge 0$, в обоих случаях получаем $0 \le x \le 1$.

4. Области D_1 и D_2 можно представить в виде

$$D_1 = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} 0 \le x \le 1, \\ x^2 \le y \le 1 \end{array} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} 0 \le x \le 1, \\ 1 \le y \le \sqrt{2-x^2} \end{array} \right\}$$

5. Записываем интегралы I с измененным порядком интегрирования:

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

6. Пользуясь линейностью и аддитивностью интегралов, получаем

$$I = \int\limits_0^1 dx \left\{ \int\limits_{x^2}^1 f(x,y)\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy \right\} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Ответ. $I = \displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$

Условия задач. *Изменить порядок интегрирования.*

1. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_1^{2^x} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_1^{2/x} f(x,y)\,dy.$

2. $\displaystyle\int_{1/4}^1 dy \int_{1/y}^4 f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{y^2}^4 f(x,y)\,dy.$

3. $\displaystyle\int_{-6}^{-3} dy \int_0^{\sqrt{36-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{-3}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y^2-12y}} f(x,y)\,dy.$

4. $\displaystyle\int_0^{16} dy \int_{-y/4}^0 f(x,y)\,dx + \int_{16}^{32} dy \int_{-\sqrt{32-y}}^0 f(x,y)\,dx.$

5. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}} dx \int_0^{\sqrt[4]{6x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{12-x^2}} f(x,y)\,dy.$

6. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-y^2}^0 f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^0 f(x,y)\,dx.$

7. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$

8. $\displaystyle\int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx.$

9. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_1^{e^y} f(x,y)\,dx + \int_1^e dy \int_1^{e/y} f(x,y)\,dx.$

10. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} dx \int_{-2-x}^0 f(x,y)\,dy + \int_{-1}^0 dx \int_{x^3}^0 f(x,y)\,dy.$

Ответы.

1. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\log_2 y}^{2/y} f(x,y)\,dx.$

2. $\int\limits_{1}^{4} dx \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy.$

3. $\int\limits_{0}^{3\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{36-x^2}}^{-6+\sqrt{36-x^2}} f(x,y)\,dy.$

4. $\int\limits_{-4}^{0} dx \int\limits_{-4x}^{32-x^2} f(x,y)\,dy.$

5. $\int\limits_{0}^{\sqrt{6}} dy \int\limits_{y^2/\sqrt{6}}^{\sqrt{12-y^2}} f(x,y)\,dx.$

6. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{-x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$

7. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx.$

8. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy.$

9. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{e/x} f(x,y)\,dy.$

10. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2-y}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx.$

12.2. Двойной интеграл в декартовых координатах

Постановка задачи. *Вычислить двойной интеграл*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

где область D ограничена линиями $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ (и, возможно, прямыми $x=a$ и $x=b$ или $y=c$ и $y=d$).

План решения.

1. Зададим область D неравенствами. Для этого выясним, каким из неравенств

$$f_1(x,y)\le 0,\quad f_1(x,y)\ge 0,\quad f_2(x,y)\le 0\ \text{ или }\ f_2(x,y)\ge 0$$

удовлетворяют координаты точек области D.

Пусть, например, такими неравенствами оказались $f_1(x,y) \le 0$ и $f_2(x,y) \le 0$. Тогда

$$D = \left\{ (x,y): \quad \begin{array}{c} f_1(x,y) \le 0, \\ f_2(x,y) \le 0 \end{array} \right\}.$$

Решаем неравенства, определяющие D, относительно x и y. Получаем

$$D = \left\{ (x,y): \quad \begin{array}{c} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{array} \right\}$$

или

$$D = \left\{ (x,y): \quad \begin{array}{c} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{array} \right\}.$$

2. Переходим от двойного интеграла к повторному:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

или

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

3. Последовательно интегрируем, используя свойства определенного интеграла.

Записываем ответ.

Замечание. Если необходимо, разбиваем область на части и используем свойство аддитивности интеграла.

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4)\,dx\,dy,$$

где область D ограничена линиями $x = 1$, $y = x^3$ и $y = -\sqrt{x}$.

Решение.

1. Зададим область D неравенствами. Очевидно, что $-\sqrt{x} \le x^3$. Поэтому $-\sqrt{x} \le y \le x^3$. Поскольку x фигурирует под знаком квадратного корня, $x \ge 0$. Для x возможны неравенства $0 \le x \le 1$ или $1 \le x$. Во втором случае область неограничена, что неприемлемо.

Итак,

$$D = \left\{ (x,y): \quad \begin{array}{c} 0 \le x \le 1, \\ -\sqrt{x} \le y \le x^3 \end{array} \right\}.$$

2. Переходим от двойного интеграла к повторному:

$$\iint\limits_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4)\, dx\, dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2y^2 + 150x^4y^4)\, dy.$$

3. Используя свойства определенного интеграла, последовательно интегрируем сначала по y (считая x постоянной), затем по x:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2y^2 + 150x^4y^4)\, dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[54x^2 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} y^2\, dy + 150x^4 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} y^4\, dy \right] dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[54x^2 \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\sqrt{x}}^{x^3} + 150x^4 \left.\frac{y^5}{5}\right|_{-\sqrt{x}}^{x^3} \right] dx =$$

$$= \int\limits_0^1 [18x^{11} + 18x^{7/2} + 30x^{19} + 30x^{13/2}]\, dx = 11.$$

Ответ. $\displaystyle\iint\limits_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4)\, dx\, dy = 11.$

Условия задач. *Вычислить двойные интегралы по областям D, ограниченным заданными линиями.*

1. $\displaystyle\iint\limits_D (2x - y)\, dx\, dy, \qquad y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$

2. $\displaystyle\iint\limits_D (x - y)\, dx\, dy, \qquad y = 2 - x^2, \quad y = 2x - 1.$

3. $\iint\limits_D (y \ln x)\, dx\, dy, \qquad y = \dfrac{1}{x}, \;\; y = \sqrt{x}, \;\; x = 2.$

4. $\iint\limits_D (\cos 2x + \sin y)\, dx\, dy, \qquad y = \dfrac{\pi}{4} - x, \;\; y = 0, \;\; x = 0.$

5. $\iint\limits_D \sin(x + y)\, dx\, dy, \qquad y = x, \;\; y = \dfrac{\pi}{2}, \;\; x = 0.$

6. $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}\, dx\, dy, \qquad y = \dfrac{1}{x}, \;\; y = x, \;\; x = 2.$

7. $\iint\limits_D (x^2 + y)\, dx\, dy, \qquad y = x^2, \;\; y = \sqrt{x}.$

8. $\iint\limits_D (2x - y)\, dx\, dy, \qquad y = x^2, \;\; y = x, \;\; x = 1, \;\; x = 2.$

9. $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy, \qquad y = \sqrt{1 - x^2}, \;\; y = 0, \;\; x = 0.$

10. $\iint\limits_D x^2 y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3}\, dx\, dy, \quad y = \sqrt[3]{1 - x^3}, \;\; y = 0, \;\; x = 0.$

Ответы. 1. $I = 1/10$. 2. $I = 64/15$. 3. $I = 5(2\ln 2 - 1)/8$. 4. $I = (\pi + 1 - 2\sqrt{2})/4$. 5. $I = 1$. 6. $I = 9/4$. 7. $I = 33/140$. 8. $I = 9/10$. 9. $I = \pi/6$. 10. $I = 4/135$.

12.3. Двойной интеграл в полярных координатах

Постановка задачи. *Вычислить двойной интеграл*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy,$$

где область D ограничена двумя окружностями

$$y^2 + a_1 y + b_1 x + x^2 = 0, \qquad y^2 + a_2 y + b_2 x + x^2 = 0$$

$$(a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ \ b_1 b_2 > 0 \quad \textit{или} \quad b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ \ a_1 a_2 > 0)$$

и двумя прямыми

$$m_1 y + k_1 x = 0, \ \ (m_1^2 + k_1^2 \neq 0), \quad m_2 y + k_2 x = 0, \ \ (m_2^2 + k_2^2 \neq 0).$$

План решения.

1. Зададим область D неравенствами в декартовой системе координат.

Для этого заметим, что окружности $y^2 + a_1 y + b_1 x + x^2 = 0$ и $y^2 + a_2 y + b_2 x + x^2 = 0$ проходят через начало координат и их центры расположены на оси OX (при $a_1 = 0$, $a_2 = 0$) или на оси OY (при $b_1 = 0$, $b_2 = 0$) по одну сторону от начала координат (так как $b_1 b_2 > 0$ или $a_1 a_2 > 0$). Поэтому та из окружностей, которая имеет меньший радиус, расположена внутри другой. Пусть, например, это окружность $y^2 + a_1 y + b_1 x + x^2 = 0$. Область D находится между окружностями, поэтому координаты точек области D удовлетворяют неравенствам

$$y^2 + a_1 y + b_1 x + x^2 \geq 0, \quad y^2 + a_2 y + b_2 x + x^2 \leq 0.$$

Прямые $m_1 y + k_1 x = 0$ и $m_2 y + k_2 x = 0$ проходят через начало координат. Область D расположена между ними. Учитывая, в какой полуплоскости находятся окружности и, следовательно, область D, определяем, каким из следующих пар неравенств удовлетворяют координаты точек области D:

$$\begin{array}{ll}
m_1 y + k_1 x \geq 0, & \quad m_2 y + k_2 x \geq 0, \\
m_1 y + k_1 x \leq 0, & \quad m_2 y + k_2 x \geq 0, \\
m_1 y + k_1 x \geq 0, & \quad m_2 y + k_2 x \leq 0, \\
m_1 y + k_1 x \leq 0, & \quad m_2 y + k_2 x \leq 0.
\end{array}$$

2. Так как область D ограничена окружностями и прямыми, проходящими через начало координат, поставленную задачу проще решать в полярных координатах

$$\begin{cases} x = \varrho \cos\varphi, \\ y = \varrho \sin\varphi. \end{cases}$$

При этом $(\varrho, \varphi) \in D'$, а искомый интеграл определяется формулой

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi.$$

3. Чтобы найти область D', заменяем в неравенствах, определяющих область D, x на $\varrho\cos\varphi$ и y на $\varrho\sin\varphi$. Затем разрешаем полученные неравенства относительно ϱ и φ. Таким образом получим

$$D' = \left\{ (x,y): \quad \begin{array}{c} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \\ \varrho_1(\varphi) \le \varrho \le \varrho_2(\varphi) \end{array} \right\}.$$

4. Переходим от двойного интеграла к повторному:

$$S = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho$$

и последовательно интегрируем, используя свойства определенного интеграла.

Записываем ответ.

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy,$$

где область D ограничена линиями

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = x/\sqrt{3}, \quad x = 0.$$

Решение.

1. Зададим область D неравенствами в декартовой системе координат. Для этого заметим, что, выделяя полные квадраты в уравнениях окружностей $y^2 - 4y + x^2 = 0$ и $y^2 - 8y + x^2 = 0$, их можно привести к виду

$$(y-2)^2 + x^2 = 4, \tag{1}$$

$$(y-4)^2 + x^2 = 16. \tag{2}$$

Очевидно, что обе окружности проходят через начало координат и их центры расположены на оси OY в точках $(0,2)$ и $(0,4)$. Окружность (1) имеет радиус 2 и, следовательно, лежит внутри окружности (2), имеющей радиус 4. Поскольку область D находится между окружностями, координаты ее точек удовлетворяют неравенствам

$$(y-2)^2 + x^2 \ge 4, \quad (y-4)^2 + x^2 \le 16.$$

Прямые $y = x/\sqrt{3}$ и $x = 0$ проходят через начало координат. Область D расположена между ними. Учитывая, что окружности, а следовательно, и область D находятся в верхней полуплоскости, заключаем, что область D находится над прямой $y = x/\sqrt{3}$ и справа от прямой $x = 0$. Поэтому координаты точек области D удовлетворяют неравенствам

$$y \geq x/\sqrt{3}, \quad x \geq 0.$$

Итак,

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} (y-2)^2 + x^2 \geq 4, \\ (y-4)^2 + x^2 \leq 16, \\ y \geq x/\sqrt{3}, \quad x \geq 0 \end{array} \right\}.$$

2. Так как область D ограничена окружностями и прямыми, проходящими через начало координат, поставленную задачу проще решать в полярных координатах

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi, \\ y = \varrho \sin \varphi. \end{cases}$$

При этом $(\varrho, \varphi) \in D'$, а искомый интеграл определяется формулой

$$\iint\limits_{D} x \, dx \, dy = \iint\limits_{D'} \varrho \cos \varphi \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$

3. Чтобы найти область D', заменяем в неравенствах, определяющих область D, x на $\varrho \cos \varphi$ и y на $\varrho \sin \varphi$:

$$\begin{cases} (\varrho \sin \varphi - 2)^2 + \varrho^2 \cos^2 \varphi \geq 4, \\ (\varrho \sin \varphi - 4)^2 + \varrho^2 \cos^2 \varphi \leq 16, \\ \varrho \sin \varphi \geq \dfrac{\varrho \cos \varphi}{\sqrt{3}}, \quad \varrho \cos \varphi \geq 0. \end{cases}$$

Решая эти неравенства относительно ϱ и φ, получаем

$$D' = \left\{ (\varrho, \varphi) : \begin{array}{c} \pi/6 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ 4 \sin \varphi \leq \varrho \leq 8 \sin \varphi \end{array} \right\}.$$

4. Переходим от двойного интеграла к повторному:

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} \varrho\cos\varphi\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \varrho^2\,d\varrho.$$

Последовательно интегрируя, получаем

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \varrho^2\,d\varrho = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi\,\left.\frac{\varrho^3}{3}\right|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} =$$

$$= \frac{448}{3}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{112}{3}\sin^4\varphi\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = 35.$$

Ответ. $\iint\limits_D x\,dx\,dy = 35.$

Условия задач. *Вычислить двойные интегралы по областям D, ограниченным заданными линиями.*

1. $\iint\limits_D y\,dx\,dy, \qquad y^2 - 2y + x^2 = 0, \quad y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3}x.$

2. $\iint\limits_D x\,dx\,dy, \qquad y^2 - 6y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = x, \quad x = 0.$

3. $\iint\limits_D \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \qquad y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = x, \quad x = 0.$

4. $\iint\limits_D \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \qquad y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 6y + x^2 = 0, \quad y = x, \quad x = 0.$

5. $\iint\limits_D \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad y^2 - 6y + x^2 = 0, \quad y^2 - 10y + x^2 = 0, \quad y = x, \quad x = 0.$

6. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy,\qquad y^2-2x+x^2=0,\qquad y^2-4x+x^2=0,$

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y=\sqrt{3}x.$$

7. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy,\qquad y^2-4x+x^2=0,\qquad y^2-6x+x^2=0,$

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y=\sqrt{3}x.$$

8. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy,\qquad y^2-4x+x^2=0,\qquad y^2-8x+x^2=0,$

$$y=0,\ y=\sqrt{3}x.$$

9. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,\qquad y^2-2x+x^2=0,\qquad y^2-6x+x^2=0,$

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=0.$$

10. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,\qquad y^2-2x+x^2=0,\qquad y^2-10x+x^2=0,$

$$y=\sqrt{3}x,\ y=0.$$

Ответы. 1. $I=\dfrac{7}{12}(2\pi-\sqrt{3})$. 2. $I=18\dfrac{1}{2}$. 3. $I=10\sqrt{2}$. 4. $I=\dfrac{5}{6}(4-\sqrt{2})$. 5. $I=1+\dfrac{\pi}{2}$. 6. $I=\dfrac{\pi}{6}$. 7. $I=\dfrac{5}{16}(2\pi-\sqrt{3})$. 8. $I=\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. 9. $I=2\dfrac{41}{90}$. 10. $I=\dfrac{1519\sqrt{3}}{15}$.

