С. Г. ГИНДИКИН

АЛГЕБРА ЛОГИКИ В ЗАДАЧАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

517.1
Г 49
УДК 512.8

Семен Григорьевич Гиндикин

Алгебра логики в задачах

М., 1972 г., 288 стр. с илл.

Редакторы *Ю. А. Гастев, В. В. Донченко*

Техн. редактор *В. Н. Кондакова*

Корректоры *З. В. Автонеева, М. Л. Медведская*

Сдано в набор 28/XII 1971 г. Подписано к печати 10/V 1972 г.
Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 9. Условн. печ. л. 15,12. Уч.-изд. л. 17,72.
Тираж 50 000 экз. Т-09026. Цена книги 76 коп. Заказ № 2625.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28

2-2-3
6-72

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Научно-популярная литература по математической логике очень обширна и рассчитана на самые различные категории читателей. Школьники или взрослые, читающие популярную литературу в свободное от работы время, могут найти в ней большое число забавных логических задач. Читатель, желающий пополнить свой математический багаж, в надежде, что это поможет в его практической деятельности, найдет в ней подробные описания практических (часто — псевдопрактических) приложений логики. Большое число популярных книг по логике порождено надеждой, что благодаря алгебре логики все школьники наконец-таки начнут разбираться в необходимых и достаточных условиях и прочих логических вопросах школьного курса математики. Пристрастие преподавателей математического анализа к вопросам о последовательностях, не имеющих предела, неравномерно непрерывных функциях и т. д. породило руководства, содержащие основанные на кванторах рецепты автоматического (без размышлений!) построения определений отрицательных понятий. Мы определенно не сможем перечислить все то, что читатель может почерпнуть в существующих книгах по математической логике.

Мы все же решились увеличить на одну и без того большое число книг по логике, так как в большинстве известных нам элементарных книг в очень небольшой степени учтены интересы читателя, заинтересованного в содержательных — с точки зрения математика — теоремах и задачах. Этим читателям — в первую очередь студентам младших курсов университетов и пединститутов и ученикам старших классов математических школ — и адресована настоящая книга. Нам представляется полезным знакомство студентов-математиков с идеями конечной математики, в частности, алгебры логики, поскольку они качественно отличаются от идей традиционного университетского курса математики.

В книге рассмотрены, главным образом, три круга вопросов: проблемы полноты и функционально замкнутых классов, проблемы синтеза и оценки сложности схем, теория вероятностей на конечных булевых алгебрах. Всюду мы стремимся ввести читателя в круг идей, не стремясь получить наиболее законченные результаты. Нам хотелось бы, чтобы те, кто не собирается заниматься соответствующими вопросами, получили достаточную информацию, а те, у кого появится специальный интерес, были подготовлены к чтению специальной литературы.

Термин «алгебра логики» понимается в книге широко. Собственно алгебре логики, в которой изучаются логические операции над высказываниями (более общо, булевы операции на регулярных булевых алгебрах, см. § 2), посвящены §§ 1—7. В остальных параграфах рассматриваются смежные вопросы. Мы не отказываемся от рассмотрения традиционных вопросов, многократно излагавшихся. Читатель найдет здесь, в частности, обсуждение связей алгебры логики с элементарными вопросами теории доказательств и с построением определений отрицательных понятий. При этом мы рассчитываем, что у читателя здесь возникнут ассоциации с хорошо известными ему вещами и что излагаемые здесь формальные приемы окажутся ему полезными. Однако мы не надеемся, что эти приемы могут подменить умение проводить в тех же случаях содержательные рассмотрения. Некоторое число технических упражнений, в основном в §§ 1, 2, 9, включено для того, чтобы в книге можно было найти необходимый материал для упражнений по соответствующим разделам курса математической логики пединститутов. Основная часть книги формально не использует сведений, выходящих за рамки школьного курса математики. Эпизодически, главным образом в изолированных задачах и примерах, используются некоторые факты из математического анализа. Эти места (хотя и не без некоторого ущерба) можно опустить.

Несколько слов о построении книги. Значительная часть математических книг может рассматриваться как «специальный курс на дому», и часто их прообразами являются реально читавшиеся специальные курсы. Хорошо известно, что одним из лучших способов усвоения некоторых разделов математики является решение циклов задач, на которые разбиваются теоремы. В таком плане строится работа многих университетских семинаров. Однако, к сожалению, довольно редко появляются книги, имитирующие работу такого рода семинаров. Первоисточником этой книги являются семинары, проводившиеся автором в МГПИ им. В. И. Ленина; кроме того, отдельные ее части были использованы в цикле лекций и семинарских занятий в вечерней математической школе при МГУ для учащихся 7—8 классов. Руководитель семинаров указанного типа выполняет различные функции. Он дает определения, формулирует задачи, сопровождая это необходимыми пояснениями (эту роль играет основной текст книги). Если участники семинара не смогли самостоятельно найти решение, то он в несколько этапов дает указания, причем иногда в качестве таких указаний выступают ответы (этому посвящен раздел «Ответы и указания», следующий за основным текстом каждого параграфа). Наконец, ему приходится самому решать задачу, если указания не помогли — здесь опять-таки иногда роль решения играет просто ответ (этому соответствует раздел «Ответы и решения»).

Разумеется, даже если читателю пришлось заглянуть в раздел решений, не получив готового решения, то труд, потраченный на размышления над задачей, не окажется напрасным. И в том случае, когда читатель нашел решение задачи самостоятельно, ему следует просмотреть указания и решение, так как в них может содержаться дополнительная информация. (В то же время мы, конечно, не хотим никому навязывать именно тот вариант решения, который приводится в книге.) Допуская, что некоторые предпочтут сразу читать решения задач, об интересах этой категории читателей мы заботились лишь в минимальной степени.

В книге нет подробной библиографии, а лишь даются ссылки на литературу, в которой можно найти дополнительный материал, непосредственно примыкающий к содержанию книги. Не являются систематическими и указания приоритетного характера.

Пользуюсь случаем поблагодарить П. С. Новикова, у которого я учился математической логике, советами которого постоянно пользовался в процессе преподавания и с которым я обсуждал замысел книги. Я благодарен И. М. Яглому за постоянный интерес к моей работе над книгой, способствовавший ее выходу в свет, редакторам книги Ю. А. Гастеву и В. В. Донченко за критику и советы.

ПУТЕВОДИТЕЛЬ И УКАЗАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГОЙ

Книга состоит из двенадцати параграфов. Внутри каждого параграфа ведется своя нумерация определений и задач, причем стоящее перед точкой число является номером параграфа (например, задача 3.12, определение 8.3).

§ 1 представляет из себя неформальное введение к остальной части книги. В нем вводятся операции над высказываниями, обсуждаются постановки основных задач алгебры логики на языке операций с высказываниями, устанавливаются связи с элементарной техникой доказательств.

Мы опираемся на интуитивные представления о том, что такое «высказывание», «ситуация». В конкретных случаях бывает ясно, какие ситуации могут встретиться при решении вопроса об истинности или ложности одного или нескольких (конечного числа) высказываний. В то же время для бесконечных совокупностей высказываний множество возможных ситуаций допускает естественное описание лишь в специальных случаях.

Формально на § 1 в дальнейшем нет ссылок принципиального характера. Поэтому читатель, по каким-то причинам не заинтересованный в информации собственно по алгебре высказываний, может ограничиться просмотром этого параграфа. Однако мы советуем с осторожностью решить для себя этот вопрос, так как, по нашему мнению, при изучении алгебры логики очень важно свободное владение интерпретацией основных ее фактов на языке алгебры высказываний. С другой стороны, некоторые могут быть заинтересованы в более неторопливом введении, содержащем большее число примеров и аналогий с хорошо известными фактами. Для этого в зависимости от вкусов читателя можно воспользоваться какой-либо из многочисленных книг по математической логике. Часть из них перечислена в списке литературы, относящейся к § 1.

Итак, формально чтение книги можно начинать с § 2. В нем вводится основной объект нашего исследования: функции алгебры логики (определение 2.1); при этом не обязательно понимать, что два значения, которые принимают переменные, можно интерпретировать как «истинностные» значения высказываний. Целый ряд фактов из § 1 в § 2 пересказывается, а часто и передоказывается на новом языке. В п. 2 § 2 вводится основная операция над функциями алгебры логики — суперпозиция, или образование сложной функции. Ее аналог, вероятно, хорошо знаком большинству читателей для функций действительной переменной. Однако усвоение приводимого нами индуктивного определения суперпозиции с расчлененными шагами может вызвать известные трудности. Поскольку это определение потребуется лишь для проведения строгих доказательств, начиная с § 3 (задача 3.7), до некоторых пор можно ограничиться пониманием суперпозиции как операции, состоящей в многократных подстановках одних функций в аргументы других функций и отождествлении каких-то аргументов. Тем не менее в какой-то момент важно усвоить определение 2.3, а главное — продумать схему основанных на нем индуктивных доказательств. В дальнейшем тексте книги читатель много раз столкнется с аналогичными доказательствами в других ситуациях (см., например, §§ 8, 9). В п. 2 содержатся также основные равносильности алгебры логики и ряд задач на преобразование формул. Вообще, в § 2 довольно много технических задач, причем при решении некоторых из них приходится проводить громоздкие выкладки. Читателю предстоит самому решить вопрос, в каких задачах и с какой степенью подробности ему следует проводить эти выкладки, но для дальнейшего важно, чтобы он умел их свободно проводить. Пп. 3 и 4 § 2 посвящены булевым алгебрам. Результаты этих пунктов позволяют интерпретировать результаты о функциях алгебры логики не только применительно к алгебре высказываний, но и, например, к алгебре множеств.

В п. 4 § 2 вводится важный класс булевых алгебр — регулярные булевы алгебры, для которых можно естественным образом определить операции, связанные со всеми функциями алгебры логики,— булевы операции. Эти вопросы заметно труднее основной части книги и могут быть пропущены при первоначальном чтении. Однако читателю, знакомому с основами теории множеств, советуем продумать общее определение теоретико-множественной операции (см.

стр. 43) и связь этих операций с функциями алгебры логики. Ссылки на пп. 3, 4 § 2 в дальнейшем тексте книги носят вспомогательный характер. Пп. 5—7 § 2 посвящены нормальным формам — специального вида представлениям функций алгебры логики через основные операции: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Для случая высказываний они частично рассматривались в конце § 1. В этих пунктах много технических упражнений.

Небольшой по объему, но очень важный § 3 посвящен закону двойственности в алгебре логики. Тем, кто не читал п. 4 § 2, нужно пропустить несколько первых абзацев и начать с абзаца, предшествующего определению 3.1. Задачи 3.10 и 3.11 имеют вспомогательный характер: они понадобятся в § 6 при доказательстве теоремы Поста.

§ 4 посвящен представлению функций алгебры логики арифметическими полиномами по модулю 2 (полиномами Жегалкина). Основной материал содержится в задачах 4.1—4.7. Задачи 4.10—4.12 служат подготовкой к § 6.

В § 5, посвященном монотонным функциям алгебры логики, можно первоначально ограничиться задачами 5.1—5.11; задачи 5.12 и 5.13 понадобятся в § 7, задачи 5.14—5.16 — в § 6.

Центральной теореме алгебры логики — теореме Поста — и связанным с ней вопросам посвящен § 6. В теореме Поста содержатся условия на систему функций, необходимые и достаточные для того, чтобы суперпозициями входящих в нее функций были представимы все функции алгебры логики. Основной материал содержится в задачах 6.1—6.21; в задачах 6.22—6.27 содержится дополнительный материал. Основным является понятие функционально замкнутого класса (определение 6.2) — класса функций, замкнутого относительно суперпозиции.

В теореме Поста фигурирует пять функционально замкнутых классов, называемых предполными (они в некотором смысле максимальны). Следующий параграф (§ 7) посвящен изучению множества всех функционально замкнутых классов. Принципиальное описание структуры этого множества (постовская схема), а также описание задач, которые могут быть решены при помощи функционально замкнутых классов, содержится в п. 1. В п. 2 рассматривается более простая задача о функционально замкнутых классах, содержащих константы. Эти классы связаны с задачами, в которых наряду с суперпозицией участвует операция подстановки констант (расширенная суперпозиция). Это расширение снимает основные трудности, имеющиеся в общей задаче, а сравнительно легко получаемый общий ответ позволяет достаточно хорошо освоиться с ситуацией, имеющейся в рассматриваемых вопросах. В заключение этого пункта приводится пример задачи, решающейся при помощи функционально замкнутых классов (относительно расширенной суперпозиции),— задача о самодвойственной полноте. Эта же задача в условиях обычной суперпозиции рассматривается в п. 3. Этот пункт в дальнейшем не используется, а потому его можно при желании пропустить, ограничившись нужным для дальнейшего определением 7.8. В п. 4 строится фрагмент постовской схемы (ее третий этаж), позволяющий решать проблемы базисов в предполных классах. Наконец, в п. 5 приводится без доказательства постовская схема и несколько задач на ее применение. В дальнейшем тексте ссылки на § 7 имеются лишь в п. 5 § 8 и п. 10 § 10.

§§ 8 и 9 посвящены теории схем. В § 8 рассматриваются схемы из функциональных элементов — устройств, реализующих функции алгебры логики. В п. 1 рассмотрения ведутся в предположении о мгновенном срабатывании этих элементов. Подробно исследуются соединения элементов, соответствующие суперпозициям функции алгебры логики, в связи с чем вводится понятие обратной связи. В предположениях п. 1 теорема Поста дает ответ на вопрос о том, каков должен быть запас основных функциональных элементов для того, чтобы любую функцию алгебры логики можно было реализовать схемой из этих элементов.

В п. 2 мы отказываемся от предположения о мгновенном срабатывании функциональных элементов. В связи с этим сужается класс схем, реализующих функции алгебры логики. Одновременно приходится применять элементы нового типа — элементы задержки, необходимые для выравнивания времени прихода сигналов на входы функциональных элементов. Всюду в дальнейшем делается предположение о том, что время срабатывания одно и то же для всех основных элементов. Это довольно обременительное ограничение сильно упрощает наши рассмотрения. При учете времени срабатывания элементов теорема Поста уже не дает ответа на вопрос об условиях полноты системы функциональных элементов. Решение этой проблемы при указанных выше предположениях дается в задачах 8.7—8.11. Отметим, что в ответе фигурируют множества, уже не являющиеся функционально замкнутыми классами относительно обычной суперпозиции. В задачах 8.12—8.14 приводятся некоторые другие примеры задач на полноту, не сводящихся к функционально замкнутым классам Поста. Эти задачи не используются в дальнейшем и могут быть опущены. В пп. 3 и 4 исследуются схемы, не реализующие функций алгебры логики. Описание их работы приводит к важному понятию конечного автомата. При этом возникают некоторые проблемы полноты, решение которых сводится к проблеме полноты, решенной в п. 2. В п. 5 рассмотрен способ фон Неймана реализации функций алгебры логики при помощи функциональных элементов. Для этого класса схем проблема полноты решается при помощи результатов пп. 2 и 3 § 7.

Другой класс схем — релейно-контактные схемы — рассматривается в § 9. Общим принципам работы таких схем посвящен п. 1. Здесь следует обратить внимание на вторую часть задачи 9.1, из которой следует, что при реализации функции алгебры логики необходимы реле как с отрицательными, так и с положительными контактами. В остальных пунктах рассматриваются только схемы, в которых нет соединений обмоток реле с контактами,— контактные схемы. Общей теории таких схем посвящен п. 2; п.3 посвящен проблеме минимизации схем, т. е. построению реализаций функций, содержащих как можно меньше контактов. Приводятся примеры минимальных схем. Очень важно продумать возможные пути доказательства минимальности. Центральное место занимает доказательство оценок Шеннона для числа контактов, необходимых для реализации функций от n переменных при больших n. В п. 4 строятся реализации линейных функций алгебры логики (см. § 4), а при их помощи — схемы для суммирования чисел в двоичной системе счисления. В п. 5 рассмотрена реализация арифметических операций схемами из функциональных элементов. Основная часть § 9 использует лишь § 2; в п. 3 при доказательстве теоремы Шеннона используются элементарные факты из анализа.

В § 10 строится теория вероятностей на конечных булевых алгебрах. Соответственно нужно знать определения булевой алгебры и регулярной булевой алгебры (определения 2.5 и 2.7); впрочем, последнее определение можно заменить определением 2.5, дополненным аксиомами, приведенными в примечании на стр. 195. Основные факты теории вероятностей приводятся в пп. 1—6. В п. 7 вводятся полиномы С. Н. Бернштейна и при их помощи доказывается теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций на отрезке полиномами. В п. 8 вводятся специальные классы полиномов Бернштейна, связанные с функциями алгебры логики. Они применяются в этом пункте к решению некоторых задач из теории автоматов; в следующем пункте при их помощи исследуется вопрос о надежности контактных схем. Последний пункт посвящен синтезу надежных схем из функциональных элементов с ненадежной реализацией (проблеме полноты таких элементов). Пп. 1—7 § 10 используют лишь § 2; в пп. 8 и 9 нужны, кроме того, определения самодвойственных и монотонных функций из §§ 3 и 5 и определения из §§ 8 и 9; п. 10 опирается на § 7. Результаты о приближениях функций полиномами Бернштейна используют простые факты из анализа.

В § 11 рассматривается обобщение двузначной алгебры логики на конечнозначный случай; он опирается на §§ 1—6.

В § 12 дается краткий обзор логики предикатов. Он использует §§ 1 и 2. В упражнениях фигурирует несколько задач, решавшихся при доказательстве теоремы Поста (их можно опустить) и некоторые примеры из анализа. Этот параграф занимает особое место. Все предыдущие рассмотрения так или иначе связаны с понятием логической операции, и соответственно высказывания рассматриваются при фиксированной ситуации; в § 12 исследуется зависимость высказывания от ситуации.

Укажем несколько вариантов работы над книгой. Элементарный цикл может состоять из §§ 1 и 2 с указанными выше сокращениями в пп. 3 и 4, пп. 1, 2 и обзорной части п. 3 § 9 и § 12. Его желательно усилить за счет основных частей §§ 3—5, формулировки теоремы Поста с примерами ее применения из § 6 и обзорной части § 8. Таким образом можно строить основную часть курса математической логики в пединститутах (к этому нужно обязательно добавить в каком-то виде основы теории алгоритмов, например, машины Тьюринга). Дальше можно изучить §§ 6 и 9. Дополнительные циклы могут состоять из §§ 7 и 8 (функционально замкнутые классы, схемы из функциональных элементов и проблемы полноты); из § 10 (вероятностная логика). Эти циклы пересекаются по пп. 8 и 10 § 10 (полнота систем ненадежных функциональных элементов). § 10 можно использовать при изучении теории вероятностей в контакте с математической логикой, но при этом желательно увеличить число примеров и неформальных пояснений.

В приложение вынесен справочный материал, которым удобно пользоваться при решении задач.

§ 1. ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ

Бо́льшая часть этой книги будет посвящена наиболее элементарному разделу математической логики, который носит название *алгебра логики*. Другое часто употребляемое название — *алгебра высказываний* — связано с очень важной интерпретацией этой теории, с которой мы начнем наши рассмотрения. В алгебре высказываний рассматриваются некоторые вопросы, связанные с образованием сложных высказываний. Если у нас имеется несколько высказываний, то при помощи логических связок и отрицаний из них можно образовать различные новые высказывания. При этом исходные высказывания принято называть *простыми*, а вновь образованные высказывания — *сложными*. Эти названия не носят абсолютного характера, так что высказывание, которое в одной ситуации мы считаем «простым», в другой может рассматриваться как «сложное», и наоборот. Подробнее об этом мы поговорим ниже. Заметим, что на языке грамматики логические связки — это различные способы образования сложных предложений из простых. Рассмотрим примеры.

Пусть имеются высказывания: «На улице светит солнце», «В классе идут занятия». Из этих простых высказываний можно различными способами построить сложные высказывания:

1) На улице светит солнце, и в классе идут занятия.

2) На улице не светит солнце.

3) На улице светит солнце, однако в классе идут занятия.

4) В классе идут занятия, а на улице светит солнце.

5) На улице светит солнце, или в классе идут занятия.

6) Или на улице светит солнце, или в классе идут занятия.

7) Если на улице светит солнце, то в классе идут занятия.

8) Если в классе идут занятия, то на улице светит солнце.

9) На улице не светит солнце, или в классе идут занятия.

10) На улице светит солнце тогда и только тогда, когда в классе идут занятия.

Читатель без труда продолжит список сложных высказываний, и мы не сомневаемся, что ему удастся получить высказывания, еще более абсурдные, чем 8) или 10). Самый простой способ добиться этого — взять в качестве простых высказываний как можно более далекие друг от друга по смыслу предложения, например: «Семнадцатая страница в книге начинается с буквы „в"», «Наш город стоит на берегу Волги». В связи с этим отметим первую особенность алгебры высказываний. В ней допускаются любые грамматически правильные способы образования сложных высказываний и совершенно игнорируется смысловая характеристика получившегося предложения. Любое из приведенных десяти сложных предложений допустимо с точки зрения алгебры высказываний.

В алгебре высказываний интересуются лишь истинностью или ложностью (истинностным значением) высказываний. Более точно: в ней исследуется вопрос об истинности сложного высказывания в зависимости от истинности входящих в него простых высказываний и с этой точки зрения и исследуются различные логические связки.

Пока что мы не делали различия между «предложениями» и «высказываниями». Однако с точки зрения сформулированной задачи такое различие удобно провести. Не про каждое предложение можно сказать, истинно оно или ложно. Примерами являются предложения, выражающие приказание («Подойди ко мне!»), сожаление («Если бы я раньше знал. . .»), вопрос («Был ли ты дома?»), поздравления («С новым годом!») и т. д. Не останавливаясь на описании этого класса предложений, договоримся, что *под высказываниями мы будем понимать предложения, для которых имеет смысл говорить об их истинности или ложности.*

Фиксация высказывания («На улице светит солнце») еще не приводит, вообще говоря, к фиксации его истинностного значения. Нужно еще фиксировать ситуацию (в данном примере — точное время и место действия). Поэтому точнее надо говорить, что высказывание A истинно (или ложно) в такой-то ситуации. Ситуация может быть однозначно определена в самом высказывании («4 февраля 1971 г. в 5 часов 01 минуту по московскому времени была проведена вторая коррекция траектории корабля»). Иногда в алгебре высказываний ограничиваются рассмотрением только таких высказываний, но мы этого делать не будем. Существуют высказывания, истинные (соответственно ложные) во всех возможных ситуациях. Такие высказывания мы будем называть *абсолютно истинными* (соответственно *абсолютно ложными*). Высказывания «Волга впадает в Каспийское море», «Через две различные точки евклидовой плоскости проходит единственная прямая»—абсолютно истинны; «$2a=a$, где a — положительное число» — абсолютно ложно. Абсолютно истинные и абсолютно ложные высказывания будем называть *логическими константами*. Если ситуация однозначно определена в самом высказывании, то оно является логической константой. Теперь мы можем уточнить, что при изучении логических связок мы будем сопоставлять истинностные значения простых высказываний и полученного сложного высказывания в одной и той же ситуации. При этом один из главных вопросов, который нас будет интересовать, заключается в том, при каких условиях на простые высказывания логическая связка приводит к абсолютному истинному высказыванию.

Рассмотрим примеры логических связок (операций).

1. Логическая связка, соответствующая союзу «и», называется *конъюнкцией* и обозначается знаком & *).

Высказывание $A \& B$, называемое конъюнкцией A и B, истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B (ср. пример 1). Это обстоятельство можно выразить с помощью так называемой *истинностной таблицы* для конъюнкции:

A	B	$A \& B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

*) Часто вместо & употребляется знак $\wedge$. Отметим также, что конъюнкцию иногда называют логическим умножением.

В этой таблице символом И обозначается истинное высказывание, символом Л — ложное. В ней перечислены всевозможные *истинностные значения* (И и Л) высказываний A и B и соответствующее им истинностное значение высказывания A & B. С точки зрения алгебры высказываний логическая связка (операция) конъюнкция полностью о п р е д е л я е т с я приведенной таблицей. Высказывание A & B абсолютно истинно тогда и только тогда, когда абсолютно истинны оба высказывания A и B.

При построении таблицы мы исходили из союза «и». Но мы пришли бы к той же самой истинностной таблице, если бы исходили из союзов «а», «но», «однако», «хотя» и т. п. (ср. примеры 3, 4). Таким образом, хотя соответствующие этим союзам логические связки имеют различные смысловые оттенки, с точки зрения алгебры высказываний они неразличимы. Кроме того, связка, соответствующая конъюнкции, осуществляется иногда бессоюзным образом (например: «На улице светит солнце, в классе идут занятия»). Аналогичное сокращение мы будем ниже (стр. 35) практиковать и по отношению к знаку конъюнкции.