12.4. Двойной интеграл в обобщенных полярных координатах

Постановка задачи. *Вычислить двойной интеграл*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

где область D *задана неравенствами*

$$c_1^2\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c_2^2\quad (a>0,\ b>0,\ c_1\ge 0,\ c_2>0),$$

$$m_1 y + k_1 x \geq 0 \quad (m_1^2 + k_1^2 \neq 0), \qquad m_2 y + k_2 x \geq 0 \quad (m_2^2 + k_2^2 \neq 0).$$

План решения.

1. Область D задана неравенствами в декартовой системе координат, т.е.

$$D = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} c_1^2 \leq \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq c_2^2, \\ m_1 y + k_1 x \geq 0, \\ m_2 y + k_2 x \geq 0 \end{array} \right\}.$$

2. Так как область D ограничена эллипсами и прямыми, проходящими через начало координат, поставленную задачу проще решать в обобщенных полярных координатах

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\varrho \cos\varphi, \\ y = b\varrho \sin\varphi. \end{array} \right.$$

При этом $(\varrho, \varphi) \in D'$, а искомый интеграл определяется формулой

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(a\varrho\cos\varphi, b\varrho\sin\varphi)\, ab\varrho\, d\varrho\, d\varphi.$$

3. Чтобы найти область D', заменяем в неравенствах, определяющих область D, x на $a\varrho\cos\varphi$ и y на $b\varrho\sin\varphi$. Затем разрешаем полученные неравенства относительно ϱ и φ. Таким образом, получаем

$$D' = \left\{ (\varrho,\varphi): \begin{array}{c} c_1 \leq \varrho \leq c_2 \\ \alpha \leq \varphi \leq \beta \end{array} \right\}.$$

4. Переходим от двойного интеграла к повторному:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = ab\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{c_1}^{c_2} f(a\varrho\cos\varphi, b\varrho\sin\varphi)\varrho\, d\varrho;$$

и последовательно интегрируем, используя свойства определенного интеграла.

Записываем ответ.

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D \frac{x}{y^5}\,dx\,dy,$$

где область D задана неравенствами

$$1 \le \frac{x^2}{16} + y^2 \le 3, \quad y \ge \frac{x}{4}, \quad x \ge 0.$$

Решение.

1. Область D задана неравенствами в декартовой системе координат:

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} 1 \le \dfrac{x^2}{16} + y^2 \le 3, \\ y \ge \dfrac{x}{4}, \ \ x \ge 0 \end{array} \right\}.$$

2. Так как область D ограничена эллипсами и прямыми, проходящими через начало координат, поставленную задачу проще решать в обобщенных полярных координатах

$$\begin{cases} x = 4\varrho \cos\varphi, \\ y = \varrho \sin\varphi. \end{cases}$$

При этом $(\varrho, \varphi) \in D'$, а искомый интеграл определяется формулой

$$\iint\limits_D \frac{x}{y^5}\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} \frac{4\varrho\cos\varphi}{\varrho^5 \sin^5\varphi}\, 4\varrho\, d\varrho\, d\varphi.$$

3. Чтобы найти область D', заменяем в неравенствах, определяющих область D, x на $a\varrho\cos\varphi$ и y на $b\varrho\sin\varphi$:

$$\begin{cases} 1 \le \dfrac{16\varrho^2\cos^2\varphi}{16} + \varrho^2\sin^2\varphi \le 3, \\ \varrho\sin\varphi \ge \dfrac{4\varrho\cos\varphi}{4}, \quad \varrho\cos\varphi \ge 0 \end{cases}$$

Решая эти неравенства относительно ϱ и φ, получаем

$$D' = \left\{ (\varrho, \varphi) : \begin{array}{c} 1 \le \varrho \le \sqrt{3}, \\ \pi/4 \le \varphi \le \pi/2 \end{array} \right\}.$$

4. Переходя от двойного интеграла к повторному и последовательно интегрируя, получаем

$$\iint\limits_D \frac{x}{y^5}\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} \frac{4\varrho\cos\varphi}{\varrho^5\sin^5\varphi}\, 4\varrho\, d\varrho\, d\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_1^{\sqrt{3}} 16\varrho^{-3} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin^5\varphi}\, d\varrho =$$

$$= 16 \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\sin\varphi}{\sin^5\varphi} \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \varrho^{-3} d\varrho = 16 \left(-\frac{1}{4\sin^4\varphi}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2\varrho^2}\right)\Bigg|_{1}^{\sqrt{3}} = 4.$$

Ответ. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{y^5}\,dx\,dy = 4.$

Условия задач. *Вычислить двойные интегралы.*

1. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dx\,dy, \qquad D = \left\{1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 2,\ \ y \ge 0,\ \ y \le \frac{2x}{3}\right\}.$

2. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{y}\,dx\,dy, \qquad D = \left\{1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge \frac{3x}{2}\right\}.$

3. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{y}\,dx\,dy, \qquad D = \left\{1 \le \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \le 4,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge \frac{x}{2}\right\}.$

4. $\displaystyle\iint\limits_D x^3 y\,dx\,dy, \qquad D = \left\{1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0\right\}.$

5. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{y}\,dx\,dy, \qquad D = \left\{1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \le 5,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 2x\right\}.$

6. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{y}\,dx\,dy, \qquad D = \left\{1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 5,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge \frac{2x}{3}\right\}.$

7. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{y^3}\,dx\,dy, \qquad D = \left\{1 \le \frac{x^2}{4} + y^2 \le 25,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge \frac{x}{2}\right\}.$

8. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y}{x^3}\,dx\,dy, \qquad D = \left\{1 \le x^2 + \frac{y^2}{16} \le 9,\ \ y \ge 0,\ \ y \le 4x\right\}.$

9. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{8y}{x^3}\,dx\,dy, \qquad D = \left\{1 \le \frac{x^2}{4} + y^2 \le 4,\ \ y \ge 0,\ \ y \le \frac{x}{2}\right\}.$

10. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{9x}{y^3}\,dx\,dy, \qquad D = \left\{1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 36,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge \frac{3x}{2}\right\}.$

Ответы. 1. $I = \ln 2$. 2. $I = 3\ln 2$. 3. $I = 12\ln 2$. 4. $I = 6$. 5. $I = 4\ln 2$. 6. $I = 9\ln 2$. 7. $I = 2\ln 5$. 8. $I = 8\ln 3$. 9. $I = \ln 2$. 10. $I = 2\ln 6$.

12.5. Вычисление объемов с помощью двойного интеграла

Постановка задачи. *Найти объем тела, ограниченного поверхностями*

$$g_i(x,y)=0 \quad (i=1,2,\ldots), \quad z=f_1(x,y), \; z=f_2(x,y) \quad (f_2(x,y)\geq f_1(x,y)).$$

План решения.

1. Объем цилиндрического бруса, ограниченного заданными поверхностями, определяется формулой

$$V=\iint\limits_D [f_2(x,y)-f_1(x,y)]\,dx\,dy, \tag{1}$$

где D — проекция тела на плоскость XOY.

2. Чтобы найти D, задаем тело с помощью неравенств и исключаем из них z.

Допустим, например, что координаты точек тела удовлетворяют неравенствам $0\leq z\leq f(x,y)$, $g_1(x,y)\geq 0$ и $g_2(x,y)\leq 0$. Тогда тело определяется системой неравенств

$$\begin{cases} g_1(x,y)\geq 0, \\ g_2(x,y)\leq 0, \\ 0\leq z\leq f(x,y). \end{cases}$$

Исключая z, получим

$$D=\left\{ (x,y): \quad \begin{array}{c} g_1(x,y)\geq 0, \\ g_2(x,y)\leq 0, \\ 0\leq f(x,y) \end{array} \right\}.$$

3. Вычисляем двойной интеграл по формуле (1) при $f_2=f(x,y)$ и $f_1=0$.

Записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример 1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x=17\sqrt{2y}, \quad x=2\sqrt{2y}, \quad z=1/2-y, \quad z=0.$$

Решение.

1. По формуле (1) с $f_2 = 1/2 - y$ и $f_1 = 0$ искомый объем равен

$$V = \iint\limits_D \left(\frac{1}{2} - y\right) dx\, dy,$$

где D — проекция тела на плоскость XOY.

2. Чтобы найти D, задаем тело с помощью неравенств и исключаем из них z. В данном случае тело определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x \le 17\sqrt{2y}, \\ x \ge 2\sqrt{2y}, \\ 0 \le z \le 1/2 - y \end{cases}$$

Поэтому

$$D = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} 2\sqrt{2y} \le x \le 17\sqrt{2y}, \\ 0 \le 1/2 - y, \quad y \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Здесь неравенство $y \ge 0$ необходимо, так как y стоит под знаком квадратного корня.

3. Вычисляем двойной интеграл:

$$V = \iint\limits_D \left(\frac{1}{2} - y\right) dx\, dy = \int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}} \left(\frac{1}{2} - y\right) dx =$$

$$= 15\sqrt{2} \int\limits_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - y\right) \sqrt{y}\, dy = 1.$$

Ответ. $V = 1$ ед. объема.

Пример 2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + 2x = 0, \quad z = \frac{25}{4} - y^2, \quad z = 0.$$

Решение.

1. По формуле (1) с $f_2 = 25/4 - y^2$ и $f_1 = 0$ искомый объем равен

$$V = \iint\limits_D \left(\frac{25}{4} - y^2 - 0\right) dx\, dy,$$

где D — проекция тела на плоскость XOY.

2. Чтобы найти D, задаем тело с помощью неравенств и исключаем из них z. В данном случае тело определяется неравенствами

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 25/4 - y^2 \end{cases}$$

Из первого неравенства очевидно, что $|y| \leq 1$ и, следовательно, второе неравенство выполняется автоматически (геометрически это означает, что проекция поверхности $z = 25/4 - y^2$ на плоскость XOY охватывает круг $(x+1)^2 + y^2 \leq 1$). Поэтому

$$D = \left\{ (x,y): \ (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

3. Так как область D ограничена окружностями и прямыми, проходящими через начало координат, поставленную задачу проще решать в полярных координатах

$$\begin{cases} x = \varrho \cos\varphi, \\ y = \varrho \sin\varphi. \end{cases}$$

При этом $(\varrho, \varphi) \in D'$, а искомый объем определяется формулой

$$V = \iint\limits_{D} \left(\frac{25}{4} - y^2\right) dx\, dy = \iint\limits_{D'} \left(\frac{25}{4} - \varrho^2 \sin^2\varphi\right) \varrho\, d\varphi\, d\varrho.$$

4. Чтобы найти область D', заменяем в неравенстве, определяющем область D, x на $\varrho\cos\varphi$ и y на $\varrho\sin\varphi$:

$$(\varrho\cos\varphi + 1)^2 + \varrho^2 \sin^2\varphi \leq 1.$$

Получаем

$$D' = \left\{ (\varrho, \varphi): \quad \begin{matrix} 0 \leq \varrho \leq -2\cos\varphi, \\ \pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2 \end{matrix} \right\}.$$

Заметим, что из неравенств $0 \leq \varrho \leq -2\cos\varphi$ следует $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$.

5. Переходим от двойного интеграла к повторному:

$$V = \iint\limits_{D'} \left(\frac{25}{4} - \varrho^2 \sin^2\varphi\right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi = \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{-2\cos\varphi} \left(\frac{25}{4} - \varrho^2 \sin^2\varphi\right) \varrho\, d\varrho.$$

Последовательно интегрируя, получаем

$$V = \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{-2\cos\varphi} \left(\frac{25}{4} - \varrho^2 \sin^2\varphi\right) \varrho\, d\varrho =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{25\varrho^2}{8} - \frac{\varrho^4}{4}\sin^2\varphi\right)\Bigg|_0^{-2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{25}{2}\cdot\cos^2\varphi - 4\cos^4\varphi\sin^2\varphi\right) d\varphi = 6\pi.$$

Ответ. $V = 6\pi$ ед. объема.

Условия задач. *Найти объемы тел, ограниченных заданными поверхностями.*

1. $x = \sqrt{y}, \quad x = 2\sqrt{y}, \quad z = 1 - y, \quad z = 0.$
2. $y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad z = 6 - x, \quad z = 0.$
3. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad z = x + y + 1, \quad z = 0.$
4. $y = x^2, \quad y = 1, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0.$
5. $y = 6 - 3x/2, \quad y = 6 - 3x, \quad y = 0, \quad z = 6 - x - y, \quad z = 0.$
6. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = xy, \quad z = 0 \quad (x \geq 0,\ y \geq 0).$
7. $y = \sqrt{x/2}, \quad y = 0 \quad z = 4 - x - 2y, \quad z = 0.$
8. $x^2 + y^2 - 4y = 0, \quad z = 4 - x^2, \quad z = 0.$
9. $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0.$
10. $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad z = 2x, \quad z = 4x.$

Ответы. 1. $V = 4/15$. 2. $V = 48\sqrt{6}/5$. 3. $V = 79/60$. 4. $V = 40/3$. 5. $V = 12$. 6. $V = 4$. 7. $V = 17/5$. 8. $V = 12\pi$. 9. $V = 3\pi/2$. 10. $V = 2\pi$.

12.6. Вычисление площадей в декартовых координатах

Постановка задачи. *Найти площадь области D, ограниченной линиями $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = 0$ (и, возможно, прямыми $x = a$ и $x = b$ или $y = c$ и $y = d$).*

План решения.

Из определения двойного интеграла следует, что искомая площадь S численно равна

$$\iint\limits_D 1 \cdot dx\,dy. \tag{1}$$

1. Зададим область D неравенствами. Для этого выясним, какие из неравенств

$$f_1(x,y) \le 0, \quad f_1(x,y) \ge 0, \quad f_2(x,y) \le 0 \ \text{ или } \ f_2(x,y) \ge 0$$

выполняются для координат точек области D.

Пусть, например, такими неравенствами оказались $f_1(x,y) \le 0$ и $f_2(x,y) \le 0$. Тогда

$$D = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} f_1(x,y) \le 0, \\ f_2(x,y) \le 0 \end{array} \right\}.$$

Решаем неравенства, определяющие D, относительно x и y. Получаем

$$D = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{array} \right\}$$

или

$$D = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{array} \right\}.$$

2. Переходим от двойного интеграла к повторному:

$$\iint\limits_D dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$$

или

$$\iint\limits_D dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx.$$

3. Последовательно интегрируем, используя свойства определенного интеграла.

Записываем ответ, не забывая о размерности.

Замечание. Если необходимо, разбиваем область на части и используем свойство аддитивности интеграла.

Пример. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 = 12, \quad x\sqrt{6} = y^2 \quad (x \geq 0).$$

Решение.

1. Зададим область D неравенствами. Область не может находиться вне круга, так как тогда она неограничена. Область не может находиться слева от параболы, так как в этом случае ее точки могут иметь отрицательные абсциссы, что исключено условием $x \geq 0$. Следовательно,

$$D = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 12, \\ x \geq y^2/\sqrt{6} \end{array} \right\}.$$

Решаем неравенства, определяющие D, относительно x и y. Получаем

$$\frac{y^2}{\sqrt{6}} \leq x \leq \sqrt{12 - y^2}.$$

Следовательно, $y^2/\sqrt{6} \leq \sqrt{12 - y^2}$. Отсюда $-\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6}$. Итак,

$$D = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} -\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6}, \\ y^2/\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{12 - y^2} \end{array} \right\}.$$

2. Вычисляем площадь области D по формуле (1). Переходя от двойного интеграла к повторному, получим

$$S = \iint\limits_D dx\,dy = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} dy \int\limits_{y^2/\sqrt{6}}^{\sqrt{12-y^2}} dx.$$

3. Используя свойства определенного интеграла, последовательно интегрируем:

$$S = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} dy \int\limits_{y^2/\sqrt{6}}^{\sqrt{12-y^2}} dx = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{12 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{6}} \right) dy = 3\pi + 2.$$

Ответ. $S = (3\pi + 2)$ (ед. длины)^2.

Условия задач. *Найти площади фигур, ограниченных заданными линиями.*

1. $y = 2/x, \;\; y = 4e^x, \;\; y = 2, \;\; y = 4.$

2. $y = 1/x, \;\; y = 2e^x, \;\; y = 1, \;\; y = 2.$

3. $y = 2/x, \;\; y = 2\sqrt{x}, \;\; x = 4.$

4. $x^2 + y^2 = 2, \;\; y = -x^2 \;\; (y \leq 0).$

5. $y = \sqrt{x}, \;\; y = 0, \;\; x = 4.$

6. $x = 2 - y^2, \;\; x = -y.$

7. $y = \sin x, \;\; y = \cos x, \;\; x = 0, \;\; x = \pi/4.$

8. $y = 2x^2 - 1, \;\; y = x.$

9. $x = \sqrt{4 - y^2}, \;\; x = y^2/3.$

10. $y = \ln x, \;\; y = e/x, \;\; x = 1.$

Ответы. 1. $S = 2$. 2. $S = 1$. 3. $S = 28/3 - \ln 16$. 4. $S = \pi/2 + 1/3$. 5. $S = 16/3$. 6. $S = 7/6$. 7. $S = \sqrt{2} - 1$. 8. $S = 27/24$. 9. $S = 2\pi/3 - \sqrt{3}/6$. 10. $S = e - 1$.

12.7. Вычисление площадей в полярных координатах

Постановка задачи. *Найти площадь области D, ограниченной двумя окружностями*

$$y^2 + a_1 y + b_1 x + x^2 = 0, \qquad y^2 + a_2 y + b_2 x + x^2 = 0,$$

$$(a_1 = 0, \; a_2 = 0, \; b_1 b_2 > 0 \quad \textit{или} \quad b_1 = 0, \; b_2 = 0, \; a_1 a_2 > 0)$$

и двумя прямыми

$$m_1 y + k_1 x = 0, \;\; (m_1^2 + k_1^2 \neq 0), \qquad m_2 y + k_2 x = 0, \;\; (m_2^2 + k_2^2 \neq 0).$$

План решения. Из определения двойного интеграла следует, что искомая площадь S численно равна

$$S = \iint\limits_D 1 \cdot dx\,dy. \tag{1}$$

1. Так как область D ограничена окружностями и прямыми, проходящими через начало координат, поставленную задачу проще решать, переходя к полярным координатам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

и записывая уравнения границ в полярных координатах.

При этом область D перейдет в область D', а искомая площадь будет равна

$$S = \iint\limits_{D'} \rho\,d\rho\,d\varphi.$$

2. Зададим неравенствами область D' в полярных координатах:

$$D' = \left\{ (\rho,\varphi): \quad \begin{array}{c} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \\ \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi) \end{array} \right\}.$$

3. Переходим от двойного интеграла к повторному:

$$S = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\,d\rho$$

и вычисляем его, пользуясь свойствами определенного интеграла.

Записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad x = 0.$$

Решение.

1. Так как область D ограничена окружностями и прямыми, проходящими через начало координат, поставленную задачу проще решать, переходя к полярным координатам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

При этом область D перейдет в область D', ограниченную линиями

$$\varrho = 4\sin\varphi, \quad \varrho = 8\sin\varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

А искомая площадь будет равна

$$S = \iint\limits_{D'} \varrho\, d\varrho\, d\varphi.$$

2. Зададим неравенствами область D' в полярных координатах:

$$D' = \left\{ (\varrho, \varphi) : \quad \begin{array}{c} \pi/6 \le \varphi \le \pi/2, \\ 4\sin\varphi \le \varrho \le 8\sin\varphi \end{array} \right\}.$$

3. Переходим от двойного интеграла к повторному:

$$S = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \varrho\, d\varrho.$$

Последовательно интегрируя, получим

$$S = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \varrho\, d\varrho = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \left.\frac{\varrho^2}{2}\right|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} d\varphi = 24 \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2\varphi\, d\varphi = 4\pi + 3\sqrt{3}.$$

Ответ. $S = (4\pi + 3\sqrt{3})$ (ед. длины)^2.

Условия задач. *Найти площади фигур, ограниченных заданными линиями.*

1. $y^2 - 3y + x^2 = 0, \quad y^2 - 5y + x^2 = 0, \quad y = x/\sqrt{3}, \quad x = 0.$

2. $y^2 + 3y + x^2 = 0, \quad y^2 + 5y + x^2 = 0, \quad y = x, \quad x = 0.$

3. $y^2 - 3y + x^2 = 0, \quad y^2 - 7y + x^2 = 0, \quad y = \sqrt{3}x, \quad x = 0.$

4. $y^2 + 3y + x^2 = 0, \quad y^2 + 5y + x^2 = 0, \quad y = x, \quad y = x/\sqrt{3}.$

5. $y^2 - 3y + x^2 = 0, \quad y^2 - 5y + x^2 = 0, \quad y = x/\sqrt{3}, \quad x = \sqrt{3}x.$

6. $y^2 - 5x + x^2 = 0, \quad y^2 - 7x + x^2 = 0, \quad y = x/\sqrt{3}, \quad y = 0.$

7. $y^2 + 4x + x^2 = 0, \quad y^2 + 6x + x^2 = 0, \quad y = x/\sqrt{3}, \quad y = \sqrt{3}x.$

8. $y^2 - 3x + x^2 = 0, \quad y^2 - 5x + x^2 = 0, \quad y = \sqrt{3}x, \quad y = 0.$

9. $y^2 + 2x + x^2 = 0, \quad y^2 + 4x + x^2 = 0, \quad y = x, \quad y = 0.$

10. $y^2 + 2x + x^2 = 0, \quad y^2 + 10x + x^2 = 0, \quad y = \sqrt{3}x, \quad y = 0.$

Ответы. 1. $S = 4\pi/3 + \sqrt{3}$. 2. $S = \pi + 2$. 3. $S = 5\pi/3 + 5\sqrt{3}/2$. 4. $S = \pi/3 - 2 + \sqrt{3}$. 5. $S = 2\pi/3$. 6. $S = \pi + 3\sqrt{3}/2$. 7. $S = 5\pi/6$. 8. $S = 4\pi/3 + \sqrt{3}$. 9. $S = 3\pi/4 + 3/2$. 10. $S = 8\pi + 6\sqrt{3}$.

12.8. Вычисление массы плоской пластины

Постановка задачи. *Найти массу плоской пластины D с поверхностной плотностью $\mu = \mu(x, y)$, ограниченной заданными кривыми.*

План решения.

1. Масса пластины D с поверхностной плотностью $\mu(x, y)$ определяется формулой

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dx\, dy.$$

2. Вычисляем полученный двойной интеграл. Записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример 1. Найти массу пластины D с поверхностной плотностью $\mu = 16x + 9y^2/2$, ограниченной кривыми

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = 0, \quad y^2 = 16x \quad (y \geq 0).$$

Решение.

1. Масса пластины D с поверхностной плотностью $\mu = 16x + 9y^2/2$ определяется формулой

$$m = \iint\limits_D \left(16x + \frac{9y^2}{2}\right) dx\, dy.$$

2. Вычисляем полученный двойной интеграл в декартовых координатах:

а) зададим область D системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1/4, \\ 0 \le y \le 4\sqrt{x}. \end{cases}$$

Неравенство $0 \le x$ следует из того, что $y^2 = 16x$, т.е. x неотрицательно;

б) перейдем от двойного интеграла к повторному:

$$m = \iint\limits_D \left(16x + \frac{9y^2}{2}\right) dx\,dy = \int\limits_0^{1/4} dx \int\limits_0^{4\sqrt{x}} \left(16x + \frac{9y^2}{2}\right) dy;$$

в) последовательно интегрируем, используя свойства определенного интеграла:

$$m = \int\limits_0^{1/4} dx \int\limits_0^{4\sqrt{x}} \left(16x + \frac{9y^2}{2}\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^{1/4} \left(16xy + \frac{3y^3}{2}\right)\bigg|_0^{4\sqrt{x}} dx = 160 \int\limits_0^{1/4} x^{3/2}\,dx = 2.$$

Ответ. $m = 2$ ед. массы.

Пример 2. Найти массу пластины D с поверхностной плотностью $\mu = x^2/(x^2 + y^2)$, ограниченной кривыми

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad x = 0.$$

Решение.

1. Масса пластины D с поверхностной плотностью $\mu = x^2/(x^2+y^2)$ определяется формулой

$$m = \iint\limits_D \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dx\,dy.$$

2. Вычисляем полученный двойной интеграл:

а) так как область D ограничена окружностями и прямыми, проходящими через начало координат, поставленную задачу проще решать в полярных координатах

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi. \end{cases}$$

При этом область D перейдет в область D', ограниченную линиями

$$\varrho = 4\sin\varphi, \quad \varrho = 8\sin\varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

а искомая масса определяется формулой

$$m = \iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} \cos^2\varphi\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi.$$

Зададим неравенствами область D' в полярных координатах:

$$D' = \left\{ (\varrho,\varphi): \quad \begin{array}{c} \pi/6 \le \varphi \le \pi/2, \\ 4\sin\varphi \le \varrho \le 8\sin\varphi \end{array} \right\};$$

б) перейдем от двойного интеграла к повторному

$$m = \iint\limits_{D'} \cos^2\varphi\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2\varphi\,d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \varrho\,d\varrho;$$

в) последовательно интегрируя, получим

$$m = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2\varphi\,d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \varrho\,d\varrho = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2\varphi\,\frac{\varrho^2}{2}\bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= 24\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \left(3\varphi - \frac{3}{4}\sin 4\varphi\right)\bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ. $m = \pi + 3\sqrt{3}/8$ ед. массы.

Пример 3. Найти массу пластины D с поверхностной плотностью $\mu = x/y^5$, ограниченной кривыми

$$\frac{x^2}{16} + y^2 = 1, \quad \frac{x^2}{16} + y^2 = 3, \quad y = \frac{x}{4}, \quad x = 0 \quad \left(y \geq \frac{x}{4},\ x \geq 0\right).$$

Решение.

1. Масса пластины D с поверхностной плотностью $\mu = x/y^5$ определяется формулой

$$m = \iint\limits_D \frac{x}{y^5}\, dx\, dy.$$

2. Вычисляем полученный двойной интеграл:

а) зададим область D неравенствами в декартовой системе координат

$$D = \left\{ (x,y): \quad \begin{array}{c} 1 \leq \dfrac{x^2}{16} + y^2 \leq 3, \\ y \geq x/4, \quad x \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Так как область D ограничена эллипсами и прямыми, проходящими через начало координат, поставленную задачу проще решать в обобщенных полярных координатах

$$\begin{cases} x = 4\varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi. \end{cases}$$

При этом $(\varrho, \varphi) \in D'$, а искомая масса определяется формулой

$$m = \iint\limits_D \frac{x}{y^5}\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} \frac{4\varrho\cos\varphi}{\varrho^5\sin^5\varphi}\, 4\varrho\, d\varrho\, d\varphi.$$

Чтобы найти область D', заменяем в неравенствах, определяющих область D, x на $4\varrho\cos\varphi$ и y на $\varrho\sin\varphi$:

$$\begin{cases} 1 \leq \dfrac{16\varrho^2\cos^2\varphi}{16} + \varrho^2\sin^2\varphi \leq 3, \\ \varrho\sin\varphi \geq 4\varrho\cos\varphi/4, \quad \varrho\cos\varphi \geq 0. \end{cases}$$

Решая эти неравенства относительно ϱ и φ, получаем

$$D' = \left\{ (\varrho, \varphi): \quad \begin{array}{c} 1 \leq \varrho \leq \sqrt{3}, \\ \dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\};$$

б) переходим от двойного интеграла к повторному:

$$m = \iint\limits_{D'} \frac{4\varrho\cos\varphi}{\varrho^5\sin^5\varphi}\, 4\varrho\, d\varrho\, d\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} 16\varrho^{-3}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^5\varphi}\, d\varrho;$$

в) последовательно интегрируя, получаем

$$m = 16\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\sin\varphi}{\sin^5\varphi} \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \varrho^{-3} d\varrho = 16\left(-\frac{1}{4\sin^4\varphi}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2\varrho^2}\right)\Bigg|_{1}^{\sqrt{3}} = 4.$$

Ответ. $m = 4$ ед. массы.

Условия задач. *Найти массу пластины D с поверхностной плотностью μ, где D ограничена заданными линиями.*

1. $\mu = 2x + y^2, \qquad x = 4,\ y = 0,\ y = \sqrt{x}.$

2. $\mu = x^2 + y, \qquad x = 1,\ y = 0,\ y = 2\sqrt{x}.$

3. $\mu = x^2 + 2y, \qquad x = 0,\ y = 4,\ y = x^2\ (x \geq 0).$

4. $\mu = x + y^2, \qquad x = 0,\ y = 1,\ y = x^2/4\ (x \geq 0).$

5. $\mu = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}, \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9 \quad (x \geq 0,\ y \leq 0).$

6. $\mu = \dfrac{2y - x}{x^2 + y^2}, \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad x^2 + y^2 = 3, \quad x^2 + y^2 = 5 \quad (x \leq 0,\ y \geq 0).$

7. $\mu = \dfrac{y - x}{x^2 + y^2}, \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 16 \quad (x \leq 0,\ y \geq 0).$

8. $\mu(x, y) = y, \qquad y = 0, \quad y = x\sqrt{3}, \quad x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1, \quad x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 9 \quad (y \geq 0,\ y \leq x\sqrt{3}).$

9. $\mu(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$, $\quad y = 0, \quad y = x, \quad \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 4$
$(y \geq 0, \quad y \leq x)$.

10. $\mu(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$, $\quad x = 0, \quad y = x, \quad \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1, \quad \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 25$
$(x \geq 0, \ y \geq x)$.

Ответы. 1. $m = 448/15$. 2. $m = 11/7$. 3. $m = 448/15$. 4. $m = 11/7$. 5. $m = 2$. 6. $m = 3(\sqrt{5}-\sqrt{3})$. 7. $m = 4$. 8. $m = 52/3$. 9. $m = (\sqrt{2}-1)/2$. 10. $m = 18(\sqrt{2} - 1)$.