2. *Отрицание* $\bar{A}$ высказывания A (см. пример 2) задается таблицей

A	$\bar{A}$
И	Л
Л	И

Эта операция о д н о м е с т н а — в том смысле, что из о д н о г о данного простого высказывания A строится новое высказывание $\bar{A}$. В то же время конъюнкция — д в у м е с т н а я операция: сложное высказывание строится из д в у х простых. Отрицание абсолютно истинного высказывания абсолютно ложно и наоборот.

3. Двуместная логическая операция, соответствующая союзу «*или*», называется *дизъюнкцией* *) (она обозначается знаком $\vee$). Надо иметь в виду, что в обычной речи союз «или» употребляется по крайней мере в двух различных смыслах: неальтернативное (неисключающее) «или» и аль-

*) Дизъюнкцию иногда называют логическим сложением (не следует путать с рассматриваемым ниже арифметическим сложением по модулю 2, см. § 4, стр. 64).

тернативное (исключающее) «или». В высказываниях первого типа утверждается истинность по крайней мере одного из участвующих в нем простых высказываний; во втором случае — в точности одного (здесь иногда используется более точный оборот «или. . . , или...»). Дизъюнкция соответствует неальтернативному «или»; она задается следующей истинностной таблицей:

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Абсолютная истинность $A \vee B$ означает, что в каждой ситуации хотя бы одно из высказываний A, B истинно.

1.1. Логическую операцию, соответствующую альтернативному «или», мы назовем *альтернативной дизъюнкцией* (обозначение: $A \Delta B$). Составить для нее истинностную таблицу и выразить эту операцию через уже знакомые нам логические операции. ▲

4. Мы будем называть логическую операцию *тождественной истиной* (*ложью*), если для любых простых высказываний полученное сложное высказывание является абсолютно истинным (абсолютно ложным). Это равносильно тому, что при любых истинностных значениях простых высказываний сложное высказывание истинно (ложно). Следует уяснить отличие тождественной истины от абсолютной: первая относится к логической операции, вторая — к индивидуальному высказыванию. В следующей задаче приводятся примеры одноместных операций, являющихся тождественной истиной (тождественной ложью).

1.2. Показать, что операция $A \vee \bar{A}$ есть тождественная истина, а $A \& \bar{A}$ — тождественная ложь. ▲

В рассмотренных нами пока двуместных логических операциях простые высказывания A и B входили симметрично (коммутативно: $\varphi(A, B) = \varphi(B, A)$). Сейчас мы рассмотрим операции с несимметричным вхождением простых высказываний (это аналогично переходу от сложносочиненных предложений к сложноподчиненным).

5. Двуместная логическая операция, соответствующая обороту «если. . ., то. . .», посредством которого образуются условиые предложения, называется *импликацией*. При этом сложное высказывание «если A, то B» записывается в виде $A \to B$. Простое высказывание A называется *посылкой* импликации, B — *ее заключением*. Мы приведём вначале истинностную таблицу для импликации, а затем дадим некоторые пояснения.

A	B	$A \to B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

В случае импликации несоответствие между обычным пониманием истинности сложного высказывания и идеализированной точкой зрения алгебры высказываний еще заметнее, чем для других логических операций. Главное отличие состоит в том, что при учете смыслового содержания высказываний (а не только значения истинности) оборот «если. . ., то. . .» подразумевает причинную связь между посылкой и заключением. С точки же зрения алгебры высказываний нстинность имплнкации в некоторой ситуации означает лишь, что если в этой ситуации истинна посылка, то истинно заключенне. В результате истинными могут оказаться импликации «Если в доме пять этажей, то в квартире номер три проживает Иванов», «Если в Воронеже идет дождь, то книга серого цвета», а то и еще более «удивительные» высказывания. Более внимательный анализ показывает, что в нашей обычной речи мы не ставим вопрос об истинности высказывания «из A следует B» для какой-то конкретной ситуации, интересуясь лншь вопросом об абсолютной истинности $A \to B$, н лишь в этом случае говорим, что B есть следствие A. С этой точки зрения вид истинностной таблицы для импликации совершенио естествен. Действительно, в силу нашего интуитивного представления высказывание $A \to B$ абсолютно истинно тогда и только тогда, когда в каждой ситуации, в которой высказывание A истинно, истинно B, т. е. не существует ситуации, когда A истинно, а B ложно. С другой стороны, истинностная таблица должна быть такова, что в каждой возможной ситуации $A \to B$ истинно. Из сопоставления этих двух фактов следует, что таблица должна иметь указанный выше вид. Отметим одну терминологическую тонкость. Мы обычно говорим «из A не следует B» в том случае, когда высказывание $A \to B$ не является абсолютно истинным, т. е. $A \to B$ ложно в некоторой ситуации; это не следует путать с абсолютной ложностью $A \to B$.

Для иллюстрации отметим, что вопрос об абсолютной истинности импликации решается при доказательстве теорем. Действительно, всякая теорема имеет вид импликации $A \to B$, у которой в посылке (A) стоит то, «что дано», а в заключении (B) то, «что требуется доказать». Обратной теореме отвечает импликация $B \to A$; противоположной теореме — импликация $\bar{A} \to \bar{B}$.

Заметим, что чаще принимается более широкое определение обратной теоремы: если $(A\&C) \to B$ — прямая теорема, то обратной называется не только теорема $B \to (A\&C)$, но и теоремы $(B\&A) \to C$, $(B\&C) \to A$ (т. е. из «части» посылки и заключения следует другая «часть» посылки). В качестве примера рассмотрим «теорему о трех перпендикулярах»: «Прямая l, принадлежащая плоскости P и перпендикулярная проекции m прямой n на плоскость P, перпендикулярна n». Рассмотрим структуру этой теоремы. Обозначим через A высказывание «прямая l принадлежит плоскости P», через B — «прямая m является проекцией прямой n на плоскость P», через C — «прямая l перпендикулярна m», через D — «прямая l перпендикулярна n». Теорема имеет вид высказывания $((A\&B)\&C) \to D$. Ясно, что импликация $D \to ((A\&B)\&C)$, вообще говоря, ложна, т. е. не является абсолютно истинной. Однако абсолютно истинно высказывание $((A\&B)\&D) \to C$: «Прямая l, принадлежащая плоскости P и перпендикулярная прямой n, перпендикулярна проекции m прямой n на плоскость P». Эту теорему и называют обычно теоремой, обратной к теореме о трех перпендикулярах.

При доказательстве теоремы мы в предположении истинности посылки устанавливаем истинность заключения, т. е. исключаем единственный случай (см. истинностную таблицу для $A \to B$), когда импликация может быть ложной, и доказываем тем самым абсолютную истинность импликации $A \to B$, отвечающей теореме. При этом следует различать истинность импликации, которая имеет место всегда (вне зависимости от истинности посылки), если теорема доказана, от истинности заключения, которую в этом случае можно утверждать, лишь если истинна посылка. В случае же ложной посылки из справедливости теоремы никаких выводов об истинности или ложности заключения делать нельзя. Обратно, из ложности B следует ложность A, а из истинности B никаких выводов об A сделать нельзя.

Непонимание этих фактов приводит к ошибкам при применении теорем. Пусть доказанной теореме отвечает абсолютно истинная импликация $A \to B$. Правильное ее применение состоит в том, что если в какой-то ситуации A справедливо, то делается вывод о справедливости B. Например, возьмем теорему: «Если четырехугольник — прямоугольник, то его диагонали равны» *). Для всякого квадрата посылка истинна; значит, в квадрате диагонали равны. Распространенная ошибка в математических рассуждениях состоит в том, что к высказыванию A, истинность которого не установлена, применяется правильная теорема $A \to B$ и из истинности предложения B делается вывод об истинности A. Ошибочность такого рассуждения следует из третьей строки истинностной таблицы $A \to B$ (в истинной импликации с истинным заключением может быть ложной посылка). Приведем пример такого неправильного рассуждения. Высказывание A: «Число 6 делится на 4»; $A \to B$: «Если число делится на 4, то оно делится на 2». Имеем: $A \to B$ — истинная теорема, B — истинное высказывание, однако нельзя делать вывод об истинности A. О возникающей здесь ситуации можно сказать еще так: «Из неверного утверждения верными методами можно получить верный результат» (но нельзя, конечно, верными методами получить из верного утверждения неверный результат!). Другой пример, в котором часто допускаются ошибки из-за непонимания свойств импликаций,— это исследование решений уравнений (и еще в большей степени неравенств). Пусть имеется уравнение $P(x)=0$, и уравнение $Q(x)=0$ является его следствием, т. е. истинна импликация «если x_0— корень уравнения $P(x)=0$, то x_0— корень уравнения $Q(x)=0$» ($A \to B$). Если мы нашли корни уравнения $Q(x)=0$, то среди них содержатся все корни уравнения $P(x)=0$ (из истинности A следует истинность B), но среди корней второго уравнения могут быть посторонние, т. е. не являющиеся корнями первого (из истинности B не следует, вообще говоря, истинность A). Таким образом, корни уравнения $Q(x)=0$ нужно подвергнуть проверке, прежде чем сделать вывод о том, что они являются корнями уравнения $P(x)=0$. Обратно, если нам известны все корни первого уравнения, то это не означает, что мы знаем все корни второго уравнения: переход от уравнения $Q(x)=0$ к уравнению $P(x)=0$ может сопровождаться потерей корней. Посторонних корней не возникает в первом случае и не произойдет потери корней во втором случае тогда и только тогда, когда наряду с указанной выше импликацией $A \to B$ истинна импликация $B \to A$. В этом случае уравнения называются равносильными; множества корней таких уравнений совпадают.

1.3. Показать, что логические связки $\overline{B} \to \overline{A}$; $(A \& \overline{B}) \to \overline{A}$; $(A \& \overline{B}) \to B$; $(A \& \overline{B}) \to \Lambda$, где Λ — фиксированное абсолютно ложное высказывание, имеют ту же истинностную таблицу, что и импликация $A \to B$. ▲

В силу этой задачи вместо доказательства абсолютной истинности $A \to B$ можно доказать абсолютную истинность одного из четырех перечисленных высказываний. Возьмем, например, импликацию $\overline{B} \to \overline{A}$. Нужно в предположении истинности $\overline{B}$ доказать истинность $\overline{A}$. Но это есть простейший способ доказательства от противного теоремы $A \to B$. Мы предполагаем противное тому, что требуется доказать, и по-

---

*) Быть может эта формулировка звучит несколько необычно, но мы привели ее, так как она имеет вид импликации.

лучаем противоречие с тем, что дано. При доказательстве при помощи остальных трех связок мы предполагаем не только противное тому, что требуется доказать, но и также то, что дано ($A\&\overline{B}$). Тогда для доказательства теоремы $A \to B$ достаточно или прийти к противоречию с тем, что дано ($\overline{A}$), или вывести то, что требуется доказать (B), или, наконец, получить любое абсолютно ложное высказывание (Λ). В качестве последнего в силу задачи 1.2 достаточно вывести какое-нибудь высказывание C и его отрицание $\overline{C}$, так как тогда должно быть истинным высказывание $C \& \overline{C}$. Последний способ доказательства является в некотором смысле наиболее общим способом доказательства от противного.

1.4. Показать, что абсолютная истинность импликации $A \to B$ равносильна тому, что истинность B является необходимым признаком истинности A, а истинность A — достаточным признаком истинности B. ▲

В результате абсолютную истинность импликации $A \to B$ можно принять за определение необходимости B для A (соответственно, достаточности A для B).

6. В качестве последнего примера логической операции рассмотрим связку, называемую *эквивалентностью* *) (обозначение: $\sim$). Она соответствует оборотам типа «тогда и только тогда, когда...», «для того чтобы..., необходимо и достаточно...» и др. Приведем истинностную таблицу для эквивалентности:

A	B	$A \sim B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

К эквивалентности в той же мере, что и к импликации, относится замечание о том, что ее использование в алгебре высказываний не учитывает смысловое содержание высказываний. И здесь наши интуитивные представления об эквивалентности относятся к случаю, когда сложное высказывание $A \sim B$ является абсолютно истинным (только в этом случае мы привыкли говорить «A и B эквивалентны»).

*) Эту операцию часто предпочитают называть *эквиваленцией*, оставляя термин «эквивалентность» для наименования **отношения** между формулами, которое автор ниже (см. определение 1.1) называет «равносильностью».— *Прим. ред.*

В дальнейшем мы будем иногда говорить «A и B абсолютно эквивалентны», если высказывание $A \sim B$ абсолютно истинно.

1.5. Показать, что ту же истинностную таблицу, что и эквивалентность, имеет логическая операция $(A \to B) \& \& (B \to A)$. ▲

Из задачи 1.5 и истинностной таблицы для конъюнкции следует, что абсолютная истинность эквивалентности равносильна абсолютной истинности импликаций $A \to B$ и $B \to A$, т. е. что в этом случае справедливы и прямая теорема $A \to B$ и обратная $B \to A$. Чтобы доказать абсолютную истинность $A \sim B$, нужно показать, что истинность A влечет истинность B и, обратно, истинность B влечет истинность A (во всех ситуациях A и B или одновременно истинны, или одновременно ложны). Если эквивалентность $A \sim B$ абсолютно истинна, то A является необходимым и достаточным условием для B и обратно.

Заметим, что ошибки в рассуждениих, о которых шла речь в п. 5, не возникают, если применяемые теоремы являются не просто абсолютно истинными импликациями, а абсолютно истинными эквивалентностями. Когда мы говорили о равносильных уравнениих, мы также по существу имели дело с эквивалентностими.

1.6. Сколько имеется различных (т. е. отличающихся истинностными таблицами) двуместных логических операций? ▲

1.7. Сколько имеется различных коммутативных двуместных логических операций? Выразить их через уже введенные операции. ▲

У нас имеется некоторое количество «основных» логических операций (отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность), позволяющих получать из простых высказываний сложные. При этом вместо простых высказываний можно брать уже построенные сложные. В результате появляется возможность применять при построении сложных высказываний многоступенчатые конструкции, многократно использующие введенные логические операции. Назовем *формулами* логические операции, которые получаются комбинированием конечного числа указанных выше основных логических операций. Для всякой формулы можно построить истинностную таблицу, последовательно используя истинностные таблицы для основных операций.

Естественно считать равносильными формулы, которым соответствуют одинаковые истинностные таблицы. Дадим точное определение:

Определение 1.1 *). Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две формулы алгебры высказываний, а $A_1, \ldots, A_n$ — набор простых высказываний, входящих по крайней мере в одну из формул $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *равносильными*, если при всех значениях истинности $A_1, \ldots, A_n$ значения истинности $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ совпадают. Равносильность $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ обозначается посредством обычного знака равенства: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

1.8. Доказать следующие равносильности: а) $A \vee A = A$; б) $(A \vee \bar{A}) \& B = B$; в) $A \vee \bar{A} = B \vee \bar{B}$; г) $A \vee (A \& B) = A$. ▲

Из определения видно, что наборы простых высказываний, входящих в равносильные формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, могут быть различными. В этом случае простые высказывания, входящие лишь в одну из формул, входят в нее фиктивным образом, т. е. истинность этой формулы не зависит от истинности этих простых высказываний.

1.9. Попытайтесь аккуратно определить, что означает утверждение, что простое высказывание B входит в формулу $\mathfrak{A}$ существенно (нефиктивно). ▲

В нижеследующей задаче следует постараться дать как можно более эффективное определение. Пока мы не можем формально описать все наши пожелания (мы это сделаем в § 12) и ограничимся лишь просьбой, чтобы отрицались только простые высказывания. Такое определение фиктивной переменной нельзя получить простым отрицанием определения существенной переменной.

1.10. В каком случае простое высказывание B входит в формулу $\mathfrak{A}$ фиктивно? ▲

Теперь мы можем аккуратно доказать упомянутое выше утверждение:

1.11. Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ и простое высказывание A входит в формулу $\mathfrak{A}$, но не входит в $\mathfrak{B}$, то оно входит в $\mathfrak{A}$ фиктивно. ▲

*) По существу в определении 1.1 содержится определение равносильности для любых логических операций (ср. § 2).

1.12. Доказать, что формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ равносильны тогда и только тогда, когда формула $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$ — тождественная истина (см. п. 4). ▲

Заметим, что понятие равносильности относится к формулам, т. е. к логическим операциям. В то же время тесно связанное с ним понятие абсолютно истинной эквивалентности относится к индивидуальным высказываниям.

Мы уже фактически рассматривали формулы и неявно говорили о равносильности формул при исследовании основных логических операций. В частности, мы видели, что эти основные операции не являются независимыми в том смысле, что одни из них могут быть выражены через другие. Например, эквивалентность выражается через импликацию и конъюнкцию (см. задачу 1.5). Более точно, это означает, что существует формула, содержащая только импликации и конъюнкции, равносильная эквивалентности. Мы будем иногда выражать этот факт, говоря, что эквивалентность с точностью до равносильности выражается через конъюнкцию и импликацию.

Приведем несколько задач такого рода.

1.13. Выразить (т. е. найти равносильные формулы) все основные операции через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. ▲

1.14. Выразить все основные операции через конъюнкцию и отрицание; через дизъюнкцию и отрицание. ▲

1.15. Выразить все основные операции через импликацию и отрицание. ▲

1.16. Назовем *операциями Шеффера* следующие операции:

$$\varphi(A,\ B) = \overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}; \quad \psi(A,\ B) = \overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}.$$

Показать, что через каждую из них выражаются все основные операции. ▲

1.17. Выразить $A \dot{\vee} B$ через $A \to B$. ▲

Отметим, что возможны такие парадоксальные конструкции сложных высказываний, для которых не удается найти истинностные значения (хотя они и выражаются, в отличие от примеров, упомянутых в начале параграфа, повествовательными предложениями). Один из возможных примеров: «То, что я сейчас говорю, неправда». Ясно, что попытки считать это высказывание истинным или ложным одинаково приводят к противоречию. Другой пример, построенный на той же идее: «На одной стороне листа бумаги написано, что на обратной стороне написана правда, а на другой стороне написано, что на обратной стороне написана ложь». Весьма распространены различные задачи-шутки такого типа. Читателю, вероятно, известна история про царя, который за правду отрубал чужеземцу голову, а за ложь — вешал, и про то, в какое безвыходное положение поставил царя путешественник, заявивший, что его повесят. Причина возникающих парадоксов состоит в том, что здесь высказывание в целом неявно «содержится в самом себе» как простое высказывание и при определении значения истинности высказывания уже нужно знать заранее это значение. Такого рода ситуации невозможны для сложных высказываний, являющихся формулами при принятой нами индуктивной конструкции формул с помощью основных логических операций.

Сложные высказывания, являющиеся формулами, строятся при помощи введенных нами пяти основных операций. Иногда используется какой-либо другой список основных операций. В любом случае возникает существенный вопрос: сколь велико множество логических связок *), которые можно построить, комбинируя эти основные операции. Оказывается, что любую логическую операцию можно выразить через основные операции (с точностью до равносильности); более того, для этого даже достаточно дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. В силу же задачи 1.14 можно ограничиться дизъюнкцией и отрицанием или конъюнкцией и отрицанием.

Пусть имеется некоторая логическая операция $\mathfrak{A}$ над простыми высказываниями $A_1, \ldots, A_n$. Операция $\mathfrak{A}$ с точностью до равносильности характеризуется истинностной таблицей. Для определенности возьмем некоторую конкретную операцию над тремя простыми высказываниями:

A_1	A_2	A_3	$\mathfrak{A}$
И	И	Л	И
И	Л	И	И
Л	Л	И	И
Л	Л	Л	И
И	И	И	Л
Л	И	И	Л
Л	И	Л	Л
И	Л	Л	Л

*) Под *логической связкой* (или *логической операцией*) понимается, как видно из предыдущего текста, всякий способ образования сложного высказывания из простых, при котором для всякого набора истинностных значений простых высказываний однозначно определено истинностное значение сложного.

Таблицу для $\mathfrak{A}$ мы специально записали так, чтобы вначале шли строчки, для которых $\mathfrak{A}$ истинно. Тогда операцию, имеющую данную истинностную таблицу, можно получить, просто перечисляя ситуации, в которых высказывание $\mathfrak{A}$ истинно (мысленно произносите вместо &, $\vee$, $\overline{}$ названия логических связок: «и», «или», «не»):

$$(A_1\&A_2\&\overline{A_3})\vee(A_1\&\overline{A_2}\&A_3)\vee(\overline{A_1}\&\overline{A_2}\&A_3)\vee(\overline{A_1}\&\overline{A_2}\&\overline{A_3}).$$

1.18. Проверить, что построенная операция действительно имеет заданную истинностную таблицу. ▲

1.19. Обобщить приведенную конструкцию на случай произвольных логических операций $\mathfrak{A}$. ▲

Конструкция, полученная при решении задачи 1.19, называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно: СДНФ). Мы будем более подробно говорить о ней в следующем параграфе.

Логическую операцию по таблице можно строить, исходя не только из тех строчек, в которых $\mathfrak{A}$ истинна, но и из тех, в которых $\mathfrak{A}$ ложна. Здесь надо исключить те возможности, для которых $\mathfrak{A}$ ложна:

$$(\overline{A_1}\vee\overline{A_2}\vee\overline{A_3})\&(A_1\vee\overline{A_2}\vee\overline{A_3})\&(A_1\vee\overline{A_2}\vee A_3)\&\\ \&(\overline{A_1}\vee A_2\vee A_3)$$

(здесь опять-таки удобно вместо &, $\vee$, $\overline{}$ мысленно называть соответствующие связки).

1.20. Проверить, что построенная операция имеет заданную истинностную таблицу. ▲

1.21. Обобщить приведенную конструкцию на случай произвольных связок $\mathfrak{A}$. ▲

Конструкция из решения задачи 1.21 называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ).

1.22. Найти СДНФ и СКНФ для основных логических операций. ▲

Простейшие факты из алгебры высказываний часто помогают при решении элементарных логических задач. Мы приведем здесь лишь один пример такого рода задачи.

1.23. Путешественник находится в одном из городов A или $Б$, но в каком именно — ему неизвестно. Он задает собеседнику один вопрос, на который может получить ответ «да» или «нет», причем ответ его собеседника может являться правдой или ложью (чем именно, ему тоже неизвестно). Придумать вопрос, по ответу на который можно безошибочно судить, в каком городе находится путешественник. ▲

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 1

1.1. Приведем истинностную таблицу для $A \Delta B$:

A	B	$A \Delta B$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Эту же таблицу имеет, например, операция $(A \& \overline{B}) \vee (\overline{A} \& B)$, а также $(A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B})$.

1.4. Нужно лишь вспомнить определения необходимых и достаточных условий, после чего утверждение превращается в тавтологию.

1.6. 16 операций; каждая операция задается своей истинностной таблицей, так что задача заключается в том, чтобы найти число всех различных таблиц.

1.7. 8 операций (их число находится аналогично предыдущей задаче): тождественная истина, тождественная ложь, дизъюнкция, конъюнкция, эквивалентность и их отрицания. Заметим, что отрицание эквивалентности совпадает с альтернативной дизъюнкцией (см. задачу 1.1).

1.9. Простое высказывание B входит в формулу $\mathfrak{A}$ существенно, если существует такой набор значений истинности остальных простых высказываний $A_1, \ldots, A_n$, при которых значение истинности $\mathfrak{A}$ зависит от значения истинности B (т. е. для этого набора значения истинности $\mathfrak{A}$ различны при различных значениях истинности B).

1.10. Простое высказывание B фиктивно входит в формулу $\mathfrak{A}$, если для всякого набора значений истинности остальных простых высказываний $A_1, \ldots, A_n$ значение истинности $\mathfrak{A}$ одно и то же при обоих значениях истинности B.

1.11. Решение непосредственно следует из определения фиктивного вхождения (задача 1.10) и определения равносильности формул.

1.13. Нужно выразить импликацию $A \rightarrow B$, так как эквивалентность в силу задачи 1.5 выражается через импликацию и конъюнкцию:

$$A \sim B = (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A).$$

Можно также использовать равносильность $A \sim B = \overline{A \Delta B}$ и задачу 1.1. Чтобы выразить $A \rightarrow B$, удобно сравнить ее истинностную таблицу с истинностной таблицей для дизъюнкции и использовать тот факт, что и там, и там имеется единственный набор, для которого результат операции есть ложь.

1.14. Нужно выразить дизъюнкцию через конъюнкцию и отрицание; конъюнкцию через дизъюнкцию и отрицание. Воспользоваться тем, что истинностные таблицы для дизъюнкции и конъюнкции переходят одна в другую при замене «Л» на «И» и «И» на «Л».

1.15. Достаточно выразить конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание.