12.9. Тройной интеграл в декартовых координатах

Постановка задачи. *Вычислить тройной интеграл*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

где область Ω ограничена некоторыми поверхностями.

План решения.

1. Зададим область Ω системой неравенств, например,

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \\ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y). \end{cases}$$

2. Перейдем от тройного интеграла к повторному:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

3. Используя свойства определенного интеграла, последовательно интегрируем сначала по z (считая x и y постоянными), затем по y (считая x постоянной), затем по x.

Записываем ответ.

Пример. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 \operatorname{sh}(xy)\,dx\,dy\,dz,$$

где Ω ограничена плоскостями

$$x = 2, \quad y = \frac{x}{2}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = 1.$$

Решение.

1. Зададим область Ω неравенствами. Очевидно, что $0 \le z \le 1$. Для y возможны неравенства $0 \le y \le x/2$ или $x/2 \le y \le 0$. Если $0 \le y \le x/2$, то $x \ge 0$ и для x имеем $0 \le x \le 2$. Если же $x/2 \le y \le 0$, то $x \le 0$ и область не примыкает к плоскости $x = 2$. Значит, мы должны принять, что $0 \le y \le x/2$ и определить Ω системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le x/2, \\ 0 \le z \le 1. \end{cases}$$

2. Перейдем от тройного интеграла к повторному:

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 \operatorname{sh}(xy)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x/2} dy \int\limits_0^1 x^2 \operatorname{sh}(xy)\,dz.$$

3. Используя свойства определенного интеграла, последовательно интегрируем сначала по z (считая x и y постоянными), затем по y (считая x постоянной), затем по x:

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 \operatorname{sh}(xy)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x/2} dy \int\limits_0^1 x^2 \operatorname{sh}(xy)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x/2} x^2 \operatorname{sh}(xy)\,dy \int\limits_0^1 dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x/2} x^2 \operatorname{sh}(xy)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^2 x^2 \frac{\operatorname{ch}(xy)}{x}\Bigg|_0^{x/2} dx = \int\limits_0^2 x\left(\operatorname{ch}\frac{x^2}{2} - \operatorname{ch} 0\right) dx =$$

$$= \operatorname{sh} \frac{x^2}{2} \bigg|_0^2 - 2 = \operatorname{sh} 2 - 2.$$

Ответ. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} x^2 \operatorname{sh}(xy)\, dx\, dy\, dz = \operatorname{sh} 2 - 2.$

Условия задач. *Вычислить тройной интеграл по области Ω, ограниченной заданными поверхностями.*

1. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 4y^2 z e^{xy}\, dx\, dy\, dz, \qquad x = 0,\ y = 1,\ y = x,\ z = 0,\ z = 1.$

2. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 3y^2 z^2 e^{-xy}\, dx\, dy\, dz, \quad x = 0,\ y = -2,\ y = 4x,\ z = 0,\ z = 1.$

3. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 3x^2 z^2 e^{xy/2}\, dx\, dy\, dz, \quad x = 0,\ y = 2,\ y = 2x,\ z = 0,\ z = -1.$

4. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 2y^2 z \cos(\pi xy)\, dx\, dy\, dz,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 2x,\ z = 0,\ z = \pi^2.$

5. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} x^2 z \sin(\pi xy)\, dx\, dy\, dz,\ x = 1,\ y = 2x,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 4\pi.$

6. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} y^2 z \operatorname{ch}(xy)\, dx\, dy\, dz, \quad x = 0,\ y = -1,\ y = x,\ z = 0,\ z = 2.$

7. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} yz^3 \cos(xy)\, dx\, dy\, dz,\ x=1,\ y=\pi,\ z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

8. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} x^2 z \operatorname{sh}(3xy)\, dx\, dy\, dz, \quad x = 1,\ y = 2x,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 1.$

9. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} y^2 z \operatorname{ch}(2xy)\, dx\, dy\, dz, \quad x = 0,\ y = 1,\ y = x,\ z = 0,\ z = 4.$

10. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} 3xz^2 \sin(xy)\, dx\, dy\, dz,\ x=2,\ y=\pi,\ z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Ответы. 1. $I = e-2$. 2. $I = 2e^{-1}$. 3. $I = 4e-8$. 4. $I = 4$. 5. $I = 16\pi^2$. 6. $I = 2\operatorname{ch}1-2$. 7. $I = 8$. 8. $I = (\operatorname{sh}6-6)/72$. 9. $I = \operatorname{ch}2-1$. 10. $I = 2$.

12.10. Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Постановка задачи. *Вычислить тройной интеграл*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

где область Ω ограничена поверхностями

$$z = g_1(x^2+y^2), \qquad z = g_2(x^2+y^2).$$

План решения.

1. Поскольку Ω — тело вращения вокруг оси OZ, удобно перейти к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

При этом $(\varrho,\varphi,z) \in \Omega'$, а искомый интеграл определяется формулой

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz.$$

2. Зададим область Ω' неравенствами. Для этого сначала заменим в уравнениях поверхностей x на $\varrho\cos\varphi$ и y на $\varrho\sin\varphi$. Тогда Ω' определяется неравенствами $g_1(\varrho^2)\le z\le g_2(\varrho^2)$ или $g_2(\varrho^2)\le z\le g_1(\varrho^2)$.

Чтобы выбрать правильные неравенства, решаем уравнение $g_1(\varrho^2) = g_2(\varrho^2)$ относительно ϱ. Если оно имеет два решения ϱ_1 и ϱ_2 $(0 \le \varrho_1 < \varrho_2)$, то исследуем, какая из функций $g_1(\varrho^2)$ или $g_2(\varrho^2)$ больше другой на промежутке $\varrho_1 \le \varrho \le \varrho_2$. Предположим для определенности, что $g_1(\varrho^2) \le g_2(\varrho^2)$ при $\varrho_1 \le \varrho \le \varrho_2$. Тогда область Ω' определяется системой неравенств

$$\Omega' = \left\{ (\varrho,\varphi,z): \begin{array}{c} \varrho_1 \le \varrho \le \varrho_2, \\ g_1(\varrho^2) \le z \le g_2(\varrho^2), \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}.$$

Если уравнение $g_1(\varrho^2) = g_2(\varrho^2)$ имеет единственное положительное решение $\varrho = \varrho_2$, то неравенства для ϱ имеют вид $0 \le \varrho \le \varrho_2$.

3. Переходим от тройного интеграла к повторному:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_2} \varrho\,d\varrho \int\limits_{g_1(\varrho)}^{g_2(\varrho)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)\,dz,$$

и последовательно интегрируем, используя свойства определенного интеграла.

Записываем ответ.

Пример. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где область Ω ограничена поверхностями

$$z = \frac{9}{2}\sqrt{x^2+y^2}, \qquad z = \frac{11}{2} - x^2 - y^2.$$

Решение.

1. Поскольку Ω — тело вращения вокруг оси OZ, удобно перейти к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

При этом $(\varrho, \varphi, z) \in \Omega'$, а искомый интеграл определяется формулой

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} \cos^2\varphi\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz.$$

2. Зададим область Ω' неравенствами. Для этого сначала заменим в уравнениях поверхностей x на $\varrho\cos\varphi$ и y на $\varrho\sin\varphi$. Тогда Ω' определяется неравенствами $9\varrho/2 \le z \le 11/2-\varrho^2$ или $11/2-\varrho^2 \le z \le 9\varrho/2$. Чтобы выбрать правильные неравенства, решаем уравнение

$$\frac{9}{2}\varrho = \frac{11}{2} - \varrho^2.$$

Это уравнение имеет единственное положительное решение $\varrho = 1$. Следовательно, $0 \le \varrho \le 1$. При $0 \le \varrho \le 1$

$$\frac{9}{2}\varrho \le \frac{11}{2} - \varrho^2.$$

Таким образом, область Ω' определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le \varrho \le 1, \\ 9/2\varrho \le z \le 11/2 - \varrho^2, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

3. Переходим от тройного интеграла к повторному:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} \frac{\varrho^2\cos^2\varphi}{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi}\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \varrho\,d\varrho \int\limits_{9\varrho/2}^{11/2-\varrho^2} dz.$$

Последовательно интегрируя, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \varrho\,d\varrho \int\limits_{9\varrho/2}^{11/2-\varrho^2} dz = \pi \int\limits_0^1 \left(\frac{11}{2} - \varrho^2 - \frac{9}{2}\varrho\right) \varrho\,d\varrho = \pi.$$

Ответ. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \pi.$

Условия задач. *Вычислить тройной интеграл по области Ω, ограниченной заданными поверхностями.*

1. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \quad x^2+y^2+4x=0,\ z=8-y^2,\ z=0.$

2. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \quad x^2+y^2-4y=0,\ z=6-x^2,\ z=0.$

3. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz, \quad x^2+y^2-4y=0,\ z=4-x^2,\ z=0.$

4. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz, \quad x^2+y^2-4x=0,\ z=10-y^2,\ z=0.$

5. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \quad x^2+y^2-4x=0,\ z=12-y^2,\ z=0.$

6. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \quad z=\sqrt{36-x^2-y^2},\ z=\frac{x^2+y^2}{9}.$

7. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \quad z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ z=\frac{2(x^2+y^2)}{3}.$

8. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz, \quad z=\sqrt{64-x^2-y^2},\ z=\frac{x^2+y^2}{12}.$

9. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz, \quad z=\sqrt{144-x^2-y^2},\ z=\frac{x^2+y^2}{18}.$

10. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz, \quad z=\sqrt{\frac{4}{9}-x^2-y^2},\ z=x^2+y^2.$

Ответы. 1. $-\frac{44}{3}\pi$. 2. $10\frac{2}{3}\pi$. 3. $32\frac{32}{35}$. 4. $96\frac{32}{35}$. 5. $22\frac{2}{3}\pi$. 6. $42\frac{3}{4}\pi$. 7. $\frac{19}{96}\pi$. 8. 0. 9. 0. 10. 0.

12.11. Тройной интеграл в сферических координатах

Постановка задачи. *Вычислить тройной интеграл*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

где область Ω *ограничена поверхностями*

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \quad z=\pm\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2}}.$$

План решения.

1. Поскольку Ω ограничена сферой и круглым конусом, удобно перейти к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \varrho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \varrho\cos\theta. \end{cases}$$

Возможные границы изменения сферических координат суть

$$0 \le \varrho < \infty, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

При этом $(\varrho, \theta, \varphi) \in \Omega'$, а искомый интеграл определяется формулой

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} f(\varrho\cos\varphi\sin\theta, \varrho\sin\varphi\sin\theta, \varrho\cos\theta)\,\varrho^2\sin\theta\,d\varrho\,d\theta\,d\varphi.$$

2. Заменяем в уравнениях поверхностей x на $\varrho\cos\varphi\sin\theta$, y на $\varrho\sin\varphi\sin\theta$ и z на $\varrho\cos\theta$. Получаем

$$\varrho = R, \quad \operatorname{tg}\theta = \pm|a|.$$

3. Зададим область Ω' с помощью системы неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le \varrho \le R, \\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \end{cases}$$

где границы изменения θ находим, решая уравнение $\operatorname{tg}\theta = \pm|a|$ и учитывая, что θ может изменяться только от 0 до π.

Замечание. Если Ω ограничена также плоскостями $y = k_1x$ и $y = k_2x$, проходящими через ось OZ, уравнения которых в сферических координатах имеют вид $\operatorname{tg}\varphi = k_1$ и $\operatorname{tg}\varphi = k_2$, находим границы изменения φ, решая эти уравнения.

4. Переходим от тройного интеграла к повторному:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} f(\varrho\cos\varphi\sin\theta, \varrho\sin\varphi\sin\theta, \varrho\cos\theta)\,\varrho^2\sin\theta\,d\varrho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta\,d\theta \int_0^R f(\varrho\cos\varphi\sin\theta, \varrho\sin\varphi\sin\theta, \varrho\cos\theta)\,\varrho^2\,d\varrho,$$

и последовательно интегрируем, используя свойства определенного интеграла.

Записываем ответ.

Пример. *Вычислить тройной интеграл*

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где область Ω ограничена поверхностями

$$z = \sqrt{36-x^2-y^2}, \qquad z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}.$$

Решение.

1. Поскольку Ω — область, ограниченная верхней полусферой и верхним полуконусом, удобно перейти к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \varrho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \varrho\cos\theta. \end{cases}$$

При этом $(\varrho,\theta,\varphi) \in \Omega'$, а искомый интеграл определяется формулой

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} \cos^2\varphi\varrho^2\sin\theta\,d\varrho d\theta d\varphi.$$

2. Заменяем в уравнениях поверхностей x на $\varrho\cos\varphi\sin\theta$, y на $\varrho\sin\varphi\sin\theta$ и z на $\varrho\cos\theta$. Получаем

$$\varrho = 6, \quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}.$$

3. Зададим область Ω' с помощью системы неравенств:

$$\Omega' = \left\{ (\varrho,\theta,\varphi) : \begin{array}{c} 0 \le \varrho \le 6, \\ 0 \le \theta \le \pi/3, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{array} \right\}.$$

4. Переходя от тройного интеграла к повторному и последовательно интегрируя, получаем

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} \cos^2\varphi\,\varrho^2 \sin\theta\,d\varrho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{6} \varrho^2\,d\varrho = 36\pi.$$

Ответ. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = 36\pi.$

Условия задач. *Вычислить тройной интеграл по области Ω, ограниченной заданными поверхностями.*

1. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \qquad z=\sqrt{25-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}.$

2. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \qquad z=\sqrt{36-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}}.$

3. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \qquad z=\sqrt{16-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}.$

4. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \qquad z=\sqrt{9-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{80}}.$

5. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz, \qquad z=\sqrt{9-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}}.$

6. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \qquad z=\sqrt{4-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}.$

7. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \qquad z=\sqrt{9-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{8}}.$

8. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz, \qquad z=\sqrt{36-x^2-y^2}, \quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}.$

9. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz, \qquad z=\sqrt{25-x^2-y^2}, \quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}.$

10. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz, \qquad z=\sqrt{16-x^2-y^2}, \quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}.$

Ответы. 1. $75\pi/2$. 2. 63π. 3. 0. 4. 0. 5. 0. 6. 2π. 7. 6π. 8. 0. 9. 0. 10. 0.

12.12. Вычисление объемов с помощью тройного интеграла

Постановка задачи. *Найти объем тела Ω, ограниченного заданными поверхностями.*

План решения. Искомый объем равен

$$V=\iiint\limits_{\Omega} 1\cdot dx\,dy\,dz. \tag{1}$$

1. Зададим область Ω неравенствами.

2. Вычисляем тройной интеграл, сводя его к повторному, и записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример 1. Найти объем тела Ω, ограниченного поверхностями

$$x=17\sqrt{2y}, \quad x=2\sqrt{2y}, \quad z=\frac{1}{2}-y, \quad z=0.$$

Решение.