1.19. Составим истинностную таблицу для $\mathfrak{A}$, начиная с тех строк, для которых $\mathfrak{A}$ истинна. Каждой такой строке поставим в соответствие конъюнкцию тех простых высказываний, которые в этой строке истинны, и отрицаний остальных. Затем остается взять дизъюнкцию этих конъюнкций.

1.21. Каждой строчке из таблицы, в которой значение $\mathfrak{A}$ ложно, поставим в соответствие дизъюнкцию тех простых высказываний, значения которых в этой строчке ложны, и отрицаний остальных простых высказываний. Затем нужно взять конъюнкцию этих дизъюнкций.

1.23. Пусть, для определенности, ответ «да» будет соответствовать тому, что путешественник находится в городе A, «нет» — тому, что он находится в городе $Б$. Вопрос с двузначным ответом можно интерпретировать как вопрос об истинности или ложности какого-то высказывания. Пусть это будет сложное высказывание, составленное из простых высказываний:

X: «Путешественник находится в городе A»,
Y: «Собеседник говорит правду».

Тогда

$\bar{X}$: «Путешественник находится в городе $Б$»,
$\bar{Y}$: «Собеседник говорит ложь».

Итак, нужно построить сложное высказывание $\mathfrak{A}(X, Y)$ с таким расчетом, чтобы собеседник говорил, что оно истинно, если X истинно, и что оно ложно, если X ложно.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 1

1.6. Таблицы имеют вид, схематически указанный в следующей таблице:

A	B	$\mathfrak{A}(A, B)$
И	И	*
И	Л	*
Л	И	*
Л	Л	*

Таблицы для различных операций различаются последними столбцами, элементы которых заменены значком *. Вместо * может стоять или «И», или «Л», причем возможны любые комбинации. Различных комбинаций будет $2^4=16$ (это так называемые размещения с повторениями из двух элементов по четыре).

1.7. Опять нужно подсчитать число таблиц. Отличие от предыдущей задачи состоит в том, что в последнем столбце второй и третий элементы должны совпадать. Поэтому можно произвольно выбирать 3 элемента, и различных возможностей будет $2^3=8$. Конкретный вид операций проверяется непосредственно.

1.13. $A \to B = \bar{A} \vee B$; $A \sim B = (\bar{A} \vee B) \& (\bar{B} \vee A) = (A \& B) \vee (\bar{A} \& \bar{B})$.

1.14. $A \vee B = \overline{\bar{A} \& \bar{B}}$; $A \& B = \overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$.

1.15. $A \vee B = \bar{A} \to B$.

1.16. $\bar{A} = \varphi(A, A)$; $A \vee B = \overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\varphi(A, B)} = \varphi(\varphi(A, B), \varphi(A, B))$ или $A \& B = \varphi(\bar{A}, \bar{B}) = \varphi(\varphi(A, A), \varphi(B, B))$. Случай операции $\psi(A, B)$ рассматривается аналогично.

1.17. $A \vee B = (A \to B) \to B$.

1.19. Каждая из построенных конъюнкций будет истинна только при тех значениях истинности простых высказываний, которые стоят в соответствующей ей строчке. Поскольку мы взяли дизъюнкцию по всем наборам значений истинности простых высказываний, на которых $\mathfrak{A}$ истинна, построенное высказывание будет истинно на всех этих наборах и только на них. Ясно, что логическая операция определяется множеством наборов, на которых полученное сложное высказывание истинно (на остальных оно ложно).

1.21. Каждая из дизъюнкций, построенных в указании к задаче, ложна лишь на соответствующем ей наборе значений истинности простых высказываний. Поэтому конъюнкция рассматриваемых дизъюнкций ложна на тех же наборах, что и $\mathfrak{A}$.

1.22. СДНФ: $\bar{X} = \bar{X}$; $X \& Y = X \& Y$; $X \vee Y = (X \& Y) \vee (\bar{X} \& Y) \vee (X \& \bar{Y})$; $X \to Y = (X \& Y) \vee (\bar{X} \& Y) \vee (\bar{X} \& \bar{Y})$; $X \sim Y = (X \& Y) \vee (\bar{X} \& \bar{Y})$.

СКНФ: $\bar{X} = \bar{X}$; $X \& Y = (\bar{X} \vee Y) \& (X \vee \bar{Y}) \& (X \vee Y)$; $X \vee Y = X \vee Y$; $X \to Y = \bar{X} \vee Y$; $X \sim Y = (\bar{X} \vee Y) \& (X \vee \bar{Y})$.

1.23. Будем строить истинностную таблицу для искомого высказывания. Ясно, что если Y истинно, то $\mathfrak{A}(X, Y)$ должно быть равносильно X; в противном случае — $\bar{X}$, т. е.

$$\mathfrak{A}(X, Y) = (X \& Y) \vee (\bar{X} \& \bar{Y}).$$

Вид $\mathfrak{A}(X, Y)$ можно было бы получить по таблице

X	Y	$\mathfrak{A}(X, Y)$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

при помощи конструкции задачи 1.19. Итак, можно задать вопрос: «Верно ли, что я нахожусь в городе A и Вы говорите правду или я нахожусь в городе $Б$ и Вы говорите ложь?». Заметим, что

$$\mathfrak{A}(X, Y) = X \sim Y;$$

поэтому вопрос можно сформулировать и так: «эквивалентно ли то, что я нахожусь в городе A, тому, что Вы говорите правду?».

Конечно, задачи типа задачи 1.23 можно решить, не используя алгебры высказываний, но последняя дает возможность решать их более формально.

§ 2. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ; НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

1. Функции алгебры логики; равносильность функций. В предыдущем параграфе мы выяснили, что с точки зрения алгебры высказываний логические операции полностью характеризуются истинностными таблицами. При этом можно забыть о том, что мы рассматриваем какие-то операции над высказываниями, и иметь дело лишь с самими таблицами. Таким образом мы приходим к понятию ф у н к ц и и а л г е б р ы л о г и к и, которое и будет исследоваться в дальнейшем. Однако мы не советуем забывать об указанных выше интерпретациях логических связок, так как они проясняют целый ряд соотношений в алгебре логики. В отличие от предыдущего параграфа мы будем употреблять вместо И, Л символы 1, 0 *). Итак,

О п р е д е л е н и е 2.1. *Функцией алгебры логики* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *от n переменных* $x_1, \ldots, x_n$ называется функция, принимающая значения 1, 0 и аргументы которой также принимают значения 1, 0.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задается своей истинностной таблицей:

x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_n)$
0	0	0	...	0	0	$f(0,0,\ldots,0,0)$
1	0	0	...	0	0	$f(1,0,\ldots,0,0)$
...	...	...	...	...	...	. . . .
1	1	1	...	1	0	$f(1,1,\ldots,1,0)$
1	1	1	...	1	1	$f(1,1,\ldots,1,1)$

*) Не имея в виду никакого конкретного «смысла» этих символов, в том числе и обычного арифметического, если не оговорено противное (см. § 4).

В каждой строке таблицы вначале дается набор значений переменных $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, а затем значение функции на этом наборе. Легко заметить, что число различных двоичных наборов длины n (упорядоченных наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из 0 и 1 *)) конечно.

2.1. Сколько имеется различных двоичных наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ длины n? ▲

2.2. Сколько имеется различных функций алгебры логики от n переменных? ▲

2.3. Сколько имеется различных функций от n переменных, сохраняющих 0 (т. е. равных нулю на нулевом наборе: $f(0, \ldots, 0)=0$)? ▲

Аналогично рассматривается вопрос для функций, сохраняющих 1. Приведем теперь в новых обозначениях таблицы для основных логических операций.

x	y	$\bar{x}$	$x \mathbin{\&} y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \sim y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Кроме этих основных функций, у нас будут встречаться *константы* 0 и 1 и функция, с о в п а д а ю щ а я со своим аргументом.

Договоримся теперь о том, какие функции алгебры логики мы будем считать одинаковыми (ср. определение 1.1). Заметим, что задание функции включает фиксацию обозначений для аргументов. Однако (когда не может возникнуть недоразумений) мы будем коротко писать f вместо $f(x_1, \ldots, x_n)$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть f и g — функции алгебры логики и $x_1, \ldots, x_n$— совокупность аргументов, входящих по крайней мере в одну из этих функций. Мы будем говорить, что f и g *равносильны* (и писать тогда $f=g$**)),

*) Их часто называют n-буквенными словами в «двухбуквенном алфавите» $\{0,1\}$.

**) В частности, запись $f(x)=1$ означает, что функция f т о ж д е с т в е н н о равна 1.

если при всех значениях $x_1, \ldots, x_n$ значения f и g совпадают.

По аналогии с § 1 (задачи 1.9, 1.10) можно ввести понятие фиктивных и существенных переменных. Мы иногда будем пользоваться тем, что к аргументам функции всегда можно формально добавить новый аргумент, после чего получится равносильная исходной функция, фиктивно зависящая от добавленного аргумента.

Отметим, что в силу определения 2.2 функции, имеющие одинаковые истинностные таблицы, но отличающиеся обозначениями переменных, равносильными не считаются.

2. Суперпозиция функций алгебры логики. Определим основную операцию, которую можно производить над функциями алгебры логики,— суперпозицию (или операцию образования сложной функции). Интуитивный смысл этого понятия состоит в том, что в аргументы функции подставляются другие функции, некоторые переменные отождествляются, и эта процедура может повторяться. Строгое же определение дается по индукции.

Определение 2.3. Пусть $\Phi=\{\varphi_1(x_{11}, \ldots, x_{1k_1}), \varphi_2(x_{21}, \ldots, x_{2k_2}), \ldots, \varphi_m(x_{m1}, \ldots, x_{mk_m})\}$ — конечная система функций алгебры логики.

Функция ψ называется *элементарной суперпозицией* или *суперпозицией ранга* 1 (обозначение: $\psi \in \Phi^{(1)}$), если она может быть получена одним из следующих способов:

а) из какой-то функции $\varphi_j \in \Phi$ переименованием какой-то из ее переменных x_{ji}, т. е. имеет вид

$$\varphi_j(x_{j1}, \ldots, x_{j\,i-1}, y, x_{j\,i+1}, \ldots, x_{jk_j}),$$

где y, в частности, может совпадать с одной из переменных x_{ln};

б) подстановкой некоторой функции $\varphi_l \in \Phi$ вместо какого-то аргумента x_{ji} одной из функций $\varphi_j \in \Phi$:

$$\varphi_j(x_{j1}, \ldots, x_{j\,i-1}, \varphi_l(x_{l1}, \ldots, x_{lk_l}), x_{j\,i+1}, \ldots, x_{jk_j}).$$

Получающаяся в результате функция ψ зависит от аргументов

$$(x_{j1}, \ldots, x_{j\,i-1}, x_{l1}, \ldots, x_{lk_l}, x_{j\,i+1}, \ldots, x_{jk_j}),$$

т. е. от всех переменных функций φ_j, φ_l, исключая, быть может, x_{ji}.

Если описан класс $\Phi^{(r)}$ функций, являющихся суперпозициями ранга r функций из системы Φ, то класс $\Phi^{(r+1)}$

состоит из элементарных суперпозиций функций из $\Phi^{(r)}$ (т. е. $\Phi^{(r+1)}=(\Phi^{(r)})^{(1)}$).

Суперпозициями функций из Φ называются функции, входящие в какой-либо из классов $\Phi^{(r)}$.

З а м е ч а н и е 1. Если функции φ и ψ имеют одинаковые истинностные таблицы, отличаясь только обозначениями переменных, то в силу а) определения 2.3 каждая из них является суперпозицией другой.

З а м е ч а н и е 2. В силу а) определения 2.3 $\Phi\subset\Phi^{(1)}$, а значит, $\Phi^{(r)}\subset\Phi^{(r+1)}$ и вообще $\Phi^{(r)}\subset\Phi^{(s)}$ при $r\leqslant s$.

З а м е ч а н и е 3. Если при переименовании переменных согласно а) определения 2.3 мы заменим x_{ji} на некоторую x_{jl} ($l\neq i$), то получим функцию от меньшего числа переменных. В таких случаях говорят, что у φ_j **о т о ж д е с т в л е н ы** переменные x_{ji} и x_{jl}. Например, при отождествлении переменных x и y функции $x\vee y$ и $x\,\&\,\bar{y}$ переходят соответственно в $x\vee x=x$ и $x\,\&\,\bar{x}=0$. Повторение этой процедуры позволяет отождествлять любое число переменных.

З а м е ч а н и е 4. Точно так же, повторяя процедуру подстановки согласно б) определения 2.3, мы можем подставить вместо любого числа аргументов любой функции из Φ произвольные функции из Φ.

О п р е д е л е н и е 2.4. Суперпозиция основных функций $\bar{x}$, $x\,\&\,y$, $x\vee y$, $x\to y$, $x\sim y$ называется *формулой*.

Введенное в § 1 понятие равносильности формул (определение 1.1) согласуется с определением 2.2.

В дальнейшем нам часто придется неявно пользоваться следующим — почти очевидным, но важным — свойством суперпозиций.

2.4. Пусть $\Phi=\{\varphi_j\}$ — конечная система функций, $\tilde{\Phi}$ состоит из функций ψ_j, каждая из которых равносильна какой-либо функции из Φ. Каждой функции $\tilde{f}$, являющейся суперпозицией функций из $\tilde{\Phi}$, поставим в соответствие функцию f, которая получится, если все функции из $\tilde{\Phi}$, из которых в результате суперпозиции получена $\tilde{f}$, заменить какими-либо равносильными функциями из Φ (строгое определение f дается по индукции). Доказать, что функции f и $\tilde{f}$ равносильны. ▲

Несмотря на всю очевидность этого утверждения, мы советуем читателю аккуратно доказать его — чтобы привыкнуть к технике индуктивных доказательств такого рода. Смысл утверждения состоит в том, что в суперпозиции функций $\{\varphi_i\}$ в каждом вхождении их можно заменять равносильными функциями. Аналогично показывается, что в суперпозиции можно заменять равносильными функциями участвующие в ней суперпозиции меньшего ранга.

Несколько упростим обозначения. Будем опускать символ конъюнкции &, т. е. вместо $x \& y$ будем писать просто xy *). Далее мы сократим число скобок, установив «иерархию» операций: «старшая» операция — конъюнкция, затем — дизъюнкция, и, наконец, импликация и эквивалентность (их мы не упорядочиваем). Соглашение состоит в том, что вначале выполняется старшая операция, если скобки не предписывают противное. Например, формулу $(x \& y) \vee \vee (z \to t)$ можно переписать так: $xy \vee (z \to t)$; формулу $(x \vee y) \to (y \& z)$ — в виде $x \vee y \to yz$.

Приведем теперь перечень важнейших равносильностей алгебры логики:

$$\bar{\bar{x}} = x; \tag{2.1}$$

$$xy = yx; \tag{2.2}$$

$$(xy)\,z = x\,(yz); \tag{2.3}$$

$$x \vee y = y \vee x; \tag{2.4}$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z); \tag{2.5}$$

$$x\,(y \vee z) = xy \vee xz; \tag{2.6}$$

$$x \vee yz = (x \vee y)\,(x \vee z); \tag{2.7}$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}; \tag{2.8}$$

$$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}; \tag{2.9}$$

$$x \vee x = x; \tag{2.10}$$

$$xx = x; \tag{2.11}$$

$$1x = x; \tag{2.12}$$

$$0 \vee x = x. \tag{2.13}$$

2.5. Доказать равносильности (2.1) — (2.13). ▲

Равносильности (2.2), (2.3), (2.4) и (2.5) означают коммутативность и ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции. Ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции позволяет опускать скобки в конъюнкциях и дизъюнкциях нескольких переменных, коммутативность — расставлять члены

*) Это обозначение напоминает «бессоюзное» образование сложных предложений (см. стр. 16).

2*

таких конъюнкций и дизъюнкций в любом порядке. Равносильности (2.6) и (2.7) — это дистрибутивные (распределительные) законы конъюнкции и дизъюнкции *). (2.6) позволяет «раскрывать скобки». Вообще же (2.6) и (2.7) позволяют преобразовывать выражения так, чтобы операции в них выполнялись в обратном порядке (например, если в исходном выражении вначале выполнялась дизъюнкция, а потом конъюнкция, то можно получить равносильную формулу, в которой вначале выполняется конъюнкция, а потом дизъюнкция). Мы еще воспользуемся этим обстоятельством при рассмотрении нормальных форм. При этом нам потребуются следующие факты.

2.6. Доказать, что

$$(x \vee y)(z \vee t) = xz \vee yz \vee xt \vee yt. \quad \blacktriangle$$

2.7. Доказать, что

$$xy \vee zt = (x \vee z)(y \vee z)(x \vee t)(y \vee t). \quad \blacktriangle$$

Равносильности (2.8) и (2.9) (так называемые законы де Моргана) уже упоминались в § 1 в связи с возможностью выразить конъюнкцию через дизъюнкцию и отрицание, а дизъюнкцию — через конъюнкцию и отрицание. Эти же соотношения используются для перенесения отрицаний, применяемых к сложным высказываниям, на составляющие их простые.

2.8. Преобразовать (найти равносильную формулу) к формуле, в которой отрицания стоят только над аргументами: а) $\overline{xy \vee \bar{z}}$; б) $x(xy \vee \bar{y}z \vee \overline{(y \vee \bar{t}z)})$. $\blacktriangle$

2.9. Выразить отрицание импликации через основные операции так, чтобы отрицания стояли только над аргументами. $\blacktriangle$

Процедура переброски отрицаний на простые высказывания используется при построении определений отрицательных понятий. Мы уже касались этого в § 1 (задача 1.10) и неоднократно будем возвращаться к этому в дальнейшем.

---

*) В отличие от числового случая, здесь имеется не один, а два дистрибутивных закона.

2.10. Мальчик решил в воскресенье закончить чтение книги, сходить в музей или кино, а если будет хорошая погода — пойти на реку выкупаться. В каком случае можно сказать, что решение мальчика не выполнено? (В ответе отрицания должны содержаться лишь в простых высказываниях.) ▲

Мы не думаем, что при ответе на этот вопрос вам непременно пришлось прибегнуть к алгебре высказываний. В любом случае попытайтесь дать ответ непосредственно. После этого, напротив, обязательно решите эту задачу при помощи алгебры логики.

2.11. Решить задачу 2.10, используя алгебру высказываний. ▲

2.12. Придумать самим сложное высказывание, содержащее различные связки, и построить его отрицание непосредственно и при помощи алгебры логики. ▲

3. Булевы алгебры.

Определение 2.5. Множество $\mathfrak{M}$, на котором определены две двуместные операции $x, y \Rightarrow xy$ и $x, y \Rightarrow x \vee y$ и одна одноместная операция $x \Rightarrow \bar{x}$ и выделены два элемента 0 и $1 \in \mathfrak{M}$, причем для этих операций и элементов выполняются аксиомы (2.1) — (2.13) (здесь равенство понимается как совпадение элементов $\mathfrak{M}$), называется *булевой алгеброй*.

Можно бы при определении булевой алгебры исходить из одной двуместной операции (например, xy), доопределив другую при помощи (2.1) и законов де Моргана (2.8), (2.9). Мы не будем здесь касаться вопроса о построении системы независимых аксиом для булевой алгебры.

При изучении логических операций с помощью таблиц мы по существу имели дело с булевой алгеброй, состоящей из двух элементов $\{0, 1\}$, где операции определены согласно таблице на стр. 32.

Булевы алгебры являются примером аксиоматически заданного алгебраического объекта (другие примеры: группы, кольца, поля и т. д.; о них можно прочитать в любом учебнике высшей алгебры). Эти объекты представляют собой множества, в которых выделены некоторые элементы (в булевой алгебре — элементы 0 и 1; в группе — единичный элемент и т. д.) и определены некоторые операции. Эти элементы и операции должны удовлетворять некоторому конечному набору соотношений — аксиом; в остальном они могут задаваться произвольно. Может показаться, что это употребление термина «аксиома» противоречит привычному пониманию этого термина, известного из школьного курса геометрии. Несущественное различие заключается в том, что здесь речь идет об аксиоматизации операций, а в евклидовой геометрии — об аксиоматизации некоторых отношений между основными объектами («принадлежать», «лежать между» и др.). Главным же различием, вероятно, представляется то, что, грубо говоря, «имеется одна-единственная евклидова плоскость, но много различных групп или булевых алгебр». Точная формулировка этого факта дается на языке изоморфизма (для булевых алгебр см. ниже определение 2.6): все евклидовы плоскости изоморфны, но существуют неизоморфные булевы алгебры (последнее следует, например, из задачи 2.19). Молчаливое соглашение об изоморфизме накладывает сильный отпечаток на изложение аксиоматики в школьном курсе геометрии и часто является серьезным психологическим барьером при переходе к аксиоматическим объектам, допускающим неизоморфные реализации. В случае последних наряду с доказательством теорем — утверждений, являющихся следствиями из аксиом, важную роль играет исследование вопросов, связанных с наличием неизоморфных объектов, например, изучение специальных классов объектов, выделяемых дополнительными аксиомами (примеры: коммутативные группы, регулярные булевы алгебры, рассматриваемые в п. 4 этого параграфа). Вопросов такого типа в евклидовой геометрии не возникает по указанной выше причине. Не следует думать, что аксиоматики, приводящие к неизоморфным объектам, являются привилегией алгебры; такого рода аксиоматики имеются и в неевклидовой геометрии.

Наконец, в школьном курсе геометрии объясняется, что аксиомы не доказываются (иногда даже говорят, что они «не требуют доказательств»). С другой стороны, мы проверяем (доказываем!) аксиомы булевой алгебры для каждого из рассматриваемых примеров (см. ниже). Дело в том, что в элементарной геометрии, как мы уже говорили, занимаются лишь получением следствий из аксиом (теорем). Таким образом, рассматриваются исключительно «внутренние» вопросы теории. Вопрос же о справедливости аксиом для е д и н с т в е н н о г о интересующего нас объекта — идеализированной модели нашего реального пространства — является «внешним» для теории и решается исходя из наших интуитивных представлений. В случае же, например, теории булевых алгебр эти «внешние» вопросы возникают для различных конкретных объектов, причем проверка аксиом каждый раз осуществляется строгими математическими средствами, хотя и лежит за пределами теории. Другими словами, понятие системы аксиом приобретает новый оттенок. Это уже не набор истин, которые мы по каким-то соображениям принимаем без доказательства, а набор тестов, выполнимость которых для какого-нибудь объекта автоматически влечет справедливость целого набора теорем, составляющих данную аксиоматическую теорию. Эта эволюция взгляда на аксиомы лежит в основе широкого применения аксиоматического метода в современной математике.

Отметим, что и в случае евклидовой геометрии при рассмотрении ее моделей нам приходится проверять (опять-таки доказывать!) аксиомы. В моделях основные объекты (точки, прямые и т. д.) конструируются исходя из уже построенных математических теорий (например, теории действительных чисел). Так, при рассмотрении аналитической интерпретации евклидовой планиметрии точками объявляются пары действительных чисел (x, y) и все основные отношения описываются на языке действительных чисел. При этом проверяется справедливость всех аксиом: они доказываются исходя из свойств действительных чисел. Многим читателям, вероятно, известно, что для доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского строится ее интерпретация на евклидовой плоскости; для этой интерпретации аксиомы геометрии Лобачевского превращаются в теоремы евклидовой геометрии.

Во избежание недоразумений отметим, что слово «алгебра» принято употреблять в двух разных смыслах: как обозначение некоторой математической теории (например, алгебра логики) и как обозначение некоторого класса аксиоматических объектов (например, булева алгебра). Никаких причин для этого, кроме сложившихся традиций, нет.

Рассмотрим примеры булевых алгебр.

1) Пусть M — некоторое множество (можно считать для простоты, что M — множество точек на прямой или множество натуральных чисел), $\mathfrak{M}_M$ — совокупность его подмножеств. Через xy (x, $y \in \mathfrak{M}_M$) мы обозначим пересечение множеств x и y; через $x \vee y$ — их объединение, через $\bar{x}$ — дополнение к множеству x до всего множества M, через 0 — пустое множество, через 1 — множество M.

2.13. Проверить, что совокупность $\mathfrak{M}_M$ подмножеств множества M с так определенными операциями и элементами 0,1 является булевой алгеброй. ▲

2) Пусть $\mathfrak{M}$ состоит из таких чисел x, что $0 \leqslant x \leqslant A$, $A \neq 0$. Положим $\bar{x} = A - x$, $x \vee y = \max\{x, y\}$, $x \mathbin{\&} y = \min\{x, y\}$. Роль «0» будет играть число 0, роль «1» — число A.