1. Зададим область Ω неравенствами. Поскольку $17\sqrt{2y}\ge 2\sqrt{2y}$, для x имеем неравенства $2\sqrt{2y}\le x\le 17\sqrt{2y}$. Поскольку y фигурирует под знаком квадратного корня, $y\ge 0$. Для z возможны неравенства $0\le z\le 1/2-y$ или $1/2-y\le z\le 0$. В первом случае $0\le y\le 1/2$. Во втором случае $y\ge 1/2$, т.е. область неограничена, что неприемлемо.

Итак,

$$\Omega = \left\{ (x,y,z): \begin{array}{c} 2\sqrt{2y} \le x \le 17\sqrt{2y}, \\ 0 \le y \le 1/2, \\ 0 \le z \le 1/2 - y \end{array} \right\}.$$

2. Вычисляем объем по формуле (1), сводя тройной интеграл к повторному:

$$V = \iiint\limits_{\Omega} 1 \cdot dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}} dx \int\limits_0^{1/2-y} dz = 1.$$

Ответ. $V = 1$ ед. объема.

Пример 2. Найти объем тела Ω, ограниченного поверхностями

$$z = \frac{9}{2}\sqrt{x^2+y^2}, \qquad z = \frac{11}{2} - x^2 - y^2.$$

Решение.

1. Поскольку Ω — тело вращения вокруг оси OZ, удобно использовать цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

При этом $(\varrho,\varphi,z) \in \Omega'$, а искомый объем определяется формулой

$$V = \iiint\limits_{\Omega'} \varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz, \tag{2}$$

где область Ω' ограничена поверхностями

$$z = \frac{9}{2}\varrho, \qquad z = \frac{11}{2} - \varrho^2.$$

2. Зададим область Ω неравенствами. Возможны два случая: либо $9\varrho/2 \le z \le 11/2 - \varrho^2$, либо $11/2 - \varrho^2 \le z \le 9\varrho/2$. В первом случае $\varrho \le 1$, во втором случае $\varrho \ge 1$, т.е. область неограничена, что неприемлемо.

Итак,

$$\Omega' = \left\{ (\varrho,\varphi,z): \begin{array}{c} 0 \le \varrho \le 1, \\ 9\varrho/2 \le z \le 11/2 - \varrho^2, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}.$$

3. Вычисляем объем по формуле (2), сводя тройной интеграл к повторному:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_{9\varrho/2}^{11/2-\varrho^2} dz = 2\pi.$$

Ответ. $V = 2\pi$ ед. объема.

Пример 3. Найти объем тела Ω, ограниченного поверхностями

$$z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \qquad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}.$$

Решение.

1. Поскольку Ω — область, ограниченная верхней полусферой и верхним полуконусом, удобно перейти к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = \varrho \cos\varphi \sin\theta, \\ y = \varrho \sin\varphi \sin\theta, \\ z = \varrho \cos\theta. \end{cases}$$

При этом $(\varrho, \theta, \varphi) \in \Omega'$, а искомый объем определяется формулой

$$V = \iiint\limits_{\Omega'} \varrho^2 \sin\theta \, d\varrho \, d\theta \, d\varphi. \tag{3}$$

Заменяем в уравнениях поверхностей x на $\varrho\cos\varphi\sin\theta$, y на $\varrho\sin\varphi\sin\theta$ и z на $\varrho\cos\theta$. После преобразований получаем

$$\varrho = 6, \qquad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}.$$

Область Ω' ограничена этими поверхностями.

2. Зададим область Ω' системой неравенств

$$\Omega' = \left\{ (\varrho, \theta, \varphi) : \begin{array}{c} 0 \le \varrho \le 6, \\ 0 \le \theta \le \pi/3, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}.$$

3. Вычисляем объем по формуле (3), сводя тройной интеграл к повторному:

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/3} \sin\theta \, d\theta \int_0^6 \varrho^2 \, d\varrho = 72\pi.$$

Ответ. $V = 72\pi$ ед. объема.

Условия задач. *Найти объемы тел, ограниченных поверхностями*

1. $x = 2\sqrt{y}$, $\quad x = \sqrt{y}$, $\quad z = 0$, $\quad z = 1 - y$.
2. $y = 2\sqrt{x}$, $\quad y = \sqrt{x}$, $\quad z = 0$, $\quad z = 1 - x$.
3. $x^2 + y^2 = 5$, $\quad y = 2\sqrt{x}$, $\quad z = 0$, $\quad z = 2x$.
4. $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $\quad z = 0$, $\quad z = 4 - y^2$.
5. $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $\quad z = 0$, $\quad z = 4 - x^2$.
6. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $\quad z = \sqrt{3}(x^2 + y^2)$.
7. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $\quad z = 0$, $\quad x^2 + y^2 = 1 \quad (x^2 + y^2 \leq 1)$.
8. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $\quad z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$.
9. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $\quad z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}}$.
10. $z = x^2 + y^2$, $\quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответы. 1. $V = 4/15$. 2. $V = 4/15$. 3. $V = 8/5$. 4. $V = 15\pi/4$. 5. $V = 15\pi/4$. 6. $V = 2\pi\,(8/3 - 5\sqrt{3}/4)$. 7. $V = 2\pi\,(9 - 16\sqrt{2}/3)$. 8. $V = 9\pi$. 9. $V = 64\pi/5$. 10. $V = \pi/6$.

12.13. Вычисление массы тела

Постановка задачи. *Найти массу тела Ω с плотностью $\mu(x, y, z)$, ограниченного заданными поверхностями.*

План решения.

1. Масса тела Ω с плотностью $\mu(x, y, z)$ определяется формулой

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

2. Зададим область Ω неравенствами.

3. Вычисляем тройной интеграл, сводя его к повторному, и записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример 1. Найти массу тела Ω с плотностью $\mu = 2x$, ограниченного поверхностями

$$x = 2\sqrt{2y}, \quad x = \sqrt{2y}, \quad z = 1 - y, \quad z = 0.$$

Решение.

1. Масса тела Ω с плотностью $\mu = 2x$ определяется формулой

$$m = \iiint\limits_{\Omega} 2x \, dx \, dy \, dz.$$

2. Зададим область Ω неравенствами. Поскольку $2\sqrt{2y} \geq \sqrt{2y}$, для x имеем неравенства $\sqrt{2y} \leq x \leq 2\sqrt{2y}$. Поскольку y фигурирует под знаком квадратного корня, $y \geq 0$. Для z возможны неравенства $0 \leq z \leq 1-y$ или $1-y \leq z \leq 0$. В первом случае $0 \leq y \leq 1$. Во втором случае $y \geq 1$, т.е. область неограничена, что неприемлемо.

Итак,

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{c} \sqrt{2y} \leq x \leq 2\sqrt{2y}, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1 - y \end{array} \right\}.$$

3. Вычисляем m, сводя тройной интеграл к повторному:

$$m = \iiint\limits_{\Omega} 2x \, dx \, dy \, dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{2y}}^{2\sqrt{2y}} 2x \, dx \int\limits_0^{1-y} dz = 1.$$

Ответ. $m = 1$ ед. массы.

Пример 2. Найти массу тела Ω с плотностью $\mu = z$, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Решение.

1. Масса тела Ω с плотностью $\mu = z$ определяется формулой

$$m = \iiint\limits_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz.$$

Поскольку Ω — тело вращения вокруг оси OZ, удобно перейти к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

При этом $(\varrho, \varphi, z) \in \Omega'$, а искомая масса определяется формулой

$$V = \iiint\limits_{\Omega'} z\varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz.$$

Заменяем в уравнениях поверхностей x на $\varrho\cos\varphi$ и y на $\varrho\sin\varphi$. Получим

$$\varrho = 2, \quad z = 0, \quad z = \frac{\varrho^2}{2}.$$

2. Зададим область Ω' системой неравенств

$$\Omega' = \left\{ (\varrho, \varphi, z): \begin{array}{c} 0 \le \varrho \le 2, \\ 0 \le z \le \varrho^2/2, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}.$$

3. Вычисляем m, сводя тройной интеграл к повторному:

$$m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \varrho\, d\varrho \int\limits_0^{\varrho^2/2} z\, dz = \frac{8\pi}{3}.$$

Ответ. $V = 8\pi/3$ ед. массы.

Пример 3. Найти массу тела Ω с плотностью $\mu = 20z$, ограниченного поверхностями

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4}}.$$

Решение.

1. Масса тела Ω с плотностью $\mu = 20z$ определяется формулой

$$m = \iiint\limits_{\Omega} 20z\, dx\, dy\, dz.$$

Поскольку Ω — область, ограниченная верхней полусферой и верхним полуконусом, удобно перейти к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \varrho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \varrho\cos\theta. \end{cases}$$

При этом $(\varrho, \theta, \varphi) \in \Omega'$, а искомая масса определяется формулой

$$m = \iiint\limits_{\Omega'} 20\varrho^3 \sin\theta\cos\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\varrho.$$

Заменяем в уравнениях поверхностей x на $\varrho\cos\varphi\sin\theta$, y на $\varrho\sin\varphi\sin\theta$ и z на $\varrho\cos\theta$. Получаем

$$\varrho = 1, \quad \operatorname{tg}\theta = 2.$$

Область Ω' ограничена этими поверхностями.

2. Зададим область Ω' системой неравенств

$$\Omega' = \left\{ (\varrho, \theta, \varphi) : \begin{array}{c} 0 \le \varrho \le 1, \\ 0 \le \theta \le \operatorname{arctg} 2, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}.$$

3. Вычисляем m, сводя тройной интеграл к повторному:

$$m = 20\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{arctg} 2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int\limits_0^1 \varrho^3\, d\varrho = 40\pi\, \frac{\sin^2\theta}{2}\bigg|_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{\varrho^4}{4}\bigg|_0^1 = 4\pi.$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\sin^2\theta\bigg|_{\theta=\operatorname{arctg} 2} = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}\bigg|_{\theta=\operatorname{arctg} 2} = \frac{4}{5}.$$

Ответ. $m = 4\pi$ ед. массы.

Условия задач. *Найти массу тела с плотностью μ, ограниченного заданными поверхностями.*

1. $\mu = 2y^2 e^{xy}$, $\quad x = 0,\quad y = 1,\quad y = x,\quad z = 0,\quad z = 1.$

2. $\mu = y^2 e^{-xy}$, $\quad x = 0,\quad y = -2,\quad y = 4x,\quad z = 0,\quad z = 1.$

3. $\mu = y^2 e^{xy/2}$, $\quad x = 0,\quad y = 2,\quad y = 2x,\quad z = 0,\quad z = -1.$

4. $\mu = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, $\quad x^2 + y^2 - 4y = 0,\quad z = 4 - x^2,\quad z = 0.$

5. $\mu = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$, $\quad x^2 + y^2 - 4x = 0,\quad z = 10 - y^2,\quad z = 0.$

6. $\mu = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, $\quad z = \sqrt{36 - x^2 - y^2},\quad z = \dfrac{x^2+y^2}{9}.$

7. $\mu = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$, $\quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad z = \dfrac{2(x^2+y^2)}{3}.$

8. $\mu = 32z$, $\quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad z = \sqrt{x^2+y^2}.$

9. $\mu = 5z$, $\quad z = \sqrt{16 - x^2 - y^2},\quad z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{9}}.$

10. $\mu = 10z$, $\quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\quad z = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$

Ответы. 1. $m = e - 2$. 2. $m = 2e^{-1}$. 3. $m = 4e - 8$. 4. $m = 5\pi/2$. 5. $m = 17\pi/2$. 6. $m = 171\pi/4$. 7. $m = 19\pi/96$. 8. $m = 4\pi$. 9. $m = 288\pi$. 10. $m = 32\pi$.

Глава 13

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При изучении темы ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ вы познакомитесь с понятием интеграла по поверхности от функции трех переменных и научитесь сводить его к двойному (а затем — к повторному), проецируя заданную поверхность на одну из координатных плоскостей. Кроме того, вы научитесь вычислять интегралы по части цилиндрической и сферической поверхностей.

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете найти координаты единичного нормального вектора поверхности (вычислить частные производные и длину вектора), вычислить полученные вами повторные интегралы, выполнить все численные расчеты и проверить правильность полученных вами результатов.

13.1. Поверхностный интеграл первого рода

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Вычислить поверхностный интеграл*

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,d\sigma,$$

где Σ — часть поверхности, описываемая уравнением $F(x,y,z)=0$ и некоторыми неравенствами.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Поверхностный интеграл сводится к двойному проецированием Σ на координатную плоскость XOY по формуле

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\,\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|}, \tag{1}$$

где D — проекция Σ на плоскость XOY, γ — угол между нормалью к поверхности Σ и осью OZ; $z(x,y)$ определяем из уравнения поверхности $F(x,y,z)=0$.

Замечание. Если уравнение $F(x,y,z)=0$ не определяет однозначно функцию $z=z(x,y)$, то проецируем Σ на другую координатную плоскость или используем криволинейные координаты (можно также разбить поверхность на части и воспользоваться аддитивностью интеграла).

1. Единичные нормальные векторы $\vec{n}_0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, определяются формулой

$$\vec{n}_0=\pm\frac{\operatorname{grad}F}{|\operatorname{grad}F|}.$$

2. Проекцию D поверхности Σ на плоскость XOY находим, исключая z из условий, определяющих Σ.

3. Находим $z=z(x,y)$, решая уравнение $F(x,y,z)=0$.

4. Переходим от поверхностного интеграла к двойному по формуле (1) и вычисляем двойной интеграл, сводя его к повторному.

Записываем ответ.

Пример. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma}(-x+3y+4z)\,d\sigma,$$

где Σ — часть плоскости

$$x+2y+3z=1,$$

расположенная в первом октанте (т.е. $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$).

Решение.

1. Единичные нормальные векторы $\vec{n}_0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, определяются формулой

$$\vec{n}_0=\pm\frac{\operatorname{grad}F}{|\operatorname{grad}F|}.$$

В данном случае $F(x,y,z)=x+2y+3z-1$. Следовательно,

$$\vec{n}_0=\pm\frac{\{1,2,3\}}{\sqrt{14}},\qquad |\cos\gamma|=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

2. Поверхность Σ определяется условиями

$$\Sigma=\left\{(x,y,z):\ \begin{array}{l}x+2y+3z=1,\\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\end{array}\right\}.$$

Ее проекцию D на плоскость XOY находим, исключая z из условий, определяющих Σ:

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z): \begin{array}{c} z = (1-x-2y)/3, \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow D = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ 0 \leq (1-x-2y)/3 \end{array} \right\}.$$

Отсюда

$$D = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} 0 \leq y \leq 12, \\ 0 \leq x \leq 1-2y \end{array} \right\}.$$

3. Из уравнения $x+2y+3z-1=0$ находим $z(x,y) = (1-x-2y)/3$.

4. Переходим от поверхностного интеграла к двойному по формуле (1) и вычисляем двойной интеграл, сводя его к повторному:

$$\iint\limits_{\Sigma} (-x+4y+3z)\,d\sigma = \iint\limits_{D} (-x+4y+3z)\Big|_{z=(1-x-2y)/3} \frac{\sqrt{14}}{3}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{3} \iint\limits_{D} (1-2x+2y)\,dx\,dy = \frac{\sqrt{14}}{3} \int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_0^{1-2y} (1-2x+2y)\,dx = \frac{\sqrt{14}}{18}.$$

Ответ. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (-x+4y+3z)\,d\sigma = \frac{\sqrt{14}}{18}.$

Условия задач. *Вычислить поверхностные интегралы.*

1. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} xyz\,d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{ (x,y,z): \begin{array}{c} x+y+z=1, \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{array} \right\}.$

2. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (y+z)\,d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{ (x,y,z): \begin{array}{c} x+y+z=1, \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{array} \right\}.$

3. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\left(3x+\frac{2}{3}z\right)d\sigma, \qquad \Sigma=\left\{(x,y,z):\ \begin{array}{l} x+y/2+z/3=1,\\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\end{array}\right\}.$

4. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(x+18y+24z)\,d\sigma, \qquad \Sigma=\left\{(x,y,z):\ \begin{array}{l} x+2y+3z=1,\\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\end{array}\right\}.$

5. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}z\,d\sigma, \qquad \Sigma=\left\{(x,y,z):\ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1,\\ z\geq 0\end{array}\right\}.$

6. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\,d\sigma, \qquad \Sigma=\left\{(x,y,z):\ \begin{array}{l} x+y+z=1,\\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\end{array}\right\}.$

7. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}z\,d\sigma, \qquad \Sigma=\left\{(x,y,z):\ \begin{array}{l} x^2+y^2-2z=0,\\ 0\leq z\leq 1\end{array}\right\}.$

8. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma, \qquad \Sigma=\left\{(x,y,z):\ \begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=0,\\ 0\leq z\leq 1\end{array}\right\}.$

9. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\,d\sigma, \qquad \Sigma=\left\{(x,y,z):\ \begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=0,\\ 0\leq z\leq 1\end{array}\right\}.$

10. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma, \qquad \Sigma=\left\{(x,y,z):\ \begin{array}{l} x^2+y^2-4z^2=0,\\ 0\leq z\leq 1/2\end{array}\right\}.$

Ответы. 1. $\sqrt{3}/120$. 2. $\sqrt{3}/3$. 3. $35/6$. 4. $\sqrt{14}/2$. 5. 2π. 6. $\sqrt{3}/2$. 7. $12(1+6\sqrt{3})\pi/15$. 8. $\sqrt{2}\pi/2$. 9. 0. 10. $\sqrt{5}\pi/3$.

13.2. Интеграл по цилиндрической поверхности

Постановка задачи. *Вычислить поверхностный интеграл*

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,d\sigma,$$

где Σ — часть поверхности $x^2+y^2=r^2$, вырезаемая плоскостями $z=0$ и $z=h$.

План решения.

1. Вводим на заданной поверхности (цилиндре) криволинейные координаты

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

В этих координатах поверхность задается условиями

$$\Sigma = \left\{ (\varrho,\varphi,z): \begin{array}{c} \varrho = r, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le z \le h \end{array} \right\}.$$

2. Так как

$$d\sigma = r\,d\varphi\,dz,$$

то

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = r\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,dz.$$

3. Вычисляем повторный интеграл и записываем ответ.

Пример. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)\,d\sigma,$$

где Σ — часть поверхности $x^2+y^2=1$, вырезаемая плоскостями $z=0$, $z=2$.

Решение.

1. Вводим на заданной поверхности (цилиндре) криволинейные координаты

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

В этих координатах поверхность задается условиями

$$\Sigma = \left\{ (\varrho,\varphi,z): \begin{array}{c} \varrho = 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le z \le 2 \end{array} \right\}.$$

2. Так как $d\sigma = 1 \cdot d\varphi\, d z$ и $x^2 + y^2 = 1$, то имеем

$$\iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2)\, d\sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dz.$$

3. Вычисляем повторный интеграл:

$$\iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2)\, d\sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dz = 4\pi.$$

Ответ. $\displaystyle \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2)\, d\sigma = 4\pi.$

Условия задач. *Вычислить поверхностные интегралы.*

1. $\displaystyle \iint\limits_{\Sigma} x\, d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \ z = 2 \end{array} \right\}.$

2. $\displaystyle \iint\limits_{\Sigma} (x + y) d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, \ z = 4 \end{array} \right\}.$

3. $\displaystyle \iint\limits_{\Sigma} (x + y + z)\, d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \ z = 1 \end{array} \right\}.$

4. $\displaystyle \iint\limits_{\Sigma} (y^2 - 1)\, d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 0, z = 1 \end{array} \right\}.$

5. $\displaystyle \iint\limits_{\Sigma} (2 - x^2 - y^2)\, d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \ z = 2 \end{array} \right\}.$

6. $\displaystyle \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + z)\, d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \ z = 3 \end{array} \right\}.$

7. $\displaystyle \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2}\, d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, \ z = 1 \end{array} \right\}.$

8. $\displaystyle\iint_\Sigma (xy + z^2)\,d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{(x,y,z): \begin{array}{c} x^2+y^2=1, \\ z=0,\ z=1 \end{array}\right\}.$

9. $\displaystyle\iint_\Sigma \sqrt[3]{9 - x^2 - y^2}\,d\sigma, \quad \Sigma = \left\{(x,y,z): \begin{array}{c} x^2+y^2=1, \\ z=0,\ z=1 \end{array}\right\}.$

10. $\displaystyle\iint_\Sigma \sqrt{z + x^2 + y^2}\,d\sigma, \quad \Sigma = \left\{(x,y,z): \begin{array}{c} x^2+y^2=2, \\ z=0,\ z=2 \end{array}\right\}.$

Ответы. 1. 0. 2. 0. 3. 2π. 4. 0. 5. 4π. 6. 12π. 7. 8π. 8. $2\pi/3$. 9. 4π. 10. $32\pi(\sqrt{2}-1)/3$.

13.3. Интеграл по сферической поверхности

Постановка задачи. *Вычислить поверхностный интеграл*

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma,$$

где Σ — *верхняя полусфера*

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad z \geq 0.$$

План решения.

1. Вводим на заданной поверхности (сфере) криволинейные координаты

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \varrho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \varrho\cos\theta. \end{cases}$$

В этих координатах поверхность задается условиями

$$\Sigma = \left\{(\varrho,\theta,\varphi): \begin{array}{c} \varrho = r, \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}\right\}.$$

2. Так как $d\sigma = r^2 \sin\theta d\theta\, d\varphi$, имеем

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma = r^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

3. Вычисляем повторный интеграл и записываем ответ.

Пример. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)\, d\sigma,$$

где Σ — верхняя полусфера

$$x^2+y^2+z^2=9, \quad z \geq 0.$$

Решение.

1. Вводим на заданной поверхности (сфере) криволинейные координаты

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \varrho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \varrho\cos\theta. \end{cases}$$

В этих координатах поверхность задается условиями

$$\Sigma = \left\{ (\varrho,\theta,\varphi) : \begin{array}{c} \varrho = 3, \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

2. Так как $d\sigma = 9\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ и $f(x,y) = x^2+y^2 = 9\sin^2\theta$, имеем

$$\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)\, d\sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} 9\sin^2\theta \cdot 9\sin\theta\, d\theta.$$

3. Вычисляем повторный интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} 9\sin^2\theta \cdot 9\sin\theta\, d\theta = -162\pi \int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)\, d\cos\theta = 108\pi.$$

Ответ. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)\, d\sigma = 108\pi.$

Условия задач. *Вычислить поверхностные интегралы.*

1. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} x\,d\sigma,$ $\quad\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 7, \quad z \geq 0\}.$

2. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} z\,d\sigma,$ $\quad\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0\}.$

3. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (2x - 5y)\,d\sigma,$ $\quad\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 5, \quad z \geq 0\}.$

4. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (z^2 + 1)\,d\sigma,$ $\quad\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad z \geq 0\}.$

5. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} z^4\,d\sigma,$ $\quad\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0\}.$

6. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2}\,d\sigma,$ $\quad\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0\}.$

7. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2 - 2z)\,d\sigma,$ $\quad\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad z \geq 0\}.$

8. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2 - 2)\,d\sigma,$ $\quad\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad z \geq 0\}.$

9. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (21x - 21y + z)\,d\sigma,$ $\quad\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 10, \quad z \geq 0\}.$

10. $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (xy + z^2)\,d\sigma,$ $\quad\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0\}.$

Ответы. 1. 0. 2. 8π. 3. 0. 4. $20\pi/3$. 5. $2\pi/5$. 6. $\pi^2/2$. 7. 54π. 8. 0. 9. $10\sqrt{10}\pi$. 10. $2\pi/3$.

Глава 14

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

При изучении темы ТЕОРИЯ ПОЛЯ (ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ) вы познакомитесь с понятиями векторного поля, векторных линий, потока векторного поля через поверхность, циркуляции векторного поля, дивергенции и ротора векторного поля. Вы научитесь вычислять поток векторного поля как поверхностный интеграл, а также использовать формулу Остроградского для вычисления потока через замкнутую поверхность. Вы научитесь вычислять работу векторного поля как криволинейный интеграл второго рода, а также применять формулу Стокса для вычисления циркуляции.

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы можете вычислить производные, единичный нормальный вектор поверхности, дивергенцию и ротор векторного поля, определенные и повторные интегралы, выполнить все численные расчеты и проверить правильность полученных вами результатов.

14.1. Векторные линии

Постановка задачи. *Найти векторные линии векторных полей*

$$\vec{a} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j},$$

или

$$\vec{a} = P(x,z)\vec{i} + R(x,z)\vec{k},$$

или

$$\vec{a} = Q(y,z)\vec{j} + R(y,z)\vec{k}.$$

План решения.

1. Запишем дифференциальные уравнения векторных линий

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} \quad \text{при} \quad z = C,$$

или

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \quad \text{при} \quad y = C,$$

или

$$\frac{dy}{Q(x,y)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \quad \text{при} \quad x = C.$$

Мы учли, что в первом случае $dz = 0$, во втором случае $dy = 0$ и в третьем случае $dx = 0$, поскольку равна нулю соответствующая координата векторного поля.

2. Решая соответствующее дифференциальное уравнение, получим, что векторные линии (в пространстве) определяются системами уравнений

$$\begin{cases} F(x,y) = C_1, \\ z = C_2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} F(x,z) = C_1, \\ y = C_2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} F(y,z) = C_1, \\ x = C_2. \end{cases}$$

Пример. Найти векторные линии векторного поля

$$\vec{a} = 9z\vec{j} - 4y\vec{k}.$$

Решение.

1. Так как первая координата поля $P(x,y,z) = 0$, то $dx = 0$ и, следовательно, $x = C$. Поэтому запишем дифференциальное уравнение векторных линий в виде:

$$\frac{dy}{9z} = -\frac{dz}{4y} \quad \text{при} \quad x = C.$$

2. Решая дифференциальное уравнение, получим

$$\begin{cases} 9z^2 + 4y^2 = C_1, \\ x = C_2. \end{cases}$$

Ответ. Векторные линии определяются системой уравнений

$$\begin{cases} 9z^2 + 4y^2 = C_1, \\ x = C_2. \end{cases}$$

Условия задач. *Найти векторные линии векторных полей.*

1. $\vec{a} = 2y\vec{i} + 6x\vec{j}$.
2. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j}$.
3. $\vec{a} = 2y\vec{i} - 4x\vec{j}$.
4. $\vec{a} = z\vec{i} - x\vec{k}$.
5. $\vec{a} = 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$.
6. $\vec{a} = z\vec{i} - 4z\vec{k}$.
7. $\vec{a} = 2z\vec{j} + 9y\vec{k}$.
8. $\vec{a} = 3x\vec{i} + 6y\vec{j}$.
9. $\vec{a} = 3y\vec{i} - 2x\vec{j}$.
10. $\vec{a} = y\vec{j} + z\vec{k}$.

Ответы.

1. $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = C_1, \\ z = C_2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y = C_1 x^{3/2}, \\ z = C_2. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = C_1, \\ z = C_2. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2 + z^2 = C_1, \\ y = C_2. \end{cases}$
5. $\begin{cases} z = C_1 y^{3/2}, \\ x = C_2. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 4x^2 + z^2 = C_1, \\ y = C_2. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 9y^2 - 2z^2 = C_1, \\ x = C_2. \end{cases}$
8. $\begin{cases} y = C_1 x^2, \\ z = C_2. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = C_1, \\ z = C_2. \end{cases}$
10. $\begin{cases} z = C_1/y, \\ x = C_2. \end{cases}$

14.2. Поток векторного поля

Постановка задачи. *Найти поток векторного поля*

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

через поверхность Σ, описываемую уравнением $F(x,y,z) = 0$ и некоторыми неравенствами (нормаль образует острый угол с осью OZ).

План решения. По определению поток Π векторного поля $\vec{a}$ через поверхность Σ с полем единичных нормалей $\vec{n_0}$ определяется формулой

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n_0})\, d\sigma. \tag{1}$$

1. Поле единичных нормалей к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z) = 0$, определяется формулой

$$\vec{n_0} = \pm \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \pm\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

Учитывая что нормали должны образовывать острый угол с осью OZ, т.е. что $\cos\gamma > 0$, выбираем в этой формуле знак плюс или минус. Имеем

$$\vec{n_0} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \ cos\gamma\vec{k}, \quad \cos\gamma > 0.$$

2. Находим скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{n_0}) = P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma = f(x,y,z).$$

3. В силу формулы (1), поток определяется поверхностным интегралом:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n_0})\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma.$$

4. Переходим от поверхностного интеграла первого рода к двойному, проецируя Σ на плоскость XOY:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y))\, \frac{dx\, dy}{|\cos\gamma|},$$

где D — проекция Σ на плоскость XOY; $z(x,y)$ определяем из уравнения поверхности $F(x,y,z) = 0$.

Замечание. Если уравнение $F(x,y,z) = 0$ не определяет однозначно функцию $z = z(x,y)$, то проецируем Σ на другую координатную плоскость или используем криволинейные координаты (можно также разбить поверхность на части и воспользоваться аддитивностью интеграла).

5. Вычисляем двойной интеграл, сводя его к повторному.

Записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример. Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = -x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$$

через часть плоскости

$$x + 2y + 3z = 1,$$

расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ).

Решение.

1. Поле единичных нормалей к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, определяется формулой

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}.$$

В данном случае $F(x,y,z)=x+2y+3z-1$ и, следовательно,

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{\{1,2,3\}}{\sqrt{14}}.$$

Учитывая что нормали должны образовывать острый угол с осью OZ, т.е. что $\cos\gamma = \pm 3/\sqrt{14} > 0$, выбираем в этой формуле знак плюс. Имеем

$$\vec{n_0} = \left\{\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}.$$

2. Находим скалярное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{n_0}) = \frac{1}{\sqrt{14}}(-x+4y+3z).$$

3. Согласно формуле (1), поток определяется поверхностным интегралом:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{14}}(-x+4y+3z)\,d\sigma.$$

4. Переходим от поверхностного интеграла к двойному, проецируя Σ на плоскость XOY:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{14}}(-x+4y+3z)\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{14}}(-x+4y+3z)\Big|_{z=(1-x-2y)/3} \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|},$$

где D — проекция Σ на плоскость XOY и $\cos\gamma = 3/\sqrt{14}$.