2.14. Проверить, что множество $\mathfrak{M}$ с так определенными операциями и элементами 0,1 является булевой алгеброй. ▲

3) Если в булевой алгебре имеется некоторое подмножество, замкнутое относительно определенных в этой алгебре операций (т. е. применение операций к элементам подмножества вновь приводит к элементам этого подмножества) и содержащее 0,1, то оно является булевой алгеброй относительно тех же операций и выделенных элементов (булева подалгебра). Так, если в примере 2) A — натуральное число, то можно рассмотреть подмножество натуральных чисел. Вообще, в этом примере булеву подалгебру образует любое подмножество, симметричное относительно середины отрезка $[0, A]$ и содержащее концы (доказать!).

4) Пусть N — натуральное число, а $\mathfrak{M}_N$ — множество его целых положительных делителей. Для $x, y \in \mathfrak{M}_N$ положим $\bar{x} = N/x$; xy — наибольший общий делитель x и y, $x \vee y$ — наименьшее общее кратное x, y, под «0» будем понимать число 1, под «1» — число N.

2.15. Показать, что мы превратили множество делителей числа N в булеву алгебру. ▲

5) Поскольку на совокупности высказываний определены соответствующие операции, естественно предположить, что она является булевой алгеброй. Для этого, однако, в множестве высказываний нужно провести некоторое отождествление. Будем считать высказывания A и B тождественными ($A \equiv B$), если эквивалентность $A \sim B$ абсолютно истинна (т. е. истинна во всех ситуациях, см. стр. 15). Совокупность высказываний, рассматриваемых с точностью до так введенной тождественности (точнее, классы тождественных высказываний), образует булеву алгебру. Роль 0 играет класс абсолютно ложных высказываний (все они тождественны между собой); роль 1 — класс абсолютно истинных высказываний. Ясно, что если над какими-то высказываниями производится логическая операция, то замена каких-то высказываний тождественными приводит к замене получающегося высказывания на тождественное. Таким образом, равенства (2.1) — (2.13) для этого случая означают тождественность высказываний. Так, построенную булеву алгебру называют *булевой алгеброй высказываний* *).

6) Рассмотрим некоторые подалгебры в булевой алгебре высказываний $\mathfrak{M}$. Пусть M — произвольное множество. Каждому фиксированному подмножеству $x \subset M$ $(x \in \mathfrak{M}_M)$ поставим в соответствие высказывание $\tilde{x}$: «Этот элемент множества M содержится в подмножестве x».

Очевидно, что для несовпадающих x и y всегда $\tilde{x} \not\equiv \tilde{y}$ (достаточно рассмотреть элемент, принадлежащий одному из множеств x, y, но не принадлежащий другому).

2.16. Доказать, что совокупность высказываний $\tilde{x}$ $(x \in \mathfrak{M}_M)$ является подалгеброй в булевой алгебре $\mathfrak{M}$. ▲

Для высказываний $\tilde{x}$ из примера 6) фиксация ситуации состоит в фиксации элемента множества M, причем две ситуации, отвечающие различным элементам M, существенно различны: имеется высказывание $\tilde{x}$, которое в одной из ситуаций истинно, а в другой ложно. Поэтому естественно отождествить M с множеством ситуаций для $\tilde{\mathfrak{M}}_M$.

Для произвольного множества высказываний понятие ситуации является достаточно неопределенным (например, что такое ситуация для совокупности всех высказываний

---

*) Рекомендуем тщательно продумать, почему для превращения множества высказываний в булеву алгебру необходимо отождествление абсолютно эквивалентных высказываний.

вообще). Пусть, однако, $\tilde{\mathfrak{M}}$ — некоторая подалгебра в алгебре высказываний $\mathfrak{M}$, для которой удается описать множество различных ситуаций M. Ситуации естественно считать различными, если существует высказывание, которое в одной из них истинно, а в другой ложно. Тогда каждому высказыванию $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{M}}$ отвечает подмножество $x \subset M$ ситуаций, для которых $\tilde{x}$ истинно. При этом подмножества x, y совпадают тогда и только тогда, когда $\tilde{x} = \tilde{y}$, т. е. когда абсолютно истинна эквивалентность $\tilde{x} \sim \tilde{y}$. Совокупность $\mathfrak{M}$ полученных в результате подмножеств в M является подалгеброй в булевой алгебре подмножеств $\mathfrak{M}_M$. Если по $x \in \mathfrak{M}$ построить высказывание способом, указанным в примере 6), то получится высказывание, тождественное $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{M}}$.

Мы получили примеры так называемых **изоморфных** булевых алгебр (другой пример обсуждается в указаниях к задаче 2.15).

Определение 2.6. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две булевы алгебры. Отображение $x \Rightarrow \tilde{x}$, ставящее каждому $x \in \mathfrak{M}$ элемент $\tilde{x} \in \mathfrak{N}$, называется *гомоморфизмом* булевой алгебры $\mathfrak{M}$ в булеву алгебру $\mathfrak{N}$, если

$$\tilde{0}_{\mathfrak{M}} = 0_{\mathfrak{N}};$$
$$\tilde{1}_{\mathfrak{M}} = 1_{\mathfrak{N}};$$
$$\tilde{\bar{x}} = \bar{\tilde{x}};$$
$$\tilde{x} \vee \tilde{y} = \widetilde{x \vee y};$$
$$\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}$$

для всех $x, y \in \mathfrak{M}$; нижние индексы у 0 и 1 указывают, в какой алгебре они являются выделенными элементами.

Если гомоморфизм $x \Rightarrow \tilde{x}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, то он называется *изоморфизмом* булевых алгебр $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, а булевы алгебры $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в этом случае называются *изоморфными*.

Мы показали выше, что булева алгебра $\mathfrak{M}_M$ подмножеств множества M изоморфна некоторой булевой подалгебре $\tilde{\mathfrak{M}}_M$ высказываний и что булева алгебра высказываний $\tilde{\mathfrak{M}}$ изоморфна некоторой булевой алгебре подмножеств $\mathfrak{M}$ множества ситуаций M. Тем самым мы установили естественное соответствие между булевыми алгебрами высказываний и множеств.

2.17. Пусть N — натуральное число, в разложении которого на простые множители все множители различны; через $\hat{N}$ обозначим множество этих множителей. Показать, что булева алгебра делителей $\mathfrak{M}_N$ (пример 4) изоморфна булевой алгебре $\mathfrak{M}_{\hat{N}}$ подмножеств $\hat{N}$. ▲

Другой пример изоморфизма, который мы рассмотрим, чрезвычайно важен. Аксиомы булевой алгебры таковы, что если всюду поменять местами 0 и 1, дизъюнкцию и конъюнкцию, то получится та же аксиоматика. Это обстоятельство можно выразить следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}$ — булева алгебра. Построим новую булеву алгебру $\mathfrak{M}^+$, которая будет состоять из тех же элементов, что и $\mathfrak{M}$, но с другими операциями. Элементы $x, y, \ldots$ из $\mathfrak{M}$, рассматриваемые как элементы $\mathfrak{M}^+$, будем обозначать через $x^+, y^+, \ldots$; элементы 0, 1 для $\mathfrak{M}^+$ — через 0_+, 1_+. Тогда полагаем:

$0_+ = 1^+$ (т. е. 0 в $\mathfrak{M}^+$ — это 1 в $\mathfrak{M}$);

$1_+ = 0^+$;

$x_+ \vee y_+ = (xy)_+$ (т. е. дизъюнкция элементов в $\mathfrak{M}^+$ совпадает с их конъюнкцией в $\mathfrak{M}$);

$x_+ y_+ = (x \vee y)_+$.

Булева алгебра $\mathfrak{M}^+$ называется *двойственной* к $\mathfrak{M}$. Заметим, что $(\mathfrak{M}^+)^+ = \mathfrak{M}$.

2.18. Показать, что отображение $x \Rightarrow \bar{x}$ осуществляет изоморфизм $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}^+$. ▲

4. Регулярные булевы алгебры и булевы операции. В случае двухэлементной булевой алгебры $\{0, 1\}$ операции xy, $x \vee y$, $\bar{x}$ являются частным случаем общих операций $f(x_1, \ldots, x_n)$—функций алгебры логики. Возникает вопрос, нельзя ли ввести аналогичные операции в каких-нибудь других булевых алгебрах. Можно, конечно, рассмотреть функции, у которых аргументы и значение функции принадлежат булевой алгебре. Но тогда, например, в случае алгебры из задачи 2.14 мы будем рассматривать любые функции вещественных переменных без всякого учета структуры булевой алгебры. Мы будем пытаться связать с функциями алгебры логики такие операции на булевых алгебрах, чтобы между ними имели место все соотношения, имеющие место на алгебре $\{0, 1\}$. Самый, казалось бы, естественный путь состоит в следующем. Каждой функции алгебры логики поставим в соответствие операцию на булевой алгебре, исходя из представления функции алгебры логики в виде нормальных форм (см. следующий пункт, а также конец § 1), т. е. через операции, уже имеющиеся в любой булевой алгебре. Однако этот путь не всегда приводит к цели, так как некоторые равносильности даже между основными операциями xy, $x \vee y$, $\bar{x}$, рассматриваемыми как функции алгебры логики, имеют место не во всякой булевой алгебре.

2.19. Привести пример булевой алгебры, в которой не имеют место равносильности: $x \vee \bar{x} = 1$; $x\bar{x} = 0$. ▲

Для некоторых конкретных булевых алгебр операции, отвечающие функциям алгебры логики, можно ввести весьма естественным образом.

Рассмотрим булеву алгебру $\mathfrak{M}_M$ подмножеств множества M. Назовем *теоретико-множественной операцией* всякое отображение $F(x_1, \ldots, x_n)$, сопоставляющее всякому набору из n подмножеств $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{M}_M$ некоторое подмножество $y = F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}_M$ такое, что принадлежность или непринадлежность некоторого элемента $m \in M$ подмножеству y определяется только тем, в какие из множеств $x_1, \ldots, x_n$ элемент m входит.

Между теоретико-множественными операциями и функциями алгебры логики существует взаимно однозначное соответствие. Действительно, пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — теоретико-множественная операция. Каждому двоичному набору $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ поставим в соответствие 1, если элемент m из M, принадлежащий подмножествам x_i при $\alpha_i = 1$ и не принадлежащий остальным x_i, принадлежит $y = F(x_1, \ldots, x_n)$; если же такой элемент не принадлежит y, то данному набору α ставим в соответствие 0. Возникает функция алгебры логики $f_F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ясно, что это соответствие взаимно однозначно.

Все операции над множествами, которые обычно рассматриваются в теории множеств, удовлетворяют нашему определению теоретико-множественной операции. Рассмотрим примеры. Напомним, что разностью множеств $x \setminus y$ называется дополнение их пересечения до x, симметрической разностью $x \Delta y$ называется дополнение их пересечения до объединения (на рис. 1 результаты соответствующих операций заштрихованы).

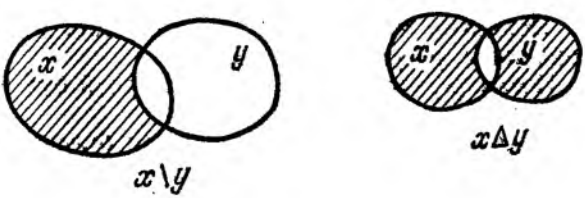


Рис. 1.

2.20. а) Какие функции алгебры логики отвечают разности и симметрической разности множеств?

б) Доказать ассоциативность симметрической разности. ▲

2.21. Какие теоретико-множественные операции отвечают импликации, эквивалентности, функциям Шеффера (задача 1.16)? ▲

Интерпретация функций алгебры логики в булевой алгебре высказываний по существу была проведена в конце § 1 и в начале § 2. Напомним, что логической операцией в алгебре высказываний называется отображение $F\ (x_1, \ldots, x_n)$, которое каждому набору из n высказываний ставит в соответствие высказывание $y = F(x_1, \ldots, x_n)$, причем истинность y зависит только от истинности или ложности высказываний $x_1, \ldots, x_n$.

Мы поставили в соответствие каждой логической операции функцию алгебры логики (п. 1 § 2). Заметим, что соответствие логических и теоретико-множественных операций с функциями алгебры логики согласуется с установленным выше изоморфизмом между булевыми алгебрами множеств и высказываний.

Этим нашим рассмотрениям можно придать несколько более общий вид. Пусть $\mathfrak{M}$ — булева алгебра. Будем рассматривать ее гомоморфизмы в двухэлементную булеву алгебру $\{0,1\}$. Через $M\ (\mathfrak{M})$ обозначим их совокупность.

Определение 2.7. Будем говорить, что булева алгебра $\mathfrak{M}$ *регулярна*, если для всяких двух элементов $x, y \in \mathfrak{M}$ найдется разделяющий их гомоморфизм $\varphi \in M\ (\mathfrak{M})$, т. е. такой, что $\varphi\ (x) \neq \varphi\ (y)$ (требование регулярности означает, что множество $M\ (\mathfrak{M})$ в некотором смысле достаточно велико).

2.22. Привести пример нерегулярной булевой алгебры. ▲

2.23. Показать, что алгебры высказываний и подмножеств являются регулярными. ▲

2.24. Показать, что подалгебра регулярной булевой алгебры регулярна. ▲

2.25. Показать, что всякая регулярная булева алгебра изоморфна некоторой подалгебре булевой алгебры подмножеств (а значит, и алгебры высказываний). ▲

Определение 2.8. В регулярной булевой алгебре $\mathfrak{M}$ операции $F\ (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathfrak{M}$, называются *булевыми операциями*, если для всякого $\varphi \in M\ (\mathfrak{M})$ значение $\varphi\ (y)$, $y = F\ (x_1, \ldots, x_n)$, определяется значениями $\varphi\ (x_1), \ldots, \varphi\ (x_n)$.

2.26. Показать, что булевы операции находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями алгебры логики. ▲

При доказательстве регулярности алгебр подмножеств и высказываний мы строили некоторые совокупности разделяющих гомоморфизмов в алгебру $\{0,1\}$. Однако ни в одном из этих случаев мы не ставили вопрос о перечислении всех гомоморфизмов в алгебру $\{0,1\}$ (т. е. о нахождении всего множества M $(\mathfrak{M})$). Заметим, что в примерах мы не нашли всех таких гомоморфизмов. Например, в алгебре подмножеств можно фиксировать два элемента и ставить 1 в соответствие подмножеству, содержащему оба эти элемента, 0 — подмножеству, не содержащему по крайней мере одного из них.

С каждым подмножеством $M' \subset M$ $(\mathfrak{M})$, содержащим для каждой пары элементов $\mathfrak{M}$ разделяющий гомоморфизм, можно связать понятие булевой операции (достаточно в приведенном выше определении M $(\mathfrak{M})$ заменить на M').

2.27. Показать, что понятие булевой операции не зависит от того, с каким множеством $M' \subset M$ $(\mathfrak{M})$ (содержащим для каждой пары элементов $\mathfrak{M}$ разделяющий гомоморфизм) мы его связываем. ▲

Отсюда следует, что булевы операции на алгебре подмиожеств — это теоретико-множественные операции, а на алгебре высказываний — логические операции.

Теперь мы вновь возвратимся к изучению функций алгебры логики, т. е. будем иметь дело с булевой алгеброй $\{0,1\}$. Однако следует иметь в виду, что все полученные при этом результаты могут быть соответствующим образом интерпретированы для булевых операций на произвольных регулярных булевых алгебрах.

5. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). В конце § 1, в связи с вопросом о представимости произвольных логических операций через основные операции, мы уже говорили о совершенных дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных формах. Сейчас мы вновь возвратимся к этому вопросу.

Введем обозначение:

$$x^\sigma = \begin{cases} x & \text{при} \quad \sigma = 1, \\ \bar{x} & \text{при} \quad \sigma = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $\sigma^\sigma = 1$.

Определение 2.9. Формула $x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ — какой-либо двоичный набор, а среди переменных x_i могут быть совпадающие, называется *элементарной конъюнкцией*.

Определение 2.10. Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ).

2.28. Показать, что необходимое и достаточное условие тождественного обращения в нуль ДНФ состоит в том, что в каждую элементарную конъюнкцию какая-нибудь переменная (для каждой элементарной конъюнкции, вообще говоря, своя) входит вместе со своим отрицанием. ▲

Определение 2.11. Элементарная конъюнкция называется *правильной*, если в нее каждая переменная входит не более одного раза (включая ее вхождения под знаком отрицания).

2.29. Какие из указанных элементарных конъюнкций являются правильными: а) $x_1\bar{x}_2x_3$; б) $x_1\bar{x}_3\bar{x}_1$; в) $x_2x_2\bar{x}_2x_1$; г) $x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$? ▲

Определение 2.12. Правильная элементарная конъюнкция называется *полной* относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$, если в нее каждая из этих переменных входит один и только один раз (быть может, под знаком отрицаиия).

Например, конъюнкция а) задачи 2.29 полна относительно переменных x_1, x_2, x_3; конъюнкция г) полна относительно переменных x_1, x_2, x_3, x_4.

Определение 2.13. *Совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ) относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется дизъюнктивная нормальная форма, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все элементарные конъюнкции правнльны и полны относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Поскольку из вида СДНФ бывают ясны ее переменные, мы будем говорить просто СДНФ, опуская слова «относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$».

Из задачн 1.19 следует, что всякую функцию алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, не равную тождественно нулю, можно представить совершенной дизъюнктивной нормальной формой:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}, \tag{2.14}$$

где символ $\bigvee$ означает, что берется дизъюнкция по тем наборам, которые указаны под ним (в данном случае по тем наборам, на которых функция f равна 1). При $f=0$ множество конъюнкций в правой части пусто.

2.30. Доказать, что представление функции в виде СДНФ единственно. ▲

Равенство (2.14) можно записать еще так:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}, \qquad (2.15)$$

где дизъюнкция берется по всем двоичным наборам $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Однако ясно, что в дизъюнкции останутся только члены с коэффициентами 1, т. е. те конъюнкции, для которых $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)=1$.

Нам потребуется также разложение функции в СДНФ по части переменных, а именно формула

$$f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = \\ = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n; y_1, \ldots, y_m) x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}. \qquad (2.16)$$

Здесь функция f разложена в СДНФ по первым n переменным.

2.31. Доказать равносильность (2.16). ▲

2.32. Найти СДНФ для

а) функции от трех переменных, равной 1, если большинство аргументов равно 1;

б) функции от четырех переменных, равной 1, если четное число аргументов равно 1. ▲

6. Алгоритм преобразования формулы в СДНФ. Равенство (2.14) дает возможность находить СДНФ для функции по ее таблице. Однако если функция задана формулой, этот путь часто не удобен. Сейчас мы обсудим, как можно поступать в этом случае. Построение СДНФ мы разобьем на два этапа. Вначале по формулам мы построим ДНФ, а затем по ДНФ построим СДНФ. Описываемая ниже процедура является алгоритмом преобразования формулы в СДНФ.

Вообще под *алгоритмом* понимается способ решения некоторого класса задач, представляющий собой последовательность операций (одну и ту же для всех задач данного класса), которые мы по тем или иным соображениям считаем элементарными (например, умеем выполнять). Так, алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя натуральных чисел или алгоритм извлечения квадратного корня из натуральных чисел позволяют решать эти задачи путем выполнения элементарных арифметических операций в некоторой определенной последовательности. Алгоритм решения квадратного уравнения использует в качестве элементарной еще и операцию извлечения квадратного корня. Как известно, не существует алгоритма для решения алгебраических уравнений степени выше четвертой, использующего в качестве элементарных операций арифметические действия и операции извлечения корней (для 3-й и 4-й степени такие формулы известны). При программировании на вычислительных машинах роль элементарных операций играют операции, которые может выполнять машина (а иногда и задачи, для которых уже известен алгоритм — так называемые «стандартные подпрограммы»). Исследованию различных вопросов, связанных с алгоритмами (в первую очередь — получению строгого определения понятия алгоритма), посвящен раздел математической логики, носящий название «теория алгоритмов». Важнейшее место в ней занимают доказательства отсутствия алгоритмов для решения различных задач. В нашем случае элементарными операциями являются преобразования формул, использующие аксиомы (2.1) — (2.13) и их простейшие следствия.

1) Преобразуем формулу так, чтобы в ней были только операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, причем отрицания могут стоять только над аргументами.

Такого рода преобразования мы уже делали. Они используют задачу 1.13 для удаления импликации и эквивалентности и равенства (2.8), (2.9) для перенесения отрицаний (ср. задачу 2.8).

Заметим, что формулы, являющиеся ДНФ, можно охарактеризовать как формулы, содержащие только дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание, в которых отрицания стоят только над аргументами и вначале выполняются все конъюнкции, а потом дизъюнкции. Таким образом, далее нужно

2) преобразовать формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше, чем дизъюнкции.

Как мы уже отмечали, это делается при помощи дистрибутивного закона (2.6), а также его следствия, содержащегося в задаче 2.6.

2.33. Преобразовать в ДНФ следующие формулы: а) $\overline{x \vee y}$; б) $\overline{(x \vee z)(x \rightarrow y)}$; в) $(x \sim y)\overline{(z \rightarrow t)}$. ▲

Теперь преобразуем ДНФ в СДНФ.

3) Если в ДНФ имеется несколько одинаковых элементарных конъюнкций, то мы оставляем только одну.

Это преобразование приводит к равносильной формуле в силу равносильности (2.10).

4) Делаем все элементарные конъюнкции правильными путем следующих двух преобразований:

а) если в элементарную конъюнкцию входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем эту конъюнкцию из ДНФ;

б) если некоторая переменная входит в элементарную конъюнкцию несколько раз, причем или во всех случаях без отрицания, или во всех случаях под знаком отрицания, то мы оставляем только одно вхождение.

Преобразование а) приводит к равносильной формуле, так как $x\bar{x}=0$; преобразование б) — в силу (2.11).

Теперь нужно получить полные конъюнкции.

5) Если в некоторую конъюнкцию $x_1^{\sigma_1}\ldots x_k^{\sigma_k}$ не входит переменная y, то нужно рассмотреть равносильное выражение $x_1^{\sigma_1}\ldots x_k^{\sigma_k}(y\vee\bar{y})$ и вновь применить преобразование 2). Если недостающих переменных несколько, то нужно добавить несколько конъюнктивных членов вида $(y\vee\bar{y})$.

Напомним, что $y\vee\bar{y}=1$, $1x=x$. После применения преобразования 5) могут вновь появиться одинаковые конъюнкции. Поэтому

6) нужно вновь применить преобразование 3).

На этом преобразование формулы в СДНФ заканчивается. Мы не оговаривали, что всюду, конечно, надо пользоваться коммутативностью и ассоциативностью конъюнкции и дизъюнкции.

2.34. Найти СДНФ для формул задачи 2.33, а также для формул: г) $x\vee\bar{y}z$; д) $xyx\bar{z}\vee xt$; е) $x\bar{y}\vee yzt\vee\bar{x}yzt$. ▲

7. Конъюнктивные нормальные формы. Теперь мы проведем аналогичные рассмотрения для конъюнктивных нормальных форм.

Определение 2.14. Формула вида $x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n}$ называется *элементарной дизъюнкцией*.

Определение 2.15. Всякая конъюнкция элементарных дизъюнкций называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ).

2.35. Показать, что необходимым и достаточным условием тождественного равенства КНФ единице является наличие в каждой элементарной дизъюнкции некоторой переменной вместе с ее отрицанием. ▲

Определение 2.16. Элементарная дизъюнкция называется *правильной*, если в нее каждая переменная входит не более одного раза (включая ее вхождения под знаком отрицания).

Определение 2.17. Правильная элементарная конъюнкция называется *полной* относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$, если каждая из этих переменных входит в нее один и только один раз (быть может, под знаком отрицания).

Определение 2.18. *Совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ) относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется конъюнктивная нормальная форма, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все элементарные дизъюнкции правильны и полны относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$.

В силу задачи 1.21 всякую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, отличную от тождественной единицы, можно представить совершенной конъюнктивной нормальной формой:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)=0} x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}, \quad (2.17)$$

где символ $\prod$ означает, что конъюнкция берется по тем наборам, которые указаны под ним.

2.36. Доказать, что представление функции в виде СКНФ единственно. ▲

Равенство (2.17) можно переписать так:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n) \vee x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}, \quad (2.18)$$

где конъюнкция берется по всем двоичным наборам $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Функции можно раскладывать в СКНФ и по части переменных:

$$f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) =$$
$$= \prod_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n; y_1, \ldots, y_m) \vee x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}. \quad (2.19)$$

2.37. Доказать равносильность (2.19). ▲

2.38. Найти СКНФ для функций из задачи 2.32. ▲

2.39. Описать алгоритм преобразования формулы к СКНФ (аналогично п. 6). ▲

2.40. Найти СКНФ для формул а), б) задачи 2.33, а также для формул: в) $(x \vee y)(y \vee z)(z \vee t)$; г) $x\,(y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)$. ▲

8. Упрощение нормальных форм. Для упрощения ДНФ или КНФ удобно пользоваться следующими равносильностями:

$$x \vee xy = x; \tag{2.20}$$

$$x(x \vee y) = x; \tag{2.21}$$

$$x \vee \bar{x}y = x \vee y; \tag{2.22}$$

$$\bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y; \tag{2.23}$$

$$x(\bar{x} \vee y) = xy; \tag{2.24}$$

$$\bar{x}(x \vee y) = \bar{x}y. \tag{2.25}$$

Равносильности (2.20), (2.21) называются законами поглощения.

2.41. Доказать равносильности (2.20) — (2.25). ▲

2.42. Упростить формулы:

а) $xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$; б) $x \vee xy \vee yz \vee \bar{x}z$; в) $(x \vee y) \& \& \overline{(xy \vee z)} \vee \bar{z} \vee (x \vee y)\ (u \vee v)$. ▲

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 2

2.1. Число наборов $p(n)=2^n$.

2.2. Это число равно числу двоичных наборов длины 2^n, т. е. 2^{2^n}.

2.3. 2^{2^n-1}.

2.4. Определить функцию f индукцией по рангу суперпозиции $\bar{f}$.

2.5. Для доказательства достаточно доказать совпадение истинностных таблиц для формул, стоящих в левой и правой частях. Однако нет необходимости в составлении полных истинностных таблиц. Достаточно проверить совпадение множеств наборов, на которых эти формулы равны 1 (или 0).

2.6. Воспользовзться (2.6) и (2.2).

2.7. Воспользоваться (2.7) и (2.4).

2.8. Воспользоваться равносильностями (2.8), (2.9).

а) $(\bar{x} \vee \bar{y})z$; б) $x(xy \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{y}(t \vee \bar{z}))$.

2.9. $\overline{A \to B} = A\bar{B}$. Воспользоваться задачей 1.13: $A \to B = \bar{A} \vee B$ и равносильностями (2.8) и (2.1).

2.11. Выделить простые высказывания и записать это высказывание в виде формулы алгебры логики, после чего построить отрицание на основе равносильностей (2.8) и (2.9).

2.15. Можно воспользоваться известными свойствами общих делителей и кратных или вывести эти свойства непосредственно. Можно также следующим образом свести эту задачу к предыдущей.

Пусть $N = p_1^{A_1} p_2^{A_2} \ldots p_k^{A_k}$—разложение числа N на простые множители, $A_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Всякий делитель x числа N имеет вид $x = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$, где $0 \leqslant x_i \leqslant A_i$. Для каждого $i \leqslant k$

рассмотрим булеву алгебру $\mathfrak{N}_i$ натуральных чисел $0 \leqslant x_i \leqslant A_i$, рассмотренную в примере 3). Легко видеть, что если над делителями $x = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$, $y = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \ldots p_k^{y_k}$ производится одна из определенных нами операций ($\bar{x}$, xy, $x \vee y$), то над соответствующими показателями x_i, y_i производится та же операция в булевой алгебре $\mathfrak{N}_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Отсюда сразу следует, что условия (2.1)—(2.13) для множества $\mathfrak{M}_N$ делителей N выполнены и $\mathfrak{M}_N$— булева алгебра.

Мы показали здесь, что булева алгебра $\mathfrak{M}_N$ изоморфна прямому произведению булевых алгебр $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_k$ (см. определение 2.6). Если имеется несколько булевых алгебр $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_k$, то их *прямым произведением* называется множество $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \times \ldots \times \mathfrak{N}_k$, элементами которого являются наборы $(x_1, \ldots, x_k)$ по одному элементу из каждой булевой алгебры $\mathfrak{N}_i$, причем действия над наборами осуществляются поэлементно:

$$\overline{(x_1, \ldots, x_k)} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k);$$

$$(x_1, \ldots, x_k)(y_1, \ldots, y_k) = (x_1 y_1, \ldots, x_k y_k);$$

$$(x_1, \ldots, x_k) \vee (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 \vee y_1, \ldots, x_k \vee y_k).$$

Наборы из соответствующих выделенных элементов $(0, \ldots, 0)$, $(1, \ldots, 1)$ являются выделенными элементами в $\mathfrak{N}$. Очевидно, что в результате множество $\mathfrak{N}$ превращается в булеву алгебру.

2.16. Имеем

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x}, \quad \tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}, \quad \tilde{x} \vee \tilde{y} = \widetilde{x \vee y}, \quad x, y \in \mathfrak{M}_M.$$

2.17. Каждому делителю числа N ставится в соответствие множество его простых делителей.

2.18. Воспользоваться аксиомой (2.1) и законами де Моргана (2.8), (2.9).

2.19. Рассмотреть булеву алгебру из примера 3) или какую-либо ее подалгебру.

2.20. Можно, например, составить истинностные таблицы.

2.22. Воспользоваться задачей 2.19.

2.23. В одном случае достаточно рассмотреть для каждой ситуации гомоморфизм, ставящий в соответствие высказыванию значение истинности в этой ситуации (высказывания, которые не разделяются, по определению тождественны). Во втором случае каждому элементу $m \in M$ ставится в соответствии гомоморфизм: $x \Rightarrow 1$, если m принадлежит подмножеству, $x \Rightarrow 0$ — в противном случае.

2.24. Рассмотреть ограничения гомоморфизмов алгебры на ее подалгебру.

2.30. 1) Взять СДНФ в общем виде и найти наборы, на которых она равна 1.

2) Хотя указанная выше идея очень проста, мы советуем читателю обдумать еще и другой путь решения задачи. Найти общее число различных СДНФ от n переменных и сравнить это число с числом функций от n переменных. Такого рода «мощностные» рассмотрения часто бывают полезны.

2.31. Воспользоваться равносильностью (2.15).

2.36. Элементарная дизъюнкция (правильная) $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$ равна нулю лишь на наборе $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$. Можно также провести «мощностное» доказательство (см. решение задачи 2.30).

2.41. Все равносильности (2.21) — (2.25) могут быть получены при помощи дистрибутивных законов (2.6), (2.7).

2.42. Воспользоваться равносильностями (2.21) — (2.25).

Ответы: а) $xy\vee xz\vee yz$; б) $x\vee z$; в) $x\vee y\vee \bar{z}$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 2

2.1. Ответ легко «угадать» следующим образом. Для первого элемента набора α_1 имеется две возможности: 0 и 1. Для каждой из этих возможностей α_2 можно выбрать двумя способами. Итак, первые два элемента α_1, α_2 можно выбрать $2^2=4$ способами. В каждом из этих 4 случаев имеется 2 возможности для выбора α_3, т. е. элементы α_1, α_2, α_3 можно выбрать $2^3=8$ способами и т. д., n элементов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ можно выбрать 2^n способами. Строгое доказательство проводится методом математической индукции.

2.2. В истинностной таблице для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ фиксируем каким-либо способом порядок строчек, т. е. порядок наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ значений аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Тогда функции однозначно определяются своими последними столбцами, т. е. наборами из 2^n нулей и единиц (в таблице 2^n строк в силу задачи 2.1). Различных функций столько, сколько имеется различных наборов длины 2^n, т. е. 2^{2^n}.

2.3. Можно выбирать произвольно значения функции на всех наборах, кроме нулевого, т. е. на (2^n-1) наборах. Такой выбор осуществляется 2^{2^n-1} способами.

Впрочем, легко сообразить, что ровно половина всех функций сохраняет нуль, так как можно установить взаимно однозначное соответствие между функциями, сохраняющими нуль, и функциями, его не сохраняющими (брать функции, совпадающие на всех наборах, кроме нулевого).

2.4. Дадим строгое определение отображения $\tilde{f}\Rightarrow f$ *). При этом мы определим f так, что $f\in\Phi^{(k)}$, если $\tilde{f}\in\tilde{\Phi}^{(k)}$. Если $\tilde{f}\in\tilde{\Phi}$, то определение f очевидно. Пусть функции $f\in\Phi^{(k)}$ определены для всех $\tilde{f}\in\tilde{\Phi}^{(k)}$; определим f для $\tilde{f}\in\tilde{\Phi}^{(k+1)}$. Пусть $\tilde{f}\in\tilde{\Phi}^{(k+1)}$. Возможны два случая. Если $\tilde{f}$ получается из некоторой функции $\tilde{g}\in\tilde{\Phi}^{(k)}$ переименованием переменной согласно а) определения 2.3, то возьмем функцию $g\in\Phi^{(k)}$, отвечающую $\tilde{g}$ по индуктивному предположению, и проведем в ней то же переименование переменной (ведь всякую функцию можно считать зависящей от любой переменной — хотя бы фиктивно). Аналогично, если $\tilde{f}\in\tilde{\Phi}^{(k+1)}$ получается подстановкой функции $\tilde{g}\in\tilde{\Phi}^{(k)}$ вместо какой-то переменной x функции $\tilde{h}\in\tilde{\Phi}^{(k)}$ согласно б) того же определения, то возьмем функции g, $h\in\Phi^{(k)}$, построенные по предположению индукции, и подставим g вместо x в h. Полученную функцию и обозначим через f; $f\in\Phi^{(k+1)}$. Ясно также, что $\tilde{f}=f$ для $\tilde{f}\in\Phi$ и что если предположить $g=\tilde{g}$, $h=\tilde{h}$, то в обоих рассмотренных случаях $f=\tilde{f}$.

2.5. Рассмотрим для примера равносильности (2.3) и (2.7).

Докажем, что $(xy)z=x(yz)$. Найдем значения переменных, для которых левая часть равна 1. Поскольку последняя операция — конъюнк-

---

*) Мы употребляем для отображений символ $\Rightarrow$, чтобы отличить его от символа импликации $\rightarrow$ в алгебре логики.

ция, то для этого нужно, чтобы было $xy=1$, $z=1$, а значит, $(1, 1, 1)$ — единственный набор, на котором $(xy)z$ равна 1. Аналогично показывается, что и правая часть равна 1 лишь на этом иаборе.

Покажем теперь, что $x\vee yz=(x\vee y)(x\vee z)$. Найдем наборы переменных, на которых эти формулы равны 0. Рассмотрим левую часть. Поскольку последняи операция — дизъюнкция, то для этого нужно, чтобы $x=0$, $yz=0$. Последнее будет иметь место, если $y=0$ или $z=0$. В правой части последняя операция — коиъюнкция; поэтому нужно, чтобы $x\vee y$ или $x\vee z$ равнялись нулю. В первом случае должны равниться нулю x и y, во втором случае x и z. Таким образом, условия обращения в нуль левой и правой частей совпадают.

2.6. В силу (2.6) имеем $(x\vee y)(z\vee t)=(x\vee y)z\vee(x\vee y)t$. В силу коммутативности конъюнкции можно вновь применить (2.6) к $(x\vee y)z$ и $(x\vee y)t$. В силу ассоциативности дизъюнкции в получившейся формуле скобки можно опустить.

2.7. Решение аналогично решению задачи 2.6, с той лишь разницей, что вместо распределительного закона (2.6) используется закон (2.7).

2.8. а) В силу (2.8) и (2.1) имеем $\overline{xy\vee z}=\overline{xy}\,\bar z=(\bar x\vee\bar y)\bar z$.

2.10. Решение мальчика ие выполнено, если он не закончил чтеиие книги или не сходил ни в музей, ни в кино, и, хотя была хорошая погода, он ие купался.

2.11. Простые высказывания:

x: «Мальчик в воскресение закончил чтение книги»,

y: «Мальчик в воскресенье сходил в музей»,

z: «Мальчик в воскресенье сходил в кино»,

t: «Мальчик в воскресеиье пошел выкупаться на реку»,

u: «Была хорошая погода».

Вся фраза имеет вид $x(y\vee z)(u\to t)$. Отрицание ее имеет вид $\bar x\vee\bar y\bar z\vee u\bar t$. Подставляя вместо переменных имеющиеся у нас простые высказывания, мы получаем приведенный выше ответ к задаче 2.10.

2.19. В примере 3) рассмотрим подалгебру из трех элементов: $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Тогда $\overline{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}\cdot\overline{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\vee\overline{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$. Одновремеиио мы показали, что в булевой алгебре может быть элемент, совпадающий со своим отрицанием.

2.20. а) $x\setminus y$ отвечает $x\bar y$; $x\Delta y$ отвечает $x\bar y\vee\bar x y$ (т. е. альтериативная дизъюнкция $x\Delta y=\overline{x\sim y}$ (см. задачу 1.1)).

б) $(x\Delta y)\Delta z$ равно 1 тогда и только тогда, когда один и только один из аргументов x, y, z равен 1. Отсюда следует ассоциативность альтернативной дизъюнкции, а значит, и симметрической разности.

2.21. Импликации отвечает дополнение разности $x\setminus y$ до всего множества или объединеиие дополнеиия x (до всего миожества) и подмножества y; эквивалентности — дополиение симметрической разности или объединение пересечений самих миожеств (xy) и их дополнений $(\bar x\,\bar y)$; функциям Шеффера отвечает соответствеино дополнение пересечения или объедииеиие дополнений $(\overline{xy}=\bar x\vee\bar y)$ и дополиение объединения или пересечение дополнений $(\overline{x\vee y}=\bar x\bar y)$.

2.22. У алгебры, рассмотренной при решении задачи 2.19, нет ни одного гомоморфизма в алгебру $\{0, 1\}$, так как в последией $x\neq\bar x$.

2.25. Каждому элементу m регулярной алгебры $\mathfrak{M}$ ставится в соответствие подмножество множества $M(\mathfrak{M})$ ее гомоморфизмов в $\{0, 1\}$, при которых элемент m переходит в 1. Непосредствеиио проверяется, что это — гомоморфизм в алгебру подмножеств множества $M(\mathfrak{M})$. Подалгебра, в которую $\mathfrak{M}$ переходит при этом гомоморфизме, изоморфна алгебре $\mathfrak{M}$, так как различным элементам $\mathfrak{M}$ отвечают различные подмножества в силу существования разделяющих гомоморфизмов в $\{0, 1\}$.

2.27. Достаточно показать, что для любого такого подмножества M' гомоморфизмов булевы операции те же, что и для $M(\mathfrak{M})$. Это следует из того, что значение любого гомоморфизма $\varphi \in M(\mathfrak{M})$ на произвольном элементе $x \in \mathfrak{M}$ однозначно определяется значениями гомоморфизмов $\psi \in M'$ на этом элементе (этими значениями однозначно характеризуется сам элемент x, ср. решение задачи 2.25).

2.28. Достаточность условия следует из того, что функция $x\bar{x}$ тождественно равна нулю; поэтому все элементарные конъюнкции, а значит, и вся ДНФ равны тождественно нулю.

Докажем необходимость. Пусть $x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$—элементарная конъюнкция, в которую никакая переменная не входит вместе со своим отрицанием. Тогда можно рассмотреть набор значений переменных $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, ибо хотя среди переменных могут быть совпадающие, одна и та же переменная или всюду входит сама, или всюду стоит ее отрицание. На этом наборе рассматриваемая элементарная конъюнкция равна 1, а значит, и вся ДНФ равна 1 (так как если в дизъюнкции один член равен 1, то и вся дизъюнкция равна 1).

2.29. а) и г); в б) переменная x_1 входит один раз сама, другой раз под знаком отрицания; в в) переменная x_2 входит трижды: два раза сама и один раз с отрицанием.

2.30. П е р в о е р е ш е н и е. Полная правильная элементарная конъюнкция $x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$ равна 1 на единственном наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Дизъюнкция нескольких таких конъюнкций равна 1 на тех и только тех наборах $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, которые являются наборами показателей входящих в нее элементарных конъюнкций. Поэтому разложение (2.14) — единственно возможное, и разным СДНФ соответствуют разные функции.

В т о р о е р е ш е н и е. Найдем число СДНФ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Каким-либо образом занумеруем полные правильные элементарные конъюнкции $x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$. Их будет столько, сколько имеется двоичных наборов из n элементов, т. е. 2^n (задача 2.1). Каждой СДНФ от $x_1, \ldots, x_n$ можно следующим взаимно однозначным образом поставить в соответствие набор из 2^n нулей и единиц, отличный от нулевого. На местах с номерами конъюнкций, входящих в СДНФ, поставим единицы, на остальных — нули. Нулевой набор при этом не получается, так как он соответствовал бы пустой СДНФ. Итак, различных СДНФ будет столько, сколько существует наборов длины 2^n, отличных от нулевого, т. е. $2^{2^n}-1$.

Функций от $x_1, \ldots, x_n$, отличных от тождественного нуля, также $2^{2^n}-1$, а так как каждая из этих функций может быть представлена СДНФ, то представление единственно. Это простое комбинаторное соображение можно продумать на следующей схеме. Имеется N ящиков и N шаров. В каждом ящике лежит по крайней мере один шар. Тогда в каждом ящике лежит в точности один шар. Доказательство этого утверждения совершенно очевидно. В нашем случае роль ящиков играют функции алгебры логики, роль шаров — СДНФ. Мы будем пользоваться этой идеей и в дальнейшем.

2.31. Для доказательства равносильности (2.16) нужно доказать совпадение значений левой и правой части при любой фиксации переменных $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_m$. Вначале зафиксируем значения

$y_1, \ldots, y_m$. Тогда совпадание значений при фиксации оставшихся переменных следует из равносильности (2.15).

Можно было бы также разложить f по всем перемеиным, а затем, используя дистрибутивный закон, произвести перегруппировку членов.

2.32. а) $xyz \vee xy\bar z \vee x\bar y z \vee \bar x yz$;

б) $xyzt \vee xy\bar z\bar t \vee x\bar y\bar z t \vee \bar x\bar y zt \vee \bar x y\bar z t \vee \bar x yz\bar t \vee x\bar y z\bar t \vee \bar x\bar y\bar z\bar t$.

2.33. а) $x \vee y$ — ДНФ.

б) Применяя процедуру 1), получаем $\bar x\bar z(\bar x \vee y)$. Теперь, применяя равносильность (2.6), получаем:

$$\bar x\bar z\bar x \vee \bar x\bar z y.$$

в) На первом шаге получаем $(\bar x \vee y)(x \vee \bar y)z\bar t$. Теперь, применяя (2.6) и задачу 2.6, получаем:

$$\bar x x z\bar t \vee \bar x\bar y z\bar t \vee yxz\bar t \vee y\bar y z\bar t.$$

2.34. а) В ДНФ $x \vee y$ все элементарные конъюнкции правильны, поэтому сразу применяем правило 5): $x(y \vee \bar y) \vee y(x \vee \bar x)$. Далее получаем $xy \vee x\bar y \vee xy \vee \bar x y$. Теперь из двух одинаковых конъюнкций xy нужно оставить одну: $xy \vee x\bar y \vee \bar x y$.

б) Начинаем с правила 4): $\bar x z \vee \bar x y\bar z$. Первая конъюнкция неправильна: $\bar x z(y \vee \bar y) \vee \bar x y\bar z = \bar x yz \vee \bar x\bar y z \vee \bar x y\bar z$. Эта формула является СДНФ.

в) По правилу 4) получаем ДНФ: $\bar x\bar y z\bar t \vee xyz\bar t$. Эта формула уже является СДНФ.

г) $x \vee yz = x(y \vee \bar y)(z \vee \bar z) \vee (x \vee \bar x)yz = xyz \vee x\bar y z \vee xy\bar z \vee x\bar y\bar z \vee xyz \vee$ $\vee \bar x yz = xyz \vee x\bar y z \vee xy\bar z \vee x\bar y\bar z \vee \bar x yz$.

д) $xy\bar x z \vee xt = xt = x(y \vee \bar y)(z \vee \bar z)t = xyzt \vee x\bar y zt \vee xy\bar z t \vee x\bar y\bar z t$.

е) $x\bar y \vee yzt \vee \bar x yzt = x\bar y(z \vee \bar z)(t \vee \bar t) \vee (x \vee \bar x)yzt \vee \bar x yzt = x\bar y zt \vee x\bar y\bar z t \vee$ $\vee x\bar y z\bar t \vee x\bar y\bar z\bar t \vee xyzt \vee \bar x yzt$.

2.38. а) $(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar z)(x \vee \bar y \vee z)(\bar x \vee y \vee z)$.

б) $(\bar x \vee y \vee z \vee t)(x \vee \bar y \vee z \vee t)(x \vee y \vee \bar z \vee t)(x \vee y \vee z \vee \bar t)(x \vee \bar y \vee \bar z \vee \bar t)$ & & $(\bar x \vee y \vee \bar z \vee \bar t)(\bar x \vee \bar y \vee z \vee \bar t)(\bar x \vee \bar y \vee \bar z \vee t)$.

2.39. 1) Перейти к равносильной формуле, в которой имеются только операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, причем отрицания стоят только над аргументами.

2) Преобразовать получившуюся формулу так, чтобы вначале выполнялись все дизъюнкции (использовать дистрибутивный закон (2.7) и задачу 2.7).

В результате мы получаем КНФ.

3) Если имеется несколько одинаковых элементарных дизъюнкций, то мы оставляем только одну.

В силу (2.11) мы получаем равносильную формулу.

4) Преобразуем все элементарные дизъюнкции в правильные следующим образом:

а) Удаляем элементарные дизъюнкции, в которые какая-либо переменная входит вместе со своим отрицанием.

б) Если в элементарную дизъюнкцию некоторая переменная входит несколько раз одинаковым образом (или во всех случаях с отрицанием, или во всех случаях без него), то мы оставляем только одно вхождение.

Мы используем в а) соотношение $x\vee\bar{x}=1$, в б) — соотношение (2.10).

б) Если в элементарную дизъюнкцию $x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_k^{\sigma_k}$ не входит некоторая переменная y, то мы добавляем дизъюнктивно член $y\bar{y}$: $x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_k^{\sigma_k}\vee y\bar{y}$; затем вновь применяем преобразование 2). Мы воспользовались здесь тем, что $y\bar{y}=0$, и соотношением (2.13).

6) Вновь применяем преобразование 3).

2.40. а) $x\vee y$ — СКНФ.

б) Как и при решении задачи 2.33 вначале получаем $\bar{x}\bar{z}(\bar{x}\vee y)$. Это уже КНФ. Теперь будем строить СКНФ:

$$\bar{x}\bar{z}(\bar{x}\vee y)=(\bar{x}\vee y\bar{y}\vee z\bar{z})(x\bar{x}\vee y\bar{y}\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee z\bar{z})=$$
$$=(\bar{x}\vee y\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})(x\vee y\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})\ \&$$
$$\&\ (x\vee\bar{y}\vee\bar{z})(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee z)(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})=$$
$$=(\bar{x}\vee y\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})(x\vee y\vee\bar{z})(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}).$$

в) $(x\vee y)(y\vee z)(z\vee t)=(x\vee y\vee z\bar{z}\vee t\bar{t})(x\bar{x}\vee y\vee z\vee t\bar{t})\ \&$
$\&\ (x\bar{x}\vee y\bar{y}\vee z\vee t)=(x\vee y\vee z\vee t)(x\vee y\vee\bar{z}\vee t)(x\vee y\vee z\vee\bar{t})\ \&$
$\&\ (x\vee y\vee\bar{z}\vee\bar{t})(x\vee y\vee z\vee t)(\bar{x}\vee y\vee z\vee t)(x\vee y\vee z\vee\bar{t})\ \&$
$\&\ (\bar{x}\vee y\vee z\vee\bar{t})(x\vee y\vee z\vee t)(\bar{x}\vee y\vee z\vee t)(x\vee\bar{y}\vee z\vee t)\ \&$
$\&\ (\bar{x}\vee\bar{y}\vee z\vee t)=(x\vee y\vee z\vee t)(x\vee y\vee\bar{z}\vee t)(x\vee y\vee z\vee\bar{t})\ \&$
$\&\ (x\vee y\vee\bar{z}\vee\bar{t})(\bar{x}\vee y\vee z\vee t)(\bar{x}\vee y\vee z\vee\bar{t})(x\vee\bar{y}\vee z\vee t)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z\vee t)$.

г) $x(y\vee\bar{z})(x\vee y\vee z)=(x\vee y\bar{y}\vee z\bar{z})(x\bar{x}\vee y\vee\bar{z})(x\vee y\vee z)=$
$=(x\vee y\vee z)(x\vee\bar{y}\vee z)(x\vee y\vee\bar{z})(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})(x\vee y\vee\bar{z})\ \&$
$\&\ (\bar{x}\vee y\vee\bar{z})(x\vee y\vee z)=(x\vee y\vee z)(x\vee\bar{y}\vee z)(x\vee y\vee\bar{z})\ \&$
$\&\ (x\vee\bar{y}\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})$.

2.41. (2.20): $x\vee xy=1$ тогда и только тогда, когда $x=1$, так как если $xy=1$, то $x=1$.

2.42. а) $xyz\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\vee\bar{x}yz=xy(z\vee\bar{z})\vee x\bar{y}z\vee\bar{x}yz=$
$=xy\vee x\bar{y}z\vee\bar{x}yz=x(y\vee\bar{y}z)\vee\bar{x}yz=xy\vee xz\vee\bar{x}yz=$
$=xy\vee z(x\vee\bar{x}y)=xy\vee xz\vee yz$.

б) $x\vee xy\vee yz\vee\bar{x}z=x\vee yz\vee\bar{x}z=x\vee z\vee yz=x\vee z$.

в) $(x\vee y)(\bar{x}\bar{y}\vee z)\vee\bar{z}\vee(x\vee y)(u\vee v)=(x\vee y)(\overline{x\vee y}\vee z)\vee$
$\vee\bar{z}\vee(x\vee y)(u\vee v)=(x\vee y)z\vee\bar{z}\vee(x\vee y)(u\vee v)=(x\vee y)\vee\bar{z}\vee$
$\vee(x\vee y)(u\vee v)=x\vee y\vee\bar{z}$.

§ 3. ЗАКОН ДВОЙСТВЕННОСТИ В АЛГЕБРЕ ЛОГИКИ

Мы говорили в конце п. 3 § 2 о двойственности, имеющейся в аксиоматике булевых алгебр, которая проявляется в том, что на множестве $\mathfrak{M}$, наделенном структурой булевой алгебры, можно ввести также структуру двойственной булевой алгебры $\mathfrak{M}^+$. Между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^+$ имеется так называемый канонический изоморфизм, причем 0 и 1 в одной алгебре отвечают соответственно 1 и 0 в другой, а дизъюнкции (конъюнкции) в одной соответствует конъюнкция (дизъюнкция) в другой. В этом параграфе мы выясним, как ведут себя булевы операции на регулярных булевых алгебрах при изоморфизме $\mathfrak{M} \Rightarrow \mathfrak{M}^+$ (п. 4 § 2).

3.1. Доказать, что булева алгебра $\mathfrak{M}^+$, двойственная регулярной булевой алгебре $\mathfrak{M}$, регулярна. ▲

Пользуясь соответствием между булевыми операциями и функциями алгебры логики, можно ограничиться рассмотрением последних, т. е. случаем двухэлементной алгебры $\{0,1\}$.

Основным в этом параграфе будет понятие двойственных функций. Двойственная функция получается из исходной при замене значений всех переменных на противоположные, т. е. всюду в истинностной таблице нужно заменить 0 на 1, а 1 на 0:

Определение 3.1. *Функция* $f^+(x_1, \ldots, x_n)$, *двойственная* к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, определяется равенством:

$$f^+(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}.$$

Определение 3.2. Функция, равносильная своей двойственной, т. е. такая, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f^+(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)},$$

называется *самодвойственной*.

Итак, самодвойственная функция принимает на противоположных наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n})$ противоположные значения.

3.2. Построить функции, двойственные следующим функциям:

а) основным логическим операциям и константам 0,1;

б) функции от пяти переменных, равной 1, если четное число переменных равно 1;

в) аналогичной функции от шести переменных.

Какие из этих функций являются самодвойственными? ▲

3.3. Показать, что функция $xy \vee xz \vee yz$ является самодвойственной. ▲

3.4. Найти все самодвойственные функции от двух переменных. ▲

3.5. Сколько имеется самодвойственных функций от n переменных? ▲

3.6. Дать определение несамодвойственной функций *). ▲

Теперь мы сформулируем

Закон двойственности. *Функция, двойственная суперпозиции некоторых функций, равносильна соответствующей* **) *суперпозиции двойственных функций* (см. определение 2.3).

3.7. Доказать закон двойственности. ▲

Из закона двойственности следует, что *суперпозиция самодвойственных функций самодвойственна.*

Закон двойственности удобен при нахождении двойственных функций для функций, представленных формулами. Можно, конечно, воспользоваться определением двойственной функции и поставить отрицания над аргументами и над всей формулой. Однако при этом из формулы, содержащей только дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, у которой отрицания стоят только над аргументами, получается формула, не обладающая этим свойством. Если же строить двойственную функцию при помощи закона двойст-

---

*) В этой задаче, как и во всех последующих задачах такого рода, имеется в виду определение, в котором отрицания входят лишь в простые высказывания.

**) Точное определение «соответствующей суперпозиции» дается по индукции (см. решение задачи 3.7).

венности (заменить операции на двойственные, а именно, конъюнкции дизъюнкциями и наоборот *)), то указанное свойство сохраняется.

3.8. Для функций, двойственных указанным ниже, построить представления формулами, у которых отрицания стоят только над аргументами: а) $(\overline{x}\vee\overline{y}z)(xy\vee x\overline{z})$; б) $(x\vee\overline{y})z\overline{t}\vee\overline{x}t$. ▲

Итак, если у нас имеется формула, содержащая только конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, то, заменяя всюду конъюнкции дизъюнкциями и наоборот, мы придем к формуле, двойственной исходной. При применении этой процедуры к равносильным формулам мы получаем равносильные формулы (непосредственно из определений следует, что функции, двойственные равносильным функциям, равносильны). Часто под законом двойственности подразумевается именно это следствие из него. Оно действительно очень важно и при его помощи можно из одних утверждений алгебры логики получать другие. Например, из равносильностей (2.2), (2.3), (2.6), (2.8), (2.10), (2.20), (2.22), (2.23) таким образом получаются (2.4), (2.5), (2.7), (2.9), (2.11), (2.21), (2.24), (2.25), утверждение задачи 2.7 получается из задачи 2.6. Таким же образом можно из свойств ДНФ и СДНФ получать свойства КНФ и СКНФ.

3.9. Исходя из возможности разложить всякую функцию f, отличную от тождественного нуля, в СДНФ (2.14), показать возможность разложения всякой функции φ, отличной от тождественной единицы, в СКНФ (2.18). Аналогично из (2.15) получить (2.19). ▲

Нам потребуются в дальнейшем некоторые результаты о несамодвойственных функциях.

3.10. Дана произвольная несамодвойственная функция. Отождествить у нее переменные так, чтобы получилась несамодвойственная функция от возможно меньшего числа переменных. Каким может быть это число? ▲

3.11. Доказать, что из произвольной несамодвойственной функции и отрицания суперпозицией можно получить константы 0 и 1. ▲

---

*) См. решение задачи 3.2 (напомним, что $(\overline{x})^+=\overline{x}$).

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 3

3.1. Гомоморфизмы $\mathfrak{M}^+$ в $\{0, 1\}$ получаются композицией канонического изоморфизма $\mathfrak{M}^+$ в $\mathfrak{M}$ и гомоморфизмов $\mathfrak{M}$ в $\{0, 1\}$ (т. е. сначала $\mathfrak{M}^+$ изоморфно отображается в $\mathfrak{M}$, а потом $\mathfrak{M}$ гомоморфно отображается в $\{0,1\}$). Непосредственно проверяется, что они разделяют элементы $\mathfrak{M}^+$, если этим свойством обладают гомоморфизмы $\mathfrak{M}$ в $\{0, 1\}$.

3.5. Самодвойственная функция определяется своими значениями на множестве наборов, содержащем по одному из каждой пары двойственных наборов (на противоположном наборе функция должна принимать противоположное значение).

3.10. Всегда можно получить несамодвойственную функцию от двух переменных. Дальнейшее уменьшение числа переменных, вообще говоря, невозможно.

3.11. Можно ограничиться случаем двух переменных.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 3

3.2. а) $0^+=1$ (поскольку функция ни от каких аргументов не зависит существенно, надо поставить отрицание лишь на значение функции); $1^+=0$; $(\bar{x})^+=\bar{\bar{\bar{x}}}=\bar{x}$, т. е. $\bar{x}$—самодвойственная функция; $(xy)^+=x \vee y$ (см. (2.9)); $(x \vee y)^+=xy$ (см. (2.10)); $(x \to y)^+=\overline{x \vee \bar{y}}=\overline{y \to x}$; $(x - y)^+=\overline{x \sim y}$.

б), в) Функции, равные 0, если четное число переменных равно 0. В примере б) это та же функция, что и исходная, т. е. данная функция самодвойственна.

3.3. $(xy \vee yz \vee xz)^+=\overline{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}}=\overline{\bar{x}\bar{y}}\;\overline{\bar{y}\bar{z}}\;\overline{\bar{x}\bar{z}}=(x \vee y)\ (y \vee z)\ \&$ $\& (x \vee z)=xy \vee yz \vee xz$. Мы воспользовались равенством (2.21).

3.4. x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$, т. е. все самодвойственные функции от двух переменных существенно зависят от одной переменной.

3.5. $2^{2^{n-1}}$. Множество наборов, значения на которых определяют самодвойственную функцию, содержит 2^{n-1} элементов (половина всех наборов). Далее применяется уже использовавшийся ранее способ подсчета числа функций (см. задачу 2.3).

3.6. Функция является несамодвойственной, если существует такой набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=f(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$.

3.7. Одновременно с решением этой задачи придадим точный смысл словам «соответствующая суперпозиция двойственных функций». Пусть мы рассматриваем суперпозиции функций из системы Φ. Функциям $\varphi \in \Phi$ ставим в соответствие двойственные функции φ^+ (их совокупность обозначим через Φ^+). Для них утверждение закона двойственности тавтологично. Пусть для суперпозиций ранга k из системы Φ определены соответствующие суперпозиции $\tilde{\varphi} \in \Phi^{+(k)}$ системы двойственных функций Φ^+ и доказана справедливость для них закона двойственности, т. е. $\tilde{\varphi}=\varphi^+$ при $\varphi \in \Phi^{(k)}$. Тогда суперпозициям

$$F_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)=\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n);$$

$$F_2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n; \ y_1, \ldots, y_l)=$$
$$=\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, \psi(y_1, \ldots, y_l), x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $\psi(y_1, \ldots, y_l) \in \Phi^{(k)}$, ставим в соответствие суперпозиции

$$\tilde{F}_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \tilde{\varphi}(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n);$$
$$\tilde{F}_2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_l) =$$
$$= \tilde{\varphi}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \tilde{\psi}(y_1, \ldots, y_l), x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi} \in \Phi^{+(k)}$ — соответствующие φ и ψ суперпозиции функций из Φ^+ (уже построенные по предположению индукции). Нужное определение дано, остается проверить справедливость закона двойственности. По индуктивному предположению $\tilde{\varphi} = \varphi^+$, $\tilde{\psi} = \psi^+$. Надо показать, что $F_1^+ = \tilde{F}_1$, $F_2^+ = \tilde{F}_2$. В силу определения 3.1 и индуктивного предположения

$$F_1^+(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= \overline{\varphi(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{i-1}}, \overline{y}, \overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_n})} =$$
$$= \varphi^+(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= \tilde{F}_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n);$$
$$F_2^+(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_l) =$$
$$= \overline{\varphi(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{i-1}}, \psi(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_l}), \overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{y_n})} =$$
$$= \overline{\varphi(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{i-1}}, \overline{\psi^+(y_1, \ldots, y_l)}, \overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_n})} =$$
$$= \varphi^+(x_1, \ldots, x_{i-1}, \psi^+(y_1, \ldots, y_l), x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= \tilde{\varphi}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \tilde{\psi}(y_1, \ldots, y_l), x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= \tilde{F}_2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_l).$$

3.8. Заменяем конъюнкции дизъюнкциями и наоборот. а) $\overline{x}(y \vee \overline{z}) \vee \vee (x \vee \overline{y})(x \vee \overline{z})$; б) $(x\overline{y} \vee z \vee \overline{t})(x \vee t)$.

3.9. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ не равна тождественно 1. Рассмотрим $f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^+(x_1, \ldots, x_n)$. Имеем: f не равна тождественно нулю. Представим $f(x_1, \ldots, x_n)$ в СДНФ (2.14). Перейдем в левой части к двойственной функции, а в правой части заменим все конъюнкции дизъюнкциями и наоборот. Получаем:

$$f^+(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \prod_{f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} = \prod_{\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0} x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}.$$

Мы получим представление φ в СКНФ.

Аналогично осуществляется переход от (2.15) к (2.19).

3.10. В решении задачи 3.6 дано определение несамодвойственной функции. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — такая функция и для набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}).$$

Разобьем переменные $x_1, \ldots, x_n$ на две группы. В первую включим те переменные x_i, для которых $\alpha_i = 1$, в другую — все остальные переменные (для них $\alpha_i = 0$). Отождествим между собой все переменные первой группы (переименуем их в y_1), а также все переменные второй группы (подставим вместо них y_2). Получим функцию от двух переменных $\varphi(y_1, y_2)$ (она может оказаться функцией от одной переменной, если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — единичный или нулевой набор).

Ясно, что

$$\varphi(1, 0) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n); \quad \varphi(0, 1) = f(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}).$$

Поэтому

$$\varphi(0, 1) = \varphi(1, 0),$$

а значит, $\varphi(y_1, y_2)$ — несамодвойственная функция.

Может оказаться, что дальнейшее отождествление переменных с сохранением несамодвойственности невозможно. Например, xy — несамодвойственная функция, а единственно возможное отождествление переменных приводит к самодвойственной функции x.

3.11. Заметим, что все несамодвойственные функции от одной переменной являются константами. В силу предыдущей задачи можно ограничиться случаем функций $\varphi(x, y)$ от двух переменных.

Пусть

$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\overline{\alpha}, \overline{\beta}).$$

Тогда рассмотрим функцию

$$\psi(x, y) = \varphi(x^{\alpha}, y^{\beta}).$$

Эта функция является суперпозицией $\varphi(x, y)$ и $\overline{x}$. Поскольку $\alpha^{\alpha} = \beta^{\beta} = 1$,

$$\psi(1, 1) = \psi(0, 0).$$

Отождествим у $\psi(x, y)$ переменные x, y: $\tau(x) = \psi(x, x)$. Имеем $\tau(1) = \tau(0)$, т. е. $\tau(x)$ — константа. Подставляя эту константу в $\overline{x}$, получаем другую константу. Итак, мы представили в виде суперпозиции $\varphi(x, y)$ и $\overline{x}$ обе константы 0 и 1. Напомним, что константы являются несамодвойственными функциями.

§ 4. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В АЛГЕБРЕ ЛОГИКИ

Конъюнкция xy в булевой алгебре $\{0, 1\}$ совпадает с арифметической операцией умножения над числами 0, 1. Обычное арифметическое сложение выводит за пределы множества $\{0, 1\}$, однако можно рассмотреть сложение по модулю 2. В результате возникает функция алгебры логики, которую мы будем обозначать через $x+y$ (не указывая, что сложение проводится по модулю 2, ибо у нас будет встречаться только это сложение), задаваемая таблицей

x	y	$x+y$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Заметим, что $x+y=\overline{x\sim y}=x\Delta y$ *). Для введенного сложения и умножения (конъюнкции) имеют место все основные арифметические законы: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность умножения относительно сложения. Поэтому мы, специально не оговаривая этого, будем использовать все обычные упрощения в записи арифметических выражений.

---

*) В теории множеств арифметнческому сложению соответствует снмметрнческая разность (задача 2.20). Мы уже отмечали ассоцнативность снмметрической разности (задача 2.20,б)); ее коммутативность очевидна. Советуем продумать еще доказательство дистрибутивности пересечения относительно снмметрнческой разиости.

4.1. Представить $x+y$ в виде СДНФ, СКНФ; найти $(x+y)^+$. ▲

Суперпозиции функций xy, $x+y$ и констант в силу сделанного выше замечания можно считать «полиномами».

4.2. Доказать, что всякая функция алгебры логики может быть представлена арифметическим полиномом (по модулю 2). ▲

Выберем канонический вид полинома. В силу (2.11) $x^n=x$ при $n\geqslant 1$; далее, $x+x=0$.

Определение 4.1. *Полиномом Жегалкина* называется полином, являющийся суммой константы и различных одночленов, в которые все переменные входят не выше, чем в первой степени:

$$\sum x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} + a,$$

причем в каждом наборе $(i_1, \ldots, i_k)$ все i_j различны, а суммирование ведется по некоторому множеству таких не совпадающих наборов.

Нам удобно включить формально в число одночленов и константы.

Возможность преобразования произвольного арифметического полинома в полином Жегалкина следует из замечаний, приведенных перед определением.

4.3. Представить полиномами Жегалкина: а) основные логические операции; б) $x\vee y\vee z$; в) $xy\vee yz\vee xz$; г) $xy\bar{z}\vee \bar{x}yz\vee x\bar{y}z\vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$. ▲

4.4. Доказать, что представление функций полиномами Жегалкина единственно. ▲

Определение 4.2. Функции вида $x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_k}+a$, где a — константа, называются *линейными*.

Линейные функции можно записывать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0, \qquad (4.1)$$

где a_i, a_0 равны нулю или единице.

4.5. Сколько имеется линейных функций от n переменных? ▲

Заметим, что всякая функция от одной переменной линейна.

4.6. Какие из линейных функций являются самодвойственными? ▲

Замечание. Для доказательства нелинейности функции достаточно показать, что в представляющем ее полиноме Жегалкина есть член выше первой степени. При этом существенна единственность представления функций в виде полинома Жегалкина. Именно, непосредственно строя отрицание высказывания, приведенного в определении 4.2, мы получаем, что для доказательства нелинейности функции нужно доказать, что она не может быть представлена в виде (4.1), а это следует из нелинейности ее полинома Жегалкина в силу его единственности (так как (4.1) — полином Жегалкина).

4.7. Какие из функций задачи 4.3 линейны? ▲

4.8. Доказать, что функция, представленная полиномом Жегалкина, существенно зависит от всех входящих в него переменных. ▲

4.9. Показать, что следующее определение линейной функции эквивалентно принятому выше. Функция линейна тогда и только тогда, когда она после любой фиксации переменных продолжает существенно зависеть от всех незафиксированных переменных (см. задачи 1.9, 1.10). ▲

4.10. Дана произвольная нелинейная функция. Нелинейную функцию от какого минимального числа переменных можно получить, отождествляя переменные данной функции? ▲

4.11. Нелинейную функцию от какого минимального числа переменных можно получить, строя суперпозиции произвольной нелинейной функции и одной из констант? ▲

4.12. Имеется какая-то одна нелинейная функция от двух переменных и отрицание. Доказать, что суперпозициями из них можно получить все нелинейные функции от двух переменных. ▲

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 4

4.3. В б), в), г) использовать а); в в) можно упростить выкладки, используя б); в г) удобно использовать представления $x+y$ и $x+y+1$ в СДНФ.

4.4. Первая возможность. Достаточно доказать, что полином Жегалкина, содержащий хотя бы один одночлен, отличный от константы 0, не равен тождественно нулю. Показать, что в таком полиноме не может быть членов первой степени; подставив затем вместо некоторых переменных константы так, чтобы полином превратился в конъюнкцию или ее отрицание, мы придем к противоречию.

Вторая возможность. Та же идея, что и при доказательстве единственности представления функции в СДНФ (задача 2.30): найти число различных полиномов Жегалкина от n переменных и сравнить с числом функций от n переменных.

4.5. 2^{n+1}.

4.6. Функции, у которых нечетное число коэффициентов a_i $(i \neq 0)$ равно единице.

4.10. Можно получить нелинейную функцию от трех переменных и, вообще говоря, нельзя от двух (привести пример). При доказательстве удобно использовать уже применявшуюся при решении предыдущих задач группировку членов полинома Жегалкина относительно какой-либо переменной (задачи 4.8, 4.9).

4.11. Можно получить нелинейную функцию от двух переменных.

4.12. Записать общий вид нелинейной функции от двух переменных. Получить из нее при помощи отрицания, например, конъюнкцию.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 4

4.1. $x+y=x\bar{y}\vee\bar{x}y=(x\vee y)(\bar{x}\vee\bar{y})$; $(x+y)^{+}=x+y+1$.

4.2. Достаточно выразить при помощи арифметических операций конъюнкцию и отрицание (задача 1.14). Но xy сама является арифметической операцией, а $\bar{x}=x+1$.

4.3. а) $xy=xy$; $x\vee y=\overline{\bar{x}\bar{y}}=(x+1)(y+1)+1=xy+x+y+1+1=$ $=xy+x+y$, $\bar{x}=x+1$; $x\rightarrow y=\bar{x}\vee y=(x+1)y+(x+1)+y=xy+$ $+y+x+1+y=xy+x+1$; $x\sim y=x+y+1$.

б) $$x\vee y\vee z=(xy+x+y)\vee z=(xy+x+y)z+xy+x+y+z=$$
$$=xyz+xy+xz+yz+x+y+z.$$

в) Используем предыдущий пример:
$$xy\vee yz\vee xz=x^2y^2z^2+xy^2z+x^2yz+xyz^2+xy+yz+xz=4xyz+xy+$$
$$+yz+xz=xy+yz+xz.$$

г) Заметим, что $x\bar{y}\vee\bar{x}y=x+y$ (задача 4.1). Аналогично, $xy\vee\bar{x}\bar{y}=$ $=x+y+1=\overline{x+y}$. Тогда
$$xy\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee\bar{x}yz\vee\bar{x}\bar{y}\bar{z}=z(x\bar{y}\vee\bar{x}y)\vee\bar{z}(xy\vee\bar{x}\bar{y})=z(x+y)\vee\bar{z}\,\overline{(x+y)}=$$
$$=x+y+z+1.$$

4.4. Первое решение. Если бы некоторая функция была двумя различными способами представлена полиномами Жегалкина, то, приравнивая эти полиномы и перенося одночлены в одну часть (учитывая, что $-x=x$, так как $x+x=0$), мы получили бы нетривиальный полином Жегалкина, равный тождественно нулю. Итак, вопрос сводится к единственности представления тождественного нуля полиномом Жегалкина.

Предположим, что некоторый полином Жегалкина равен тождественно нулю. Если функция равна тождественно нулю, то она сохраняет это свойство при любом замещении некоторых переменных константами. Пусть в полиноме имеется член первой степени x_i. Подставим вместо всех переменных, кроме x_i, нули. Получится x_i+a, где a — константа. Эта функция не является тождественным нулем, поэтому исходный полином не был тождественным нулем. Итак, в рассматриваемом полиноме нет членов первой степени. Возьмем какой-либо одночлен минимальной степени (их может быть несколько), для определенности, $x_1\ x_2 \ldots x_k$ (этого можно добиться переименованием переменных). Подставим вместо всех остальных переменных нули. Все одночлены, кроме выделенного, будут содержать, по крайней мере, одну из этих переменных, а потому обратятся в нуль. В результате получится полином $x_1 \ldots x_k + a$, не равный тождественно нулю. Итак, в исходном полиноме не могло быть одночленов выше нулевой степени.

В т о р о е р е ш е н и е. Найдем число полиномов Жегалкина от n переменных. Вначале подсчитаем число одночленов. Поставим в соответствие каждому одночлену двоичный набор длины n, в котором единицы стоят на тех местах, которые соответствуют номерам переменных, входящих в одночлен. Нулевой набор поставим в соответствие константе 1. Возникающее соответствие взаимно однозначно. Поэтому различных одночленов (включая 1) имеется 2^n. Занумеруем каким-либо образом одночлены. Полиномам Жегалкина поставим в соответствие наборы длины 2^n, в которых единицами отмечены номера одночленов, содержащихся в полиноме. Поэтому число различных полиномов Жегалкина (включая нулевой) равно 2^{2^n}. Так как всякая функция алгебры логики может быть представлена полиномом Жегалкина, а различных функций имеется 2^{2^n} (задача 2.2), то представление единственио (ср. второе решение задачи 2.30).

4.5. Лннейная функция определяется значениями коэффициентов a_i и свободным членом a_0, т. е. двоичным набором длины $(n+1)$. Поэтому число линейных функций равно 2^{n+1}.

4.7. $\bar{x}$, $x \sim y$, $xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

4.8. Пусть x_1 — такая переменная. Сгруппируем члены, в которые входит x_1, и вынесем x_1. Получаем

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1\varphi(x_2, \ldots, x_n) + \psi(x_2, \ldots, x_n)\ ^{*}),$$

где функция φ не равна тождественно нулю, так как в противном случае (в силу единственности полинома Жегалкина) x_1 не входила бы в полином для f. Возьмем значения переменных $x_2, \ldots, x_n$, на которых φ равна 1. Тогда значение f будет зависеть от значения x_1.

4.9. Пусть мы имеем линейную функцию (4.1). Переменные, стоящие в (4.1) с коэффициентами 1, являются в силу задачи 4.8 существенными. Если зафиксировать какие-либо переменные, то получится линейная функция, в которую не зафиксированные переменные будут входнть с теми же коэффициентами, что и в исходную функцию. Значит, существенные переменные останутся существенными, и необходимость доказаиа.

Теперь докажем достаточность. Пусть f — нелинейная функция; рассмотрим ее полином Жегалкина, и пусть x_1 — переменная, входящая в какой-либо член выше первой степени. Рассмотрим то же представление, что и в предыдущей задаче. Функция φ в нем не равна тождественно ни нулю, ни единице (иначе переменная x_1 не входила бы в члены выше первой степени). Подставим вместо $x_2, \ldots, x_n$ какой-либо набор, на котором функция φ равна нулю. В результате получнтся константа, которая будет фиктивно зависеть от x_1, хотя f зависела от x_1 существенно (задача 4.8).

---

*) Это разложение можно рассматривать как полином Жегалкина по переменной x_1 (с коэффициентами, зависящими от остальных переменных).

4.10. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — нелинейная функция, и пусть для определенности переменная x_1 входит в какой-либо одночлен выше первой степени ее полинома Жегалкина. Как и в задачах 4.8 и 4.9, рассмотрим разложение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1\varphi(x_2, \ldots, x_n) + \psi(x_2, \ldots, x_n).$$

Функция φ не равна тождественно ни нулю, ни единице (см. решение задачи 4.9). Обозначим через a значение φ на нулевом наборе: $\varphi(0, \ldots ,0) = a$. В силу сказанного выше найдется набор $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, на котором φ принимает другое значение: $\varphi(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \bar{a}$. Разобьем переменные $x_2, \ldots, x_n$ на две группы. В первую включим те переменные, для которых $\alpha_i = 0$, во вторую — те переменные, для которых $\alpha_i = 1$. Отождествим переменные в каждой из этих групп. Получим функцию $\bar\varphi(y_1, y_2)$ такую, что $\bar\varphi(0, 0) = a$, $\bar\varphi(0, 1) = \bar{a}$. Аналогичное отождествление произведем у функции f.

Далее,

$$\bar{f}(x_1, y_1, y_2) = x_1\bar\varphi(y_1, y_2) + \bar\psi(y_1, y_2).$$

Функция $\bar f$ будет нелинейной, так как $\bar\varphi$ не является тождественной константой, а потому x_1 будет входить в некоторый член полинома Жегалкина для $\bar f$ выше первой степени (полином Жегалкина для $\bar f$ можно получить подстановкой полиномов для $\bar\varphi$ и $\bar\psi$). Итак, мы получили нелинейную функцию от трех переменных.

З а м е ч а н и е 1. При рассмотрении функции φ мы могли начинать не с нулевого, а с единичного набора; существенно только, что в нем все элементы равны.

З а м е ч а н и е 2. Мы фактически доказали, что необходимое и достаточное условие нелинейности функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ — это наличие такой переменной (допустим, x_1), что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1\varphi(x_2, \ldots, x_n) + \psi(x_2, \ldots, x_n),$$

где функция φ не является тождественной константой.

Теперь покажем, что, вообще говоря, нельзя отождествлением переменных получить нелинейную функцию от двух переменных. Рассмотрим нелинейную функцию от трех переменных: $xy \vee yz \vee xz = xy + yz + xz$ (задача 4.3, в)). Она симметрична относительно всех трех переменных. Отождествим для примера переменные x и y. Получаем $x \vee xz \vee xz = x$ (см. (2.20)), т. е. линейную функцию. К аналогичному результату приводит отождествление любых двух других переменных. Тем более не приводит к цели отождествление всех трех переменных.

4.11. В тех же обозначениях, что и при решении предыдущей задачи, пусть у нас имеется еще константа 0 (если у нас имеется 1, то нужно в 4.10 начинать с единичного набора; см. замечание 1 к решению этой задачи).

Подставим вместо y_1 нуль:

$$\bar{f}(x_1, 0, y_2) = x_1\bar\varphi(0, y_2) + \bar\psi(0, y_2).$$

Пусть $\hat\varphi(y_2) = \bar\varphi(0, y_2)$. Тогда $\hat\varphi(0) = a$, $\hat\varphi(1) = \bar{a}$, т. е. $\hat\varphi$ не является константой, а значит, $\hat f(x_1, y_2) = \bar f(x_1, 0, y_2)$ — нелинейная функция от двух переменных (замечание 2 к решению задачи 4.10). Дальнейшее уменьшение числа переменных невозможно, так как нелинейных функций от меньшего числа переменных не бывает.

4.12. Общий вид нелинейной функции от двух переменных:

$$\varphi(x, y) = xy + \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Получим вначале конъюнкцию xy. Избавимся от членов первой степени. Допустим, что $\alpha = 1$. Подставим тогда $\bar{y}$ вместо y:

$$\varphi(x, \bar{y}) = x(y+1) + \alpha x + \beta(y+1) + \gamma = xy + (\alpha+1)x + \beta y + (\beta+\gamma).$$

Поскольку $\alpha = 1$, то $\alpha + 1 = 0$ и член с x уничтожился. Существенно, что коэффициент при y не изменился. Если $\beta = 1$, то аналогично уничтожается и член βy. После этих подстановок свободный член изменится. Если он окажется равным 1, то нужно поставить отрицание над всей функцией. В результате останется лишь член xy.

В общем случае переход от одной нелинейной функции от двух переменных к другой осуществляется аналогичным образом. Нам в дальнейшем будет достаточно рассмотренного случая.

§ 5. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Упорядочим множество $\{0,1\}$, полагая $0<1$. Поскольку нам придется иметь дело с функциями от нескольких переменных, введем частичное упорядочение двоичных наборов одной длины.

Определение 5.1. Пусть $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — двоичные наборы. Мы будем говорить, что α *предшествует* («младше») β (обозначение: $\alpha \prec \beta$), если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех i, причем по крайней мере для одного i имеет место строгое неравенство. Будем писать $\alpha \preccurlyeq \beta$, если $\alpha \prec \beta$ или наборы α и β совпадают.

Это упорядочение является только частичным, так как оно не позволяет сравнивать любые наборы.

Определение 5.2. Функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется монотонной, если для всяких наборов $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ таких, что $\alpha \prec \beta$, имеем $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Отметим, что требование $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ при $\alpha \preccurlyeq \beta$ равносильно нашему.

Удовлетворяющие сформулированиому условию функции алгебры логики было бы естественно назвать «неубывающими»; однако, поскольку мы ие будем иметь дело с «невозрастающими» функциями *), мы будем называть эти функции просто «монотонными».

5.1. Дать определение немонотонной функции. ▲

5.2. а) Являются ли константы монотонными функциями?

б) Какие из основных логических операций являются монотонными? ▲

5.3. Какие из линейных функций являются монотонными? ▲

*) За двумя исключениями (задачи 5.8 и 6.5).

5.4. Доказать, что монотонная функция, не сохраняющая нуль (единицу), равна тождественно единице (нулю) (см. задачу 2.3). ▲

5.5. Перечислить все монотонные функции от двух переменных. ▲

Во всех предыдущих случаях нам удавалось сравннтельно легко найти число функций из того или иного класса. Вопрос же о числе монотонных функцнй от n переменных оказывается очень трудным. Он ие решен до снх пор; это число сосчнтано лишь для конкретных небольших n. Сравннтельно хорошне оценки для чнсла монотонных функций для общего случая были получены недавно [1].

5.6. Какие из указанных функций являются монотонными: а) $xy \vee xz \vee \bar{x}z$; б) $x \to (x \to y)$; в) $\overline{x \vee y} \sim \bar{x} \vee \bar{y}$; г) $\overline{x \vee y} \sim \bar{x}\bar{y}$; д) $xy \vee x \vee \bar{x}z$; е) $xy \vee yz \vee xz$? ▲

Мы переходим к формулировке основного свойства монотонных функций.

5.7. Доказать, что суперпозиция монотонных функций монотонна. ▲

5.8. Доказать, что суперпозиция монотонно убывающих функций может не быть ни убывающей, ни даже невозрастающей. ▲

Задачи 5.7 и 5.8 объясняют, почему в алгебре логики не рассматривают убывающих или невозрастающих функций. Дело в том, что в алгебре логики обычно интересуются «наследственными» свойствами функций, т. е. свойствами, сохраняющимися при суперпозиции.

Задача 5.7 позволяет легко убедиться в монотонности широкого класса функций, представленных формулами. Насколько упрощается часто доказательство монотонности, читатель убедится, еще раз просмотрев задачу 5.6.

Из задачи 5.7 (а также 5.2), в частности, следует, что суперпозиция конъюнкций и дизъюнкций всегда является монотонной функцией. Оказывается верным и обратное утверждение:

5.9. Доказать, что для монотонности функции, не являющейся тождественной константой, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде суперпозиции конъюнкций и дизъюнкций. ▲

5.10. Доказать, что функция, двойственная монотонной функции, монотонна. ▲

5.11. Доказать, что монотонными являются те и только те функции, которые или являются константами или допускают представление в КНФ и ДНФ, не содержащих отрицаний. ▲

Представление монотонной функции в ДНФ и КНФ не единственно. Мы построим сейчас канонические представления.

Определение 5.3. Назовем ДНФ, не содержащую отрицаний, *правильной*, если

а) она не содержит одинаковых элементарных конъюнкций;

б) все входящие в нее элементарные конъюнкции правильны;

в) ни одна элементарная конъюнкция не поглощает другую, т. е. не содержит целиком переменных, входящих в другую конъюнкцию *).

5.12. Доказать, что монотонная функция представляется в виде правильной ДНФ и что это представление единственно. ▲

5.13. По аналогии с ДНФ дать определения правильной КНФ и доказать единственность представления монотонной функции в виде правильной КНФ. ▲

Теперь докажем несколько свойств немонотонных функций, аналогичных полученным в двух предыдущих параграфах свойствам несамодвойственных и нелинейных функций.

5.14. К какому наименьшему числу переменных можно свести немонотонную функцию с сохранением немонотонности, отождествляя ее переменные? ▲

5.15. Пусть имеется произвольная монотонная функция и какая-либо одна из констант. Каково минимальное число переменных, от которых может зависеть немонотонная функция, являющаяся их суперпозицией? ▲

5.16. Показать, что суперпозицией любой немонотонной функции и констант можно получить отрицание. ▲

---

*) Условие а) можно считать частным случаем условия в). Условие в) означает, что правильная ДНФ не может быть упрощена при помощи закона поглощения (2.20).

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 5

5.2. б) xy, $x \vee y$.

5.3. 0, 1, x.

5.5. 0, 1, x, y, xy, $x \vee y$. Полезно иметь в виду, что если монотонная функция от двух переменных не является константой, то она равняется нулю на нулевом наборе, единице — на единичном, а на двух других наборах ее можно задавать произвольно.

5.6. В тех случаях, где это возможно, следует предварительно упростить формулы. Далее отметим, что если два набора сравнимы, то в предшествующем наборе меньше единиц (это необходимое условие, но, конечно, не достаточное). Для доказательства монотонности часто бывает удобно рассмотреть множество наборов, на которых функция равна нулю (или единице — в зависимости от того, каких наборов больше), показать, что оставшиеся наборы или несравнимы с рассматриваемыми, или больше их (в двойственном случае меньше). Для доказательства немонотонности достаточно рассмотрения пары наборов (см. задачу 5.1).

Ответ: а), г), д), е).

5.7. Доказывается индукцией по рангу суперпозиции.

5.9. Доказательство вести индукцией по числу переменных. Разложить $f(x_1, \ldots, x_n)$ по последней переменной в СДНФ (2.16):

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\, x_n \vee \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})\, \overline{x_n}$$

и показать, что имеет место равносильность

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\, x_n \vee \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

5.10. Это утверждение можно доказать непосредственно, исходя из определений двойственной и монотонной функций, но удобнее воспользоваться задачей 5.9 и законом двойственности.

5.11. Непосредственное следствие из задачи 5.9 и алгоритмов преобразования формулы в ДНФ и КНФ (см. пп. 6, 7 § 2).

5.14. Можно получить немонотонную функцию от трех переменных и, вообще говоря, нельзя от меньшего числа переменных (привести пример).

5.15. Вообще говоря, от двух переменных.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 5

5.1. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является немонотонной, если существует такая пара наборов α и β, что $\alpha \prec \beta$ и

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > f(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

5.2. а) Будут, так как для любых наборов $f(\alpha) = f(\beta)$.

б) xy монотонна, так как она равна 1 лишь на наборе (1, 1), которому предшествуют все остальные наборы;

$x \vee y$ также монотонна, так как она равна 0 лишь на наборе (0, 0), который предшествует всем остальным наборам;

$\bar{x}$ немонотонна, так как при $\alpha = (0)$, $\beta = (1)$ имеем $\alpha \prec \beta$, но $\bar{\alpha} \succ \bar{\beta}$;

$x \to y$ немонотонна: пусть $\alpha = (0, 0)$, $\beta = (1, 0)$, $\alpha \prec \beta$; тогда $(0 \to 0) = 1 > (1 \to 0) = 0$;

$x \sim y$ немонотонна, что ясно из рассмотрения наборов $\alpha = (0, 0)$, $\beta = (1, 0)$.

5.3. Рассмотрим два случая.

а) Пусть свободный член равен 1 и линейная функция содержит хотя бы одну существенную переменную. Тогда из сопоставления нулевого набора и набора, содержащего ровно одну единицу на месте, соответствующем существенной переменной, следует немонотонность функции. Остается лишь случай константы 1.

б) Если свободный член равен 0 и линейная функция содержит, по крайней мере, два существенных аргумента, то немонотонность следует из рассмотрения набора, замещающего единицей только эти два аргумента, и набора, замещающего единицей только какой-то из них. Остаются функции 0 и x.

5.4. Поскольку нулевой набор младше остальных, из равенства на нем монотонной функции единице следует ее тождественное равенство единице (на остальных наборах она не может быть меньше). Аналогично рассматривается двойственный случай.

5.5. Если исключить случай констант, то монотонная функция $f(x, y)$ равна 0 на нулевом наборе и 1 на единичном. Два других набора (0, 1) и (1, 0) следуют за нулевым, предшествуют единичному, а между собой несравнимы. Поэтому на них можно задавать любые значения функции, не нарушая монотонности. Всего задавать эти значения можно четырьмя способами, так что можно указать четыре монотонные функции от двух переменных, не являющиеся константами: x, y, xy и $x \vee y$.

5.6. а) Упростим формулу: $xy \vee xz \vee \overline{x}z = xy \vee z$. Эта функция равна нулю на наборах (0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0). Все оставшиеся наборы, исключая (0, 0, 1), содержат не менее двух единиц, а значит, они могут быть только больше. Набор $(0, 0, 1) \succ (0, 0, 0)$, а с остальными двумя он не сравним. Значит, рассматриваемая функция монотонна.

б) Функция немонотонна; сравнить значения функции на наборах $(0, 0) \prec (1, 0)$.

в) Сравнивая значения на наборах $(0, 0) \prec (1, 0)$, получаем, что функция немонотонна.

г) $\overline{x} \vee \overline{y} \sim \overline{x}\overline{y}$ — тождественная единица, так как $\overline{x \vee y} = \overline{x}\overline{y}$.

д) $xy \vee x \vee xz = x \vee z$ — монотонная функция (задача 5.2).

е) Функция монотонна, так как она равна нулю на наборах, содержащих менее двух единиц, а остальные наборы могут быть только больше.

5.7. Пусть имеется система монотонных функций Φ. Нужно доказать монотонность функций, являющихся суперпозициями функций из Φ.

Для суперпозиций ранга нуль, т. е. для функций из Φ, это утверждение согласно условию верно. Пусть оно доказано для суперпозиций ранга k. Докажем его справедливость для суперпозиций ранга $k+1$. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $\psi(y_1, \ldots, y_l) \in \Phi^{(k)}$. Надо показать (см. определение 2.3), что функции

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_k);$$

$$F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_l) =$$
$$= \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, \psi(y_1, \ldots, y_l), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

монотонны. Напомним, что y, y_i могут, в частности, совпадать с какими-то из переменных x_j. Монотонность первой из функций следует из монотонности φ по определению. Докажем монотонность F. Рассмотрим два сравнимых набора значений ее аргументов:

$$\gamma' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_{i+1}, \ldots, \alpha'_n; \beta'_1, \ldots, \beta'_l);$$
$$\gamma'' = (\alpha''_1, \ldots, \alpha''_{i-1}, \alpha''_{i+1}, \ldots, \alpha''_n; \beta''_1, \ldots, \beta''_l).$$

Пусть $\gamma' \prec \gamma''$. Покажем, что $F(\gamma') \leqslant F(\gamma'')$. Имеем:

$$F(\gamma') = \varphi(\delta'), \quad \text{где} \quad \delta'_j = \alpha'_j \quad \text{при} \quad j \neq i, \quad \delta'_i = \psi(\beta');$$
$$F(\gamma'') = \varphi(\delta''), \quad \text{где} \quad \delta''_j = \alpha''_j \quad \text{при} \quad j \neq i, \quad \delta''_i = \psi(\beta'').$$

Поскольку ψ — монотонная функция, а из $\gamma' \prec \gamma''$ следует $\beta' \leqslant \beta''$, имеем $\delta' \leqslant \delta''$, т. е. $\varphi(\delta') = F(\gamma') \leqslant \varphi(\delta'') = F(\gamma'')$, так как φ— монотонная функция. Поскольку в одном из двух указанных видов представляется любая функция из $\Phi^{(k+1)}$, доказательство окончено.

5.8. Отрицание $\bar{x}$ — монотонно убывающая функция. Ее суперпозиция с собой $\bar{\bar{x}} = x$ монотонно возрастает.

5.9. Достаточность уже доказана; необходимость будем доказывать индукцией по числу переменных. Можно начинать с $n=0$, когда имеются лишь константы; для $n=1$ добавляется еще $x = x \vee x$. Пусть доказываемое утверждение справедливо для монотонных функций от $(n-1)$ переменных. Докажем его для функций от n переменных. Пусть $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ — монотонная функция от n переменных. Разложим ее в СДНФ по последней переменной:

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\, x_n \vee \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})\, \bar{x}_n,$$

где

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1), \ \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \\ = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Функции φ и ψ монотонны, так как они являются суперпозициями монотонной функции f и констант, являющихся монотонными функциями (см. задачу 5.7). Покажем, что имеет место представление:

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\, x_n \vee \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}). \qquad (5.1)$$

Нужно доказать равносильность

$$x_n\varphi \vee \bar{x}_n\psi = x_n\varphi \vee \psi.$$

Сравним множество наборов, на которых обращаются в нуль левая и правая части. Если на некотором наборе $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ обратилась в нуль правая часть, то $\alpha_n\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = 0$ и $\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = 0$; значит, и $\bar{\alpha}_n\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = 0$, т. е. и левая часть равна нулю. Пусть теперь на наборе $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ равна нулю левая часть. Тогда $\alpha_n\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = 0$. Далее, $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = 0$, поэтому $\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) = 0$, так как $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \succcurlyeq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$. В результате правая часть равна нулю и представление (5.1) для монотонных функций доказано.

Докажем теперь представимость f в виде суперпозиции дизъюнкций и конъюнкций, предполагая, что f не является константой. Предположим сначала, что φ и ψ тоже не являются константами. Тогда, поскольку они монотонны и зависят от $(n-1)$ переменных, по предположению индукции их можно считать суперпозициями дизъюнкций и конъюнкций. Из (5.1) следует, что тогда этим же свойством обладает и функция f.

Теперь рассмотрим случаи, когда одна или обе функции φ и ψ являются константами. Заметим, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \geqslant \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Поэтому, если φ — тождественный нуль, то ψ и f — тождественные нули;

если $\psi=1$ *), то $f=1$. Если $\psi=0$, а $\varphi=1$, то $f(x_1, \ldots, x_n)=x_n$. Если же $\psi=0$, а $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ не является константой, или $\varphi=1$, а $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ не является константой, то из предположения индукции и (5.1) немедленно следует доказываемый результат.

Мы советуем читателю провести доказательство, используя двойственные формулы. В частности, доказать равносильность, двойственную (5.1):

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)=(\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \vee x_n)\,\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad (5.2)$$

где f — монотонная функция, а $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})=f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})=f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$. Равенство (5.2) стоит доказать как непосредственно, так и вывести из (5.1) при помощи закона двойственности.

5.10. Воспользуемся второй идеей, упомянутой в указании. Поскольку константы двойственны друг другу, можно ограничиться случаем монотонной функции, отличной от константы. В силу задачи 5.9 ее можно представить в виде суперпозиции конъюнкций и дизъюнкций. Для получения двойственной функции по закону двойственности нужно заменить конъюнкции дизъюнкциями и наоборот, а значит, в силу задачи 5.7 вновь получится монотонная функция.

5.12. Возьмем две равносильные правильные ДНФ. Докажем, что они совпадают. Пусть $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ — любая элементарная конъюнкция, входящая в первую ДНФ. Достаточно доказать, что она входит во вторую. Подставим вместо всех переменных, кроме входящих в эту конъюнкцию, нули. Тогда все конъюнкции в обеих ДНФ, имеющие не меньшую степень, чем выбранная, обратятся в нуль, так как в них обязательно найдутся переменные, не входящие в эту конъюнкцию. В первой ДНФ обратятся в нуль и все остальные конъюнкции, так как иначе они поглощались бы выбранной конъюнкцией (согласно в) определения 5.3). Если бы во второй ДНФ не было конъюнкции $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, то все оставшиеся после подстановки члены имели бы меньшую степень и поглощались бы ей. Возьмем какую-нибудь из этих конъюнкций и подставим вместо входящих в нее переменных единицы, а вместо остальных переменных нули. Тогда первая ДНФ обратится в нуль, а вторая будет равняться единице.

5.13. В правильную КНФ входят различные правильные дизъюнкции, не поглощающие друг друга.

5.14. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — немонотонная функция и наборы $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\prec\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ таковы, что

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > f(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

т. е.

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=1; \qquad f(\beta_1, \ldots, \beta_n)=0.$$

Разобьем переменные $x_1, \ldots, x_n$ на три группы. В первую включим такие переменные x_i, что $\alpha_i=0$, $\beta_i=1$; во вторую — такие x_i, что $\alpha_i=\beta_i=0$; в третью — такие x_i, что $\alpha_i=\beta_i=1$. Поскольку $\alpha\prec\beta$, то не может быть, чтобы $\alpha_i=1$, $\beta_i=0$. Отождествим переменные внутри каждой из этих групп (подставим вместо них переменные y_1, y_2, y_3 соответственно). Получим немонотонную функцию от трех переменных $\varphi(y_1, y_2, y_3)$: $\varphi(0, 0, 1)=1$; $\varphi(1, 0, 1)=0$.

*) Напомним, что равенство функций всюду понимается как тождественное (см. стр. 32).

Дальнейшее уменьшение числа переменных может быть невозможно, как показывает пример немонотонной функции от трех переменных $x+y+z$. Любое отождествление переменных приводит к функции от одной переменной, совпадающей с аргументом (например, x), которая монотонна.

5.15. Пусть у нас имеетси, например, константа 0. Сделаем в $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ подстановку $y_2=0$. Получим немонотонную функцию от двух переменных. Число переменных, вообще говоря, нельзя уменьшить, как показывает пример функции $x+y$.

Аналогично рассматривается случай константы 1. В этом случае нельзя уменьшить число переменных у функции $x+y+1$.

5.16. Подставим $y_2=0$, $y_3=1$ в аргументы функции $\varphi(y_1, y_2, y_3)$, введенной при решении задачи 5.14. Получится $\bar{y}_1$.

§ 6. ФУНКЦИОНАЛЬНО ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ И ТЕОРЕМА ПОСТА

Среди рассмотренных нами вопросов одними из наиболее важных были вопросы о представимости функций алгебры логики в том или ином виде (ДНФ, КНФ, полиномы Жегалкина). Всякий раз фактически речь шла о возможности представить функции алгебры логики в виде суперпозиций некоторого фиксированного множества функций (определение 2.3). Общая проблема ставится следующим образом:

Имеется некоторая система Ф функций алгебры логики $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *). Для всякой ли функции алгебры логики существует равносильная ей суперпозиция функций из системы Ф **)?

Определение 6.1. Система функций $\Phi=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ называется *полной*, если всякая функция алгебры логики представима посредством суперпозиций функций из системы Ф.

Из представимости функций в виде СДНФ следует полнота системы функций $\{xy, x\vee y, \bar{x}\}$. Случай тождественного нуля не приводит к ограничениям, поскольку $0=x\bar{x}$.

6.1. С полнотой какой системы функций связана представимость функций полиномами Жегалкина? ▲

---

*) Для простоты мы рассматриваем конечные системы функций, хотя, как будет видно из дальнейшего, это не существенно.

**) В силу результатов п. 4 § 2 этот вопрос соответствующим образом интерпретируется для булевых операций на любой регулярной булевой алгебре. Например, для алгебры множеств вопрос ставится так: через какие теоретико-множественные операции выражаются все такие операции? Рекомендуем перевести на язык теории множеств примеры задачи 6.2.

6.2. Доказать полноту следующих систем функций: а) xy, $\bar{x}$; б) $x \vee y$, $\bar{x}$; в) xy, $x+y$, 1; г) $\overline{x \vee y}$; д) $\overline{xy}$; и) $x+y$, $x \vee y$, 1; ж) $x+y+z$, xy, 0, 1; з) $x \to y$, $\bar{x}$; е) $x \to y$, 0. ▲

6.3. Доказать, что если некоторая система функций $\Phi=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ полна, то и система двойственных функций $\Phi^+=\{\varphi_1^+, \ldots, \varphi_k^+\}$ полна. ▲

6.4. Показать, что нижеследующие системы функций не являются полными: а) $\bar{x}$, 1; б) xy, $x \vee y$; в) $x+y$, $\bar{x}$; г) $xy \vee yz \vee xz$, $\bar{x}$; д) $xy \vee yz \vee xz$, 0, 1. ▲

Анализ решения задачи 6.4 выявляет следующую идею доказательства н е п о л н о т ы системы функций Ф. Нужно найти какое-либо свойство, которое сохраняется при суперпозиции («н а с л е д с т в е н н о е» свойство) и которым обладают все функции системы Ф, хотя не все функции алгебры логики им обладают. Действительно, тогда функцию, не обладающую этим наследственным свойством, нельзя представить в виде суперпозиции функций из Ф. При исследовании наследственных свойств функций удобно пользоваться понятием функционально замкнутого класса.

О п р е д е л е н и е 6.2. Всякая совокупность T функций алгебры логики, замкнутая относительно суперпозиции (т. е. такая, что суперпозиция функций из T снова принадлежит T), называется *функционально замкнутым классом*.

Очевидно, что совокупность функций, обладающих каким-либо наследственным свойством, является функционально замкнутым классом и, обратно, свойство принадлежать какому-либо функционально замкнутому классу является наследственным. Другими словами, эти понятия сводятся одно к другому.

6.5. Какие из указанных ниже систем функций являются функционально замкнутыми классами:

а) функции от одной переменной;
б) функции от двух переменных;
в) все функции алгебры логики;
г) линейные функции;
д) самодвойственные функции;
е) монотонные функции;
ж) монотонно убывающие функции;
з) функции, сохраняющие нуль (см. задачу 2.3);

и) функции, сохраняющие единицу;

к) функции, сохраняющие и нуль, и единицу;

л) функции, сохраняющие нуль, но не сохраняющие единицу? ▲

6.6. 1) Доказать, что пересечение функционально замкнутых классов — функционально замкнутый класс.

2) Доказать, что совокупность функций, двойственных функциям из функционально замкнутого класса, образует функционально замкнутый класс (двойственный класс). ▲

6.7. Является ли объединение функционально замкнутых классов функционально замкнутым классом? ▲

Определение 6.3. Функционально замкнутые классы, отличные от пустого класса и от совокупности всех функций алгебры логики, называются *собственными функционально замкнутыми классами.*

6.8. Доказать, что дополнение собственного функционально замкнутого класса (совокупность функций, в него не входящих) не может быть функционально замкнутым классом. ▲

Определение 6.4. Минимальная полная система функций (т. е. такая полная система функций, удаление из которой любой функции делает систему неполной) называется *базисом.*

6.9. Показать, что полные системы из задачи 6.2 являются базисами. ▲

Итак, для полноты системы функций необходимо, чтобы для всякого собственного функционально замкнутого класса в ней нашлась функция, не входящая в этот класс. Легко заметить, что это условие является также и достаточным.

6.10. Доказать, что для полноты системы функций Ф необходимо и достаточно, чтобы для всякого функционально замкнутого класса, не совпадающего с множеством всех функций, в Ф нашлась функция, не принадлежащая этому классу. ▲

Трудно ожидать, что утверждение задачи 6.10 можно использовать в качестве критерия полноты системы функций, так как для этого потребовалось бы перебрать все функционально замкнутые классы. Хотя оказывается, что множество классов вполне обозримо (см. подробнее об этом в следующем параграфе), для решения вопроса о полноте нет необходимости в переборе всех классов. Оказывается, что можно ограничиться максимальными функционально замкнутыми классами.

Определение 6.5. Собственный функционально замкнутый класс называется *предполным*, если он не содержится ни в каком функционально замкнутом классе, отличном от самого себя и от класса всех функций алгебры логики.

6.11. Пусть известно, что всякий собственный функционально замкнутый класс содержится в некотором предполном *). Доказать, что для полноты системы функций Φ необходимо и достаточно, чтобы для всякого предполного класса в Φ нашлась функция, в него не входящая. ▲

Оказывается, что все предполные классы легко перечисляются. Ими являются:

$\mathbf{P}_0$— класс функций, сохраняющих нуль; $\mathbf{P}_1$— класс функций, сохраняющих единицу; $\mathbf{L}$ — класс линейных функций; $\mathbf{M}$ — класс монотонных функций; $\mathbf{S}$ — класс самодвойственных функций.

Нам удобнее доказывать не предполноту этих классов, а непосредственно критерий полноты, который получается из этого факта и задачи 6.11. Напротив, исходя из критерия полноты, мы докажем предполноту классов $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{S}$ и то, что всякий собственный функционально замкнутый класс содержится в одном из них.

Вначале докажем одно вспомогательное утверждение:

6.12. Доказать, что отождествлением переменных из всякой функции, не сохраняющей нуль (единицу), можно

---

*) Это утверждение будет доказано в дальнейшем (задача 6.18). В принципе могла бы существовать бесконечная последовательность расширяющихся функционально замкнутых классов, не содержащаяся целиком ни в одном собственном функционально замкнутом классе.

получить функцию от одной переменной, обладающую этим же свойством, т. е. $\bar{x}$ или 1 (соответственно $\bar{x}$ или 0). ▲

Теперь сформулируем критерий полноты.

6.13. Доказать теорему Поста: для полноты системы функций $\Phi=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{S}$ в Φ нашлась функция φ_i, ему не принадлежащая. ▲

При проверке, выполняются ли для некоторой системы функций $\Phi=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ условия теоремы Поста, мы будем составлять таблицы, которые назовем *таблицами Поста*. Они будут иметь вид:

	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{S}$	$\mathbf{L}$	$\mathbf{M}$
φ_1					
φ_2					
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
φ_{k-1}					
φ_k					

В клетках таблнцы Поста ставится плюс или минус, в зависимости от того, входит функция, стоящая в данной строке, в класс, стоящий в данном столбце, или не входит. Для полноты системы функций необходимо и достаточно (в силу теоремы Поста), чтобы в каждом столбце стоял бы хотя один минус.

6.14. Решить задачу 6.2, используя теорему Поста. ▲

6.15. Исходя из теоремы Поста, сформулировать критерий неполноты системы функций. ▲

6.16. Показать неполноту следующих систем функций и сделать выводы о существенности условнй теоремы Поста: а) 0, xy, $x+y+z$; б) 1, xy, $x+y+z$; в) $\bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z$; г) 0, 1, $x+y$; д) 0, 1, xy. ▲

6.17. Доказать, что ни один из классов $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ не содержится в другом. ▲

6.18. Доказать, что всякий собственный функционально замкнутый класс содержится в одном из классов $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$. ▲

6.19. Доказать, что функционально замкнутые классы $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ являются предполными и других предполных классов нет. ▲

Ясно, что теорема Поста позволяет выяснить вопрос о том, является ли полная система базисом. Это опять-таки удобно делать при помощи таблиц Поста.

Сейчас мы сделаем некоторые общие замечания о базисах, следующие из теоремы Поста. Начнем с иаиболее простого:

6.20. Доказать, что базис не может содержать более пяти функций. ▲

На самом деле имеет место более точный результат.

6.21. Доказать, что базис не может содержать более четырех функций. ▲

В силу задач 6.2 и 6.9 существуют базисы с любым числом функций, не превосходящим четырех.

6.22. Доказать, что из всякого базиса можно отождествлением аргументов у входящих в него функций получить базис, в котором все функции зависят не более чем от трех переменных; дальнейшее уменьшение числа переменных, вообще говоря, иевозможно. ▲

Определение 6.6. Если при любом отождествлении переменных у всякой функции базиса мы получаем неполную систему, то базис называется *минимальным*.

6.23. Доказать, что имеется конечное число различных минимальных базисов. ▲

Оказывается, что это число равно 48. Все минимальные базисы перечислены [1]. Некоторые из них будут найдены ниже.

Теперь мы исследуем некоторые специальные типы базисов. Начнем с базисов, состоящих из одной функции.

Определение 6.7. Функция алгебры логики, представляющая собой базис из одного элемента, называется *обобщенной функцией Шеффера*.

6.24. Сколько имеется обобщенных функций Шеффера от n переменных? ▲

6.25. Найти все минимальные базисы из одной функции. ▲

Теперь, напротив, рассмотрим базисы, содержащие максимально возможное число функций.

6.26. Какой может быть таблица Поста для базиса из четырех функций? ▲

6.27. Найти все минимальные базисы из четырех функций. ▲

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 6

6.3. Воспользоваться законом двойственности.

6.4. Использовать задачн 3.6 (закон двойственностн), 5.7 и аналогнчные соображения.

6.5. а), в), г), д), е), з), и), к).

6.6. 2) Следует из закона двойственности.

6.7. Нет.

6.8. В этом дополнении содержатся функции Шеффера (задача 6.2, г), д)).

6.10. Полнота снстемы функций Ф равносильна тому, что порождаемый этой системой функционально замкнутый класс(мнннмальный класс, ее содержащий) совпадает с множеством всех функций.

6.13. Отождествляя переменные, упростить функции из Ф с тем, чтобы онн по-прежнему удовлетворялн условиям теоремы Поста. Доказать, что суперпозициями из них можно получить константы, отрицание и конъюнкцию. Воспользоваться задачами 6.12, 3.11, 5.16, 4.11, 4.12.

6.14. Стоит посмотреть в предыдущих параграфах (§§ 3—5), как выясняется, принадлежит ли данная функция классам **S**, **L**, **M**. Случаи $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ тривиальны. Напомним, в частности, что функция линейна или нелинейна в зависимости от того, есть в ее полиноме Жегалкина члены выше первой степени или нет (см. замечание, следующее после задачи 4.6).

Часто бывает полезно помнить о связях между функционально замкнутыми классами. Например, среди линейных функций монотонны лишь 0, 1, x (задача 5.3); самодвойственны функции с нечетным числом переменных (задача 4.6); сохраняют нуль функции, у которых свободный член — нуль; сохраняют единицу функции от четного числа переменных, если их свободный член — нуль, и функции от нечетного числа переменных, если их свободный член — единица. Все монотонные функции, кроме соответствующих констант, принадлежат $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ (задача 5.4).

6.16. Напомним, что условие теоремы называется существенным, если его отбрасывание делает теорему несправедливой. Условие может быть несущественным по разным причинам: оно может не иметь отношения к факту, о котором идет речь в теореме, или быть следствием остальных условий (условия теоремы не являются независимыми). Существенные условия иногда путают с необходимыми.

6.18. Доказывать от противного, используя теорему Поста.

6.19. Следует из задач 6.17, 6.18.

6.21. Функция, не сохраняющая нуль, является или немонотонной или несамодвойственной.

6.24. $2^{2^{n-2}} - 2^{2^{n-1}-1}$. Обобщенными функциями Шеффера являются несамодвойственные функции, не сохраняющие нуля и единицы.

6.25. Ответ: $\overline{x}\,\overline{y}$, $\overline{x}\vee\overline{y}$. Использовать предыдущую задачу.

6.26.

	P_0	P_1	S	L	M
$\varphi_1=1$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\varphi_2=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\varphi_3=x_1+\ldots+x_{2k+1},\ k\geqslant 1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
φ_4	$+$	$+$	$\pm$	$-$	$+$

6.27. 0, 1, $x+y+z$, xy; 0, 1, $x+y+z$, $x\vee y$; 0, 1, $x+y+z$, $xy+yz+xz$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 6

6.1. xy, $x+y$, 1.

6.2. а), б) см. задачу 1.14; в) см. задачу 6.1; г), д) см. задачу 1.16 (эти функции называютси функциямн Шеффера); е) $x\vee y=xy+x+y$, поэтому $x\vee y+(x+y)=xy$ (см. в)); ж) $x+y+0=x+y$, а $x+y$, xy, 1 — полная система (см. в)); з) $\overline{x}\to y=x\vee y$, а $x\vee y$, $\overline{x}$ — полная система; и) $x\to 0=\overline{x}$ (см. з)).

6.3. Если нам нужио представить некоторую функцию f в виде суперпозиции функций из Φ^+, то представим вначале двойственную фуикцию f^+ суперпозицией функций из Φ, а затем, переходя по закону двойствеииости к суперпозиции двойственных функций, получим искомую суперпозицию.

6.4. а) Суперпозицией функций от одной переменной нельзя получить функции от большего числа переменных.

б) Обе функции монотонны; значит, любая нх суперпозиция в силу задачи 5.7 монотонна н нельзя получить ни одной немонотонной функции (например, $\overline{x}$).

в) Обе функцни линейны, а поэтому, как легко заметить, и все их суперпозиции линейны.

г) Обе функции самодвойственны, а поэтому в снлу следствия из закона даойстненности их суперпозиция самодвойственна.

д) Все фуикции монотонны.

6.5. б) $x\vee(y\vee z)$ — функция от трех переменных, являющаяся суперпозицией дизъюнкции; д) следует из закона двойственности; е) см. задачу 5.7; ж) см. задачу 5.8. з) Воспользуемся обозначениями, принятыми при решении задачн 5.7. Подставим в F нуленой набор. Поскольку ψ сохраняет нуль, то при этом в φ подставляетси нулевой набор, а так как φ также сохраняет нуль, то получаем, что и F сохраниет нуль. и) Аналогично з). л) $x+y$ обладает этим свойстном, а $x+(y+z)$ сохраняет единицу.

6.7. Возьмем классы функций, сохраняющих нуль и сохраняющих единицу. Их объединение состоит из функций, которые сохраняют нуль или единицу. Ему принадлежат, в частности, функции $x\bar{y}$ (сохраняющая нуль) и 1 (сохраняющая 1). Подставляя 1 в $x\bar{y}$ вместо x, мы получаем $\bar{y}$, которая не сохраняет ни нуля, ни единицы.

6.8. Если функционально замкнутый класс содержит одну из функций Шеффера (задача 6.2, г), д)), то он совпадает с классом всех функций алгебры логики. Поскольку данный нам функционально замкнутый класс — собственный, функции Шеффера должны содержаться в дополнении к нему. Но тогда это дополнение не может быть функционально замкнутым классом, так как тогда оно совпадало бы с множеством всех функций, и исходный класс был бы пустым, а значит, несобственным.

6.9. а) xy — монотонная функция; $\bar{x}$ — функция от одной переменной (а также линейная и самодвойственная), т. е. эти системы неполны. б) Аналогично а). в) xy, 1 — монотонные функции, сохраняющие 1, $x+y$, 1 — линейные функции, xy, $x+y$ сохраняют нуль. е) Аналогично в). ж) xy, 0, 1 — монотонные функции, $x+y+z$, 0, 1 — линейные функции, $x+y+z$, xy, 0 сохраняют нуль, $x+y+z$, xy, 1 сохраняют единицу. з) $x\rightarrow y$ сохраняет единицу, $\bar{x}$ аналогично а). и) $x\rightarrow y$ сохраняет единицу, 0 — константа.

6.10. О необходимости мы уже говорили (в противном случае все функции из Ф принадлежали бы какому-то собственному функционально замкнутому классу, и ему же принадлежали бы все их суперпозиции).

Теперь докажем достаточность. Пусть система Ф обладает указанным в условии задачи свойством. Совокупность функций, являющихся суперпозициями функций из Ф, является, очевидно, функционально замкнутым классом (заметим, что это — наименьший функционально замкнутый класс, содержащий Ф). Этот класс не может быть собственным, так как Ф не содержится ни в каком собственном классе. Поскольку он, кроме того, не пуст, то он содержит все функции алгебры логики.

6.11. Необходимость следует из необходимости условия задачи 6.10. Докажем достаточность. Функционально замкнутый класс, порожденный функциями из Ф, не может содержаться ни в одном предполном, так как ни в одном из них по условию не содержится система Ф. Поскольку этот класс, кроме того, не пуст, то он совпадает с классом всех функций алгебры логики.

6.12. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \notin P_0$: $\varphi(0, \ldots, 0)=1$. Отождествим все переменные. Тогда, если $\varphi(1, \ldots, 1)=1$, то мы получим 1; если $\varphi(1, \ldots, 1)=0$, то получим $\bar{x}$.

6.13. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Возьмем из Ф функцию, не сохраняющую 0, и функцию, не сохраняющую 1. Отождествим в них переменные. В силу задачи 6.12 в первом случае мы получаем 1 или $\bar{x}$, во втором получаем 0 или $\bar{x}$. В результате мы получаем обе константы или отрицание (быть может, и то и другое). Пусть мы получили константы. Покажем, что тогда можно представить отрицание в виде суперпозиции. Поскольку константы не принадлежат классам **S** и одному из классов $\mathbf{P}_0$ или $\mathbf{P}_1$, а $\bar{x}$ — линейная функция, то для этой цели естественно воспользоваться немонотонной функцией из Ф. Действительно, в силу задачи 5.16 отрицание можно представить в виде суперпозиции произвольной немонотонной функции и констант. Итак, в этом случае суперпозицией функций из Ф можно представить обе константы и отрицание.

Рассмотрим теперь другой случай, когда при отождествлении переменных как у функции, не принадлежащей $\mathbf{P}_0$, так и у функции, не принадлежащей $\mathbf{P}_1$, получается отрицание. Покажем, что тогда можно получить константы. Для этого естественно воспользоваться несамодвойственной функцией, из которой вместе с отрицанием в силу задачи 3.11 можно получить константы.

Итак, в обоих случаях мы имеем функции 0, 1, $\bar{x}$. Мы еще не использовали нелинейной функции. Применяя задачу 4.11, мы получаем из нее и одной из констант какую-либо нелинейную функцию от двух переменных. А затем, используя задачу 4.12, можно получить из этой функции и отрицания любую нелинейную функцию от двух переменных, например, xy (или $x \vee y$, или функцию Шеффера $\overline{xy}$). Поскольку мы построили полную систему функций, теорема доказана.

6.14. Составим таблицы Поста:

		$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{S}$	$\mathbf{L}$	$\mathbf{M}$
а)	xy	+	+	−	−	+
	$\bar{x}$	−	−	+	+	−
б)	$x \vee y$	+	+	−	−	+
	$\bar{x}$	−	−	+	+	−
в)	xy	+	+	−	−	+
	$x+y$	+	−	−	+	−
	1	−	+	−	+	+
г)	$\overline{x \vee y}$	−	−	−	−	−
д)	$\overline{xy}$	−	−	−	−	−
е)	$x+y$	+	−	−	+	−
	$x \vee y$	+	+	−	−	+
	1	−	+	−	+	+
ж)	$x+y+z$	+	+	+	+	−
	xy	+	+	−	−	+
	0	+	−	−	+	+
	1	−	+	−	+	+
з)	$x \to y$	−	+	−	−	−
	$\bar{x}$	−	−	+	+	−
и)	$x \to y$	−	+	−	−	−
	0	+	−	−	+	+

Для каждой из девяти систем функций в каждом из столбцов стоит, по крайней мере, один минус. Значит, все системы полны.

6.15. Система функций Φ не полна тогда и только тогда, когда она целиком входит в один из классов $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{S}$.

6.16. Составим таблицы Поста:

		P_0	P_1	S	L	M
а)	0	+	—	—	+	+
	xy	+	+	—	—	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	—
б)	1	—	+	—	+	+
	xy	+	+	—	—	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	—
в)	$\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$	—	—	+	—	—
г)	0	+	—	—	+	+
	1	—	+	—	+	+
	$x+y$	+	—	—	+	—
д)	0	+	—	—	+	+
	1	—	+	—	+	+
	xy	+	+	—	—	+

Отметим, как можно исследовать функцию $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$. Легко проверить, что она не принадлежит ни $\mathbf{P}_0$, ни $\mathbf{P}_1$; тогда она не принадлежит $\mathbf{M}$ (см. 5.4 и указание к задаче 6.14). Она не является константой и симметрична относительно всех своих переменных. Поэтому у нее все переменные существенны. Легко проверить, что она не может совпадать ни с $x+y+z$, ни с $x+y+z+1$, т. е. она нелинейна. Что касается самодвойственности, то в силу симметричности можно ограничиться наборами (0, 0, 0) и (1, 0, 0).

Теперь обсудим вопрос о существенности условий теоремы Поста. Все рассмотренные в этой задаче системы не полны, так как для каждой из них в таблице имеется столбец, состоящий сплошь из плюсов. Заметим, что для каждой системы имеется ровно по одному такому столбцу, причем для разных систем эти столбцы разные. Отсюда следует, что в условии теоремы Поста нельзя отбросить ни одного из пяти классов. Действительно, для каждого из классов можно указать систему содержащихся в нем функций (а значит, не полную), в которой для каждого из остальных четырех классов имеется функция, ему не принадлежащая.

6.17. Если бы какой-либо класс содержался в другом, то в формулировке теоремы Поста этот класс можно было бы отбросить, что противоречит задаче 6.16.

6.18. Если некоторый функционально замкнутый класс T не содержится ни в одном из указанных пяти классов, то для каждого из них в T найдется функция, ему не принадлежащая. Но тогда по теореме Поста T содержит все функции алгебры логики.

6.19. В силу задачи 6.18 другие классы не могут быть предполными. В силу задачи 6.17 каждый из пяти перечисленных классов является предполным.

6.20. Из всякой полной системы можно выбрать не более пяти функций, удовлетворяющих теореме Поста.

6.21. Возьмем функцию, не сохраняющую нуль. В силу задачи 5.4 она или является немонотонной или является тождественной единицей, т. е. является несамодвойственной функцией. Итак, в полной системе обязательно найдется функция, не принадлежащая сразу двум предполным классам. Тогда к этой функции можно присоединить не более трех функций из рассматриваемой системы так, чтобы удовлетворялись условия теоремы Поста. Значит, в базисе не может быть более четырех функций.

6.22. Возможность уменьшения числа переменных следует из задач 3.10, 4.10, 5.14, 6.12. После отождествления получаются функции, не принадлежащие $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, не более чем от одной переменной, не принадлежащие $\mathbf{S}$, не более чем от двух переменных и не принадлежащие $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, не более чем от трех переменных. Последнее число не может быть уменьшено, как показывает система ж) из задачи 6.2.

6.23. Функций от трех переменных конечное число. Число минимальных базисов не превосходит числа подмножеств этого множества, содержащих не более четырех элементов.

6.24. Обобщенная функция Шеффера $f(x_1, \ldots, x_n)$ должна не сохранять 0 и 1: $f(0, \ldots, 0)=1$, $f(1, \ldots, 1)=0$. Тогда она автоматически не монотонна. Таких функций будет 2^{2^n-2} (можно произвольно задавать значения на (2^n-2) наборах; см. § 2, задачи 2.2, 2.3). Кроме того, f — несамодвойственная функция. Найдем число функций f, не принадлежащих одновременно $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{S}$. Имеется $2^{2^{n-1}-1}$ функций, не принадлежащих $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, но принадлежащих $\mathbf{S}$ (они определяются значениями на $(2^{n-1}-1)$ наборах). Поэтому интересующее нас число равно $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}-1}(2^{2^{n-1}-1}-1)$. Остается заметить, что если функция не принадлежит $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{S}$, то она не принадлежит не только $\mathbf{M}$, но и $\mathbf{L}$ (см. указания к задаче 6.14). В самом деле, пусть f — линейная функция, $f \notin \mathbf{P}_0$, $f \notin \mathbf{P}_1$. Тогда свободный член в разложении f равен единице и число существенных переменных нечетно. Но такие функции самодвойственны. Таким образом, найденное нами число является числом обобщенных функций Шеффера.

6.25. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — обобщенная функция Шеффера. Мы показали при решении предыдущей задачи, что это равносильно тому, что f — несамодвойственная функция, не сохраняющая нуля и единицы. В силу задачи 3.10 у f можно так отождествить переменные, что получится несамодвойственная функция от двух переменных. Легко проверить, что при любом отождествлении переменных свойство не сохранять нуль (или единицу) остается. Поэтому после отождествления переменных мы вновь получим обобщенную функцию Шеффера. Итак, если минимальный базис состоит из одной функции, то это функция от двух переменных. Остается найти обобщенные функции Шеффера от двух переменных. Их две (можно