Поверхность Σ определяется условиями

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z):\ \begin{array}{l} x+2y+3z=1, \\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0 \end{array} \right\}.$$

Ее проекцию D на плоскость XOY находим, исключая z из условий, определяющих Σ:

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z): \begin{array}{c} z=(1-x-2y)/3, \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow D = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ 0 \leq (1-x-2y)/3 \end{array} \right\}.$$

Отсюда

$$D = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} 0 \leq y \leq 1/2, \\ 0 \leq x \leq 1-2y \end{array} \right\}.$$

5. Вычисляем двойной интеграл, сводя его к повторному:

$$\Pi = \iint\limits_D (-x+4y+3z)\Big|_{z=(1-x-2y)/3} \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} =$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_D (1-2x+2y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_0^{1-2y} (1-2x+2y)\,dx = \frac{1}{18}.$$

Ответ. $\Pi = 1/18$ ед. потока.

Условия задач. *Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ).*

1. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}, \qquad x+y+z=1.$
2. $\vec{a} = 2x\vec{i} + z\vec{k}, \qquad x+y+z=1.$
3. $\vec{a} = y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad 2x+y+z=1.$
4. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}, \qquad x+y+2z=1.$
5. $\vec{a} = y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad 2x+2y+z=1.$
6. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}, \qquad 2x+y+2z=1.$

7. $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$, $\quad x + y + z = 1.$

8. $\vec{a} = y\vec{j} + z\vec{k}$, $\quad 2x + 2y + z = 1.$

9. $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$, $\quad x/2 + y + z/3 = 1.$

10. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$, $\quad x/3 + y/2 + z = 1.$

Ответы. 1. 1/3 ед. потока. 2. 1/2 ед. потока. 3. 1/6 ед. потока. 4. 1/6 ед. потока. 5. 1/8 ед. потока. 6. 1/8 ед. потока. 7. 1/2 ед. потока. 8. 1/8 ед. потока. 9. 4 ед. потока. 10. 4 ед. потока.

14.3. Поток векторного поля через часть цилиндра

Постановка задачи. *Найти поток векторного поля*

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

через часть поверхности

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

вырезаемую плоскостями $z = 0$ *и* $z = h$ (*нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями*).

План решения. По определению поток Π векторного поля $\vec{a}$ через поверхность Σ с полем единичных нормалей $\vec{n}_0$ определяется формулой

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}_0)\, d\sigma. \tag{1}$$

1. Поле единичных нормалей к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z) = 0$, определяется формулой

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}.$$

В данном случае $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - r^2$ и, следовательно,

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\{x, y, 0\}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Учитывая, что нормали должны образовывать острый угол с осью OX при $x > 0$, т.е. $\cos\alpha > 0$ при $x > 0$, и тупой угол с осью OX при $x < 0$, т.е. $\cos\alpha < 0$ при $x < 0$, выбираем в этой формуле знак плюс.

2. Находим скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{n_0}) = \frac{P(x,y,z)x + Q(x,y,z)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(x,y,z).$$

3. Согласно формуле (1) поток определяется поверхностным интегралом:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n_0})\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma.$$

4. Вводим на заданной поверхности (цилиндре) криволинейные координаты

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

В этих координатах поверхность задается условиями

$$\begin{cases} \varrho = r, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le z \le h. \end{cases}$$

Поскольку $d\sigma = r\, d\varphi\, dz$, имеем

$$\Pi = r\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, dz.$$

5. Вычисляем повторный интеграл и записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример. Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

через часть поверхности

$$x^2 + y^2 = 1,$$

вырезаемую плоскостями $z = 0$ и $z = 2$. (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

Решение.

1. Поле единичных нормалей к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, определяется формулой

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}.$$

В данном случае $F(x,y,z)=x^2+y^2-1$ и, следовательно,

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{\{x,y,0\}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Учитывая что нормали должны образовывать острый угол с осью OX при $x>0$, т.е. $\cos\alpha>0$ при $x>0$, и тупой угол с осью OX при $x<0$, т.е. $\cos\alpha<0$ при $x<0$, выбираем в этой формуле знак плюс.

2. Находим скалярное произведение

$$(\vec{a},\vec{n_0}) = \frac{P(x,y,z)x+Q(x,y,z)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

3. Согласно формуле (1) поток определяется поверхностным интегралом:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{a},\vec{n_0})\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma.$$

4. Вводим на заданной поверхности (цилиндре) криволинейные координаты

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

В этих координатах поверхность задается условиями

$$\begin{cases} \varrho = 1, \\ 0\le\varphi\le 2\pi, \\ 0\le z\le 2. \end{cases}$$

Поскольку $d\sigma = 1\cdot d\varphi\,dz$ и $x^2+y^2=1$, имеем

$$\Pi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dz.$$

5. Вычисляем повторный интеграл

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dz = 4\pi.$$

Ответ. $\Pi = 4\pi$ ед. потока.

Условия задач. *Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть цилиндрической поверхности Σ, вырезаемую заданными плоскостями.*

1. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z^4\vec{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 1\}$, $z = 0$, $z = 3$.
2. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + x^2yz\vec{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 4\}$, $z = 2$, $z = 5$.
3. $\vec{a} = (x + zy)\vec{i} - (xz - y)\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 4\}$, $z = 0$, $z = 2$.
4. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + xz^2\vec{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 9\}$, $z = 0$, $z = 3$.
5. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 4\}$, $z = 0$, $z = 2$.
6. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + yz^3\vec{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 3\}$, $z = 0$, $z = 2$.
7. $\vec{a} = (x - 3y)\vec{i} + (3x + y)\vec{j} + z^2\vec{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 5\}$, $z = 0$, $z = 2$.
8. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sin^2 z\vec{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 4\}$, $z = 1$, $z = 3$.
9. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + x^2\vec{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 3\}$, $z = 2$, $z = 4$.
10. $\vec{a} = 3\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 2\}$, $z = 2$, $z = 4$.

Ответы. 1. 6π ед. потока. 2. 24π ед. потока. 3. 32π ед. потока. 4. 54π ед. потока. 5. 16π ед. потока. 6. 12π ед. потока. 7. 20π ед. потока. 8. 16π ед. потока. 9. 12π ед. потока. 10. 4π ед. потока.

14.4. Поток векторного поля через часть сферы

Постановка задачи. *Найти поток векторного поля*

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

через часть сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

вырезаемую плоскостью $z = 0 \quad (z \geq 0)$ (*нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями*).

ПЛАН РЕШЕНИЯ. По определению поток П векторного поля $\vec{a}$ через поверхность Σ с полем единичных нормалей $\vec{n_0}$ определяется формулой

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n_0})\, d\sigma. \tag{1}$$

1. Поле единичных нормалей к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, определяется формулой

$$\vec{n_0} = \pm \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}.$$

У сферы, очевидно, внешняя нормаль в каждой точке совпадает с радиусом-вектором этой точки, т.е.

$$\vec{n_0} = \frac{\{x, y, z\}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

2. Находим скалярное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{n_0}) = \frac{P(x, y, z)x + Q(x, y, z)y + R(x, y, z)z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f(x, y, z).$$

3. Согласно формуле (1) поток определяется поверхностным интегралом:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n_0})\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma.$$

4. Вводим на заданной поверхности (сфере) криволинейные координаты

$$\begin{cases} x = \varrho \cos\varphi \sin\theta, \\ y = \varrho \sin\varphi \sin\theta, \\ z = \varrho \cos\theta. \end{cases}$$

В этих координатах поверхность задается условиями

$$\begin{cases} \varrho = r, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Поскольку $d\sigma = r^2 \sin\theta d\varphi\, d\theta$, имеем

$$\Pi = r^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

5. Вычисляем повторный интеграл и записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример. Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (z-y)\vec{k}$$

через часть поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

вырезаемую плоскостью $z = 0$ $(z \geq 0)$ (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

Решение.

1. Внешняя нормаль в каждой точке сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ совпадает с радиусом-вектором, т.е.

$$\vec{n}_0 = \frac{\{x, y, z\}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

2. Находим скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{n}_0) = \frac{x^2 + y(y+z) + z(z-y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

3. Согласно формуле (1) поток определяется поверхностным интегралом:

$$\Pi = \iint\limits_\Sigma (\vec{a}, \vec{n}_0)\, d\sigma = \iint\limits_\Sigma \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, d\sigma.$$

4. Вводим на заданной поверхности (сфере) криволинейные координаты

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \varrho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \varrho\cos\theta. \end{cases}$$

В этих координатах поверхность задается условиями

$$\begin{cases} \varrho = 3, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Поскольку $d\sigma = 9\,\sin\theta d\varphi\, d\theta$, имеем

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} 9 \cdot 3 \sin\theta\, d\theta = 54\pi.$$

Ответ. $\Pi = 54\pi$ ед. потока.

Условия задач. *Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть сферы, вырезаемую плоскостью $z = 0$ $(z \ge 0)$.*

1. $\vec{a} = (x + x^2 z)\vec{i} + y\vec{j} + (z - x^3)\vec{k}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

2. $\vec{a} = x\vec{i} + (y + y^2 z^2)\vec{j} + (z - zy^3)\vec{k}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

3. $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + y\vec{j} + (z - x)\vec{k}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

4. $\vec{a} = (x + x^2 y)\vec{i} + (y - x^3)\vec{j} + z\vec{k}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5. $\vec{a} = (x + yz)\vec{i} + y\vec{j} + (z - xy)\vec{k}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. $\vec{a} = x\vec{i} + (y + xyz)\vec{j} + (z - xy^2)\vec{k}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

7. $\vec{a} = (x - xy^2)\vec{i} + (x^2 y + y)\vec{j} + z\vec{k}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

8. $\vec{a} = (x + yz^2)\vec{i} + y\vec{j} + (z - xyz)\vec{k}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

9. $\vec{a} = (x + yz)\vec{i} + (y - xz)\vec{j} + z\vec{k}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

10. $\vec{a} = (x + xy^2 z)\vec{i} + (y - x^2 yz)\vec{j} + z\vec{k}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Ответы. 1. 16π ед. потока. 2. 16π ед. потока. 3. 16π ед. потока. 4. 2π ед. потока. 5. 2π ед. потока. 6. 2π ед. потока. 7. 2π ед. потока. 8. 54π ед. потока. 9. 16π ед. потока. 10. 54π ед. потока.

14.5. Вычисление потока по формуле Остроградского

Постановка задачи. *Найти поток векторного поля*

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

через замкнутую поверхность Σ *(нормаль внешняя).*

План решения. Поток векторного поля через замкнутую поверхность Σ в направлении внешней нормали вычисляется по формуле Остроградского

$$\Pi = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}\, dx\, dy\, dz, \tag{1}$$

где Ω — область, ограниченная поверхностью Σ, и

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

— дивергенция векторного поля $\vec{a}$.

1. Вычисляем дивергенцию $\operatorname{div} \vec{a}$.
2. Задаем область Ω неравенствами.
3. Вычисляем поток по формуле (1) как тройной интеграл

$$\Pi = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример. Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (xy + y^2)\vec{j} + (xz + z)\vec{k}$$

через замкнутую поверхность Σ, являющуюся полной поверхностью цилиндра

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 1.$$

(нормаль внешняя).

Решение.

1. Вычисляем дивергенцию векторного поля:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial(y^2+z^2)}{\partial x} + \frac{\partial(xy+y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xz+z)}{\partial z} = 2x+2y+1.$$

2. Задаем область Ω неравенствами.

Поверхность Σ, ограничивающая область Ω, состоит из трех поверхностей и может быть записана в виде

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=1, \\ 0 \le z \le 1 \end{array}\right\} \bigcup \left\{\begin{array}{c} z=0, \\ x^2+y^2 \le 1 \end{array}\right\} \bigcup \left\{\begin{array}{c} z=1, \\ x^2+y^2 \le 1 \end{array}\right\}.$$

Из этих условий находим систему неравенств, определяющих область Ω:

$$\Omega = \left\{(x,y,z): \begin{array}{c} x^2+y^2 \le 1, \\ 0 \le z \le 1 \end{array}\right\}.$$

Форма области Ω такова, что удобно перейти к цилиндрическим координатам. Имеем

$$\Omega = \left\{(\varrho,\varphi,z): \begin{array}{c} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \varrho \le 1, \\ 0 \le z \le 1 \end{array}\right\}.$$

3. Вычисляем поток по формуле (1) как тройной интеграл:

$$\Pi = \iiint\limits_{\Omega} (2x+2y+1)\,dx\,dy\,dz.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, получаем

$$\Pi = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \varrho(2\varrho\cos\varphi + 2\varrho\sin\varphi + 1)\,d\varrho = 2\pi.$$

Ответ. $\Pi = 2\pi$ ед. потока.

Условия задач. *Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность, образованную заданными поверхностями (нормаль внешняя).*

1. $\vec{a} = (xy^2 + yz)\vec{i} + (x^2y + z^2)\vec{j} + (x^2 + z^3/3)\vec{k}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

2. $\vec{a} = (y + z^2)\vec{i} + (x^2 + 2yz)\vec{j} + (y^2 + 2z^2)\vec{k}$, $x^2 + y^2 = 1 - z$, $z = 0$.

3. $\vec{a} = (2xy + y^2z)\vec{i} + (2xy + x^2z)\vec{j} + (xy + z^2)\vec{k}$, $x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2}$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

4. $\vec{a} = (x^2 + y^2 + z^2)\vec{i} + (xy + z)\vec{j} + (x + 3z)\vec{k}$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 4$.

5. $\vec{a} = (3x^2 + y)\vec{i} + (x^2 - 2x^2y + z)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

6. $\vec{a} = (x^2 + yz)\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$, $z = 1 - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

7. $\vec{a} = (z^2 + xz)\vec{i} + (xy - z^2)\vec{j} + yz\vec{k}$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = \sqrt{2}$.

8. $\vec{a} = (x^2 + xy + z^2)\vec{i} + (x^2 + y^2 + yz)\vec{j} + (y^2 + z^2 + xz)\vec{k}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geq 0)$.

9. $\vec{a} = (xz + y^2z)\vec{i} + (x^2z - 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

10. $\vec{a} = (xy + y^2 + z)\vec{i} + (x^2z + yz)\vec{j} + (x^2 + xz)\vec{k}$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 1$.

Ответы. 1. $2\pi/5$ ед. потока. 2. π ед. потока. 3. π ед. потока. 4. 64π ед. потока. 5. $-\pi/2$ ед. потока. 6. $1/12$ ед. потока. 7. π ед. потока. 8. $3\pi/8$ ед. потока. 9. $-13\pi/12$ ед. потока. 10. 2π ед. потока.

14.6. Работа силы

Постановка задачи. *Найти работу силы*

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

при перемещении вдоль кривой L от точки $M(x_1, y_1)$ к точке $N(x_2, y_2)$.

План решения.

1. Работа A силового поля равна криволинейному интегралу второго рода по кривой L:

$$A = \int\limits_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

2. Вычисляем криволинейный интеграл.

Записываем ответ, не забывая о размерности.

Пример. Найти работу силы

$$\vec{F} = (x-y)\vec{i} + \vec{j}$$

при перемещении вдоль кривой L

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (y \geq 0)$$

от точки $M(2,0)$ к точке $N(-2,0)$.

Решение.

1. Работа A силового поля равна криволинейному интегралу второго рода по кривой L:

$$A = \int\limits_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \int\limits_L (x-y)\,dx + dy.$$

2. Вычисляем криволинейный интеграл. Для этого:

а) поскольку L — верхняя полуокружность, ее параметрические уравнения записываем в виде

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

Вычисляем $dx = -2\sin t\,dt$ и $dy = 2\cos t\,dt$;

б) переходим от криволинейного интеграла к определенному:

$$A = \int\limits_L (x-y)\,dx + dy = \int\limits_0^\pi [(2\cos t - 2\sin t)(-2\sin t) + 2\cos t]\,dt = 2\pi.$$

Ответ. $A = 2\pi$ ед.работы.

Условия задач. *Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль заданной кривой от точки M к точке N.*

1. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\quad x^2 + y^2 = 4 \ (y \geq 0)$, $M(2,0)$, $N(-2,0)$.

2. $\vec{F} = x^3\vec{i}$, $\quad x^2 + y^2 = 4 \ (y \geq 0,\ x \geq 0)$, $M(2,0)$, $N(0,2)$.

3. $\vec{F} = (x^2 + y)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$, $\quad y = x^2$, $M(-1,1)$, $N(1,1)$.

4. $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$, $\quad y = 2x^3$, $M(1,2)$, $N(2,16)$.

5. $\vec{F} = y\vec{i} + 2y\vec{j}$, $\quad x^2 + y^2 = 1 \ (y \geq 0)$, $M(1,0)$, $N(-1,0)$.

6. $\vec{F} = x\vec{i} - y\vec{j}$, $\quad x^2 + y^2 = 2 \ (y \geq 0)$, $M(\sqrt{2},0)$, $N(-\sqrt{2},0)$.

7. $\vec{F} = 2y\vec{j}$, $\quad x^2 + y^2 = 1 \ (y \geq 0,\ x \geq 0)$, $M(1,0)$, $N(0,1)$.

8. $\vec{F} = x^2y\vec{i}$, $\quad x^2 + y^2 = 4 \ (y \geq 0,\ x \geq 0)$, $M(2,0)$, $N(0,2)$.

9. $\vec{F} = (y - x^2)\vec{i} + x\vec{j}$, $\quad y = 2x^2$, $M(0,0)$, $N(1,2)$.

10. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$, $\quad y = x^3$, $M(0,0)$, $N(2,8)$.

Ответы. 1. 0 ед.работы. 2. -4 ед.работы. 3. $4/3$ ед.работы. 4. 62 ед.работы. 5. $-\pi$ ед.работы. 6. 0 ед.работы. 7. 1 ед.работы. 8. $-\pi$ ед.работы. 9. $5/3$ ед.работы. 10. -8 ед.работы.

14.7. Циркуляция векторного поля

Постановка задачи. *Найти циркуляцию векторного поля*

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

вдоль замкнутого контура Γ

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2]. \\ z = z(t), \end{array} \right.$$

План решения.

1. По определению циркуляция векторного поля равна криволинейному интегралу второго рода вдоль кривой Г:

$$A = \oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\,\vec{r}) = \oint_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

2. Вычисляем криволинейный интеграл, сводя его к определенному:

$$A = \oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\,\vec{r}) =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) +$$
$$+ R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)]\,dt.$$

Записываем ответ.

Пример. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = \frac{y}{3}\vec{i}3 - 3x\vec{j} + x\vec{k}$$

вдоль замкнутого контура Г

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 1 - 2\cos t - 2\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Решение.

1. По определению циркуляция векторного поля равна криволинейному интегралу второго рода вдоль кривой Г:

$$A = \oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\,\vec{r}) = \oint_{\Gamma} \frac{y}{3}\,dx - 3x\,dy + x\,dz.$$

2. Вычисляем криволинейный интеграл, сводя его к определенному:

$$A = \oint_{\Gamma} \frac{y}{3}\,dx - 3x\,dy + x\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{4}{3}\sin^2 t - 16\cos^2 t + 4\sin t\cos t \right) dt = -\frac{52\pi}{3}.$$

Ответ. $A = -52\pi/3$.

Условия задач. *Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль заданного замкнутого контура* ($t \in [0, 2\pi]$).

1. $\vec{a} = y\vec{i} - z^2\vec{j} + x^2y\vec{k}$, $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$.

2. $\vec{a} = -x^2y\vec{i} + 4\vec{j} + x^2z\vec{k}$, $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 4$.

3. $\vec{a} = x^3\vec{i} - z^2\vec{j} + y\vec{k}$, $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2\cos t$.

4. $\vec{a} = -2z\vec{i} - x^2\vec{j} + z\vec{k}$, $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \sin t$.

5. $\vec{a} = y^2\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$, $x = 5\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2(1 - \cos t)$.

6. $\vec{a} = x^3\vec{i} - y^2\vec{j} + y\vec{k}$, $x = \cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \cos t - \sin t$.

7. $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + y^4\vec{k}$, $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $z = 5\sin t$.

8. $\vec{a} = z\vec{i} - x\vec{j} + yz\vec{k}$, $x = \cos t$, $y = 6\sin t$, $z = 3$.

9. $\vec{a} = -x^2\vec{i} + 5\vec{j} + y\vec{k}$, $x = \cos t$, $y = 5\sin t$, $z = 3\cos t$.

10. $\vec{a} = 4y\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2 - \cos t - \sin t$.

Ответы. 1. -2π. 2. 18π. 3. -4π. 4. 4π. 5. -8π. 6. -3π. 7. π. 8. -6π. 9. -15π. 10. -8π.

14.8. Вычисление циркуляции по формуле Стокса

Постановка задачи. *Найти модуль циркуляции векторного поля*

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

вдоль замкнутого контура

$$\Gamma = \left\{ (x,y,z): \begin{array}{l} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{array} \right\}.$$

План решения. Циркуляция A векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ по замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ, расположенному в области G, в которой функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные, равна потоку ротора этого векторного поля через любую кусочно-гладкую поверхность Σ, натянутую на контур Γ и расположенную внутри области G, т.е. справедлива *формула Стокса*

$$A = \iint\limits_{\Sigma} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n_0})\, d\,\sigma. \tag{1}$$

Предполагается, что ориентация единичных нормалей

$$\vec{n_0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

к поверхности Σ согласована с ориентацией контура Γ так, чтобы из конца каждой нормали обход контура в выбранном направлении выглядел как обход против часовой стрелки.

1. Возможны два противоположных направления обхода Γ. Циркуляция при этих обходах отличается только знаком. Поскольку требуется найти только модуль циркуляции, выбираем направление обхода произвольно, а в ответе запишем модуль результата.
2. Выбираем поверхность Σ, натянутую на контур Γ.
3. Определяем нормали $\vec{n_0}$ к поверхности Σ.
4. Находим $\operatorname{rot}\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

5. Вычисляем скалярное произведение $(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n_0})$.
6. Применяем формулу Стокса (1):

$$A = \iint\limits_{\Sigma} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n_0})\, d\sigma.$$

7. Вычисляем поверхностный интеграл.

Записываем ответ, не забывая про модуль.

Пример. Найти модуль циркуляции векторного поля

$$\vec{a} = y\vec{i} - xz\vec{j} + xy\vec{k}$$

вдоль замкнутого контура

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right\}.$$

Решение.

1. В данном случае очевидно, что Γ — окружность $x^2 + y^2 = 9$, лежащая в плоскости $z = 0$. Выбираем направление обхода контура Γ против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\vec{k}$.

2. Выбираем поверхность Σ, натянутую на контур Γ.

Естественно в качестве Σ взять круг:

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} z = 0, \\ x^2 + y^2 \le 9 \end{array} \right\}.$$

3. Согласно выбранной ориентации контура нормаль $\vec{n_0}$ к Σ одна и та же в каждой точке и равна $\vec{k}$.

5. Находим $\operatorname{rot} \vec{a}$:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -xz & xy \end{vmatrix} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + (-1 - z)\vec{k}.$$

5. Вычисляем скалярное произведение:

$$(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n_0}) = (2x\vec{i} - y\vec{j} + (-1 - z)\vec{k}, \vec{k}) = -1 - z.$$

6. Находим циркуляцию по формуле Стокса (1):

$$A = \iint\limits_{\Sigma} (-1 - z)\, d\sigma.$$

7. Вычисляем поверхностный интеграл, сводя его к двойному:

$$A = \iint\limits_{\Sigma} (-1 - z)\, d\sigma = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 9} (-1 - z)\big|_{z=0}\, dx\, dy = -9\pi.$$

Ответ: $|A| = 9\pi$.

Условия задач. *Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура Γ.*

1. $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + (yz - x)\vec{j}, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 3 \end{array} \right\}.$

2. $\vec{a} = x^2 z\vec{i} - y\vec{j} + y\vec{k}, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{l} z = 3(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 2 \end{array} \right\}.$

3. $\vec{a} = xz\vec{i} + 2xz\vec{j} + x^3 y\vec{k}, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (z > 0) \end{array} \right\}.$

4. $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 2 \end{array} \right\}.$

5. $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + xz\vec{k}, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{l} z = 2(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 3 \end{array} \right\}.$

6. $\vec{a} = 4y\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\}.$

7. $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = z \end{array} \right\}.$

8. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x + y + z = 1 \end{array} \right\}.$

9. $\vec{a} = y\vec{i} + (1 - x)\vec{j} - z\vec{k}, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 4 \quad (z > 0) \end{array} \right\}.$

10. $\vec{a} = x\vec{i} - z^2\vec{j} + y\vec{k}, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4, \\ 4x - 3y - z = 3 \end{array} \right\}.$

Ответы. 1. 2π. 2. 0. 3. $4\sqrt{2}\pi$. 4. 2π. 5. 2π. 6. 2π. 7. $\sqrt{2}\pi$. 8. 8π. 9. 8π. 10. 60π.

Учебное издание

ЗИМИНА Ольга Всеволодовна
КИРИЛЛОВ Андрей Игоревич
САЛЬНИКОВА Татьяна Анатольевна

РЕШЕБНИК
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Компьютерный набор *Т.А. Сальниковой*
Компьютерная верстка *О.В. Зиминой*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 02.04.01.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 23. Уч.-изд. л. 22. Тираж 5000 экз. Заказ № 1490

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099 Москва, Шубинский пер., 6

THE SOLVER

O. V. ZIMINA, A. I. KIRILLOV, T. A. SALNIKOVA

HIGHER MATHEMATICS

PHYSICS AND MATHEMATICS PUBLISHERS
International Academic Publishing Company "Nauka"
Russian Academy of Sciences

Moscow, 2001, 368 pages

The authors have extensive experience in teaching mathematics at the Moscow Institute of Power Engineering (Technical University) and other technical universities in Russia and abroad.

A well-known expert in higher education and a member of the Presidium of the Scientific Methods Council on Mathematics of the Russian Ministry of Education, Professor A. I. Kirillov is a coauthor of every single mathematics curriculum developed and used in Russia during the last twenty years. He is the recipient of several state awards for his successes in teaching higher mathematics to students in technical universities and in using computers in education. He has presented his ideas on mathematical education at many international congresses and conferences and in lectures at many universities around the world and is also known in scientific circles for his significant papers on infinite-dimensional analysis, stochastic processes, and quantum field theory.

THE SOLVER is a part of a new educational project EduXXI initiated by A. I. Kirillov and O. V. Zimina in 1999. The project aim is to make the student's studies effective, interesting, and arousing creative activity. The main means for achieving the project aim are new tutorial complexes consisting of especially written textbooks and software. THE SOLVER is the common name of the family of such complexes.

THE SOLVER "Higher Mathematics" is the first complex realized by the project EduXXI. It is designed for computer-based mathematical education and consists of this book and the software package THE SOLVER.HM.

The complex gives a solution to the fundamental problem of modern education: *how can students manage with the enormous information the professors have to give them?*

They cannot now. Therefore, the modern students learn almost the same mathematics as the students at the end of the 19th century. Moreover, they solve only one or two problems of each kind whereas they should solve from three to five problems of each kind to really understand and acquire the solution methods.

There are no books containing the necessary number of problems of one kind. On the other hand, the students do not have the time to solve the large number of problems required.

THE SOLVER "Higher Mathematics" contains this book with nine to ten problems of each kind and software that enables students to quickly solve all these problems.

The complex opens a new way for learning mathematics—without unnecessary difficulties and waste a time. It establishes an optimal student–computer cooperation, where the student's task is to formulate the problems properly and the computer's task is to perform the routine operations.

Using the complex, the students can deeply understand how to solve the basic problems of higher mathematics because they solve many problems and their attention is concentrated on the new and the essential.

The complex frees about half of time devoted to higher mathematics in the curricula. This free time can be used for teaching the students the ideas and methods of mathematics of the 20th century.

THE SOLVER "Higher Mathematics" can be used at colleges, technical universities, and for extension education. It enables the students to study independently. This is important because this increases the educational possibilities for people living far from universities and for those who cannot leave their homes for some reason.

This book contains 14 chapters:

Analytic Geometry
Linear Algebra
Limits
Differential Calculus
Graphs
Functions of Several Variables
Indefinite Integrals
Definite Integrals
Line Integrals
Series
Differential Equations
Multiple Integrals
Surface Integrals
Field Theory

The chapters are divided into sections. Each section deals with one basic problem and contains a general formulation of the problem, a solution plan with short theoretical comments, a solution example, nine to ten problems of the same kind, and the answers to these problems.

The package SOLVER.HM consists of special computer programs and a hypertext book.

The programs establish a so-called Word–CAS interface, i.e., an interface between Microsoft Word and a computer algebra system (CAS) such as DERIVE, Maple V, MuPAD, etc. according to the user choice. The Word–CAS interface is better than the original CAS interfaces because Microsoft Word provides more tools for the text editing, viewing, and printing than the original CAS interfaces.

The Word–CAS interface can be easily customized. This is important in teaching, where all unnecessary menu items must be hidden because they divert the attention of students or even frighten them with unknown mathematical terms.

Obeying a student command, the Word–CAS interface takes a selected formula from the Word document and activates the CAS, sending the formula to the CAS for the required mathematical operations with the selected formula. Then the Word–CAS interface inserts the CAS result in the Word document. All mathematical formulas can be treated in this way. It is important that only standard mathematical notation is used in the dialog between the student and computer.

THE SOLVER.HM hypertext book is a collection of Microsoft Word documents with a navigation tool. The documents are almost identical to those in the book. The navigation tool enables the students to quickly find a template for the mathematical problem they have to solve. Context-sensitive help is available.

The Word documents are used as templates for correct and comprehensive solutions of basic mathematical problems. Having a problem to solve, a student can easily find an analogous problem in the Word documents, study the plan of its solution, study the solution example, change the document, use the Word–CAS interface for doing the required mathematical operations, save the results of the work, and present the file to the professor.

THE SOLVER.HM helps a student to concentrate on the new and essential while the computer does all the operations that are already known to the student. The package size is about 500 kilobytes. It is sold at a low price. Every student can and should have it.

THE SOLVER "Higher Mathematics" is the first tutorial complex of new type. Analogous tutorial complexes are in preparation for teaching special chapters of higher mathematics: functions of a complex variable, operational calculus, Fourier series, equations in partial derivatives, probability theory and statistics, and financial mathematics.

THE SOLVERs "Mechanics", "Physics", "Electricity", etc. for colleges and universities as well as appropriate packages for high schools will be created by the project EduXXI.

Information about THE SOLVER "Higher Mathematics" can be found on the Internet site www.AcademiaXXI.ru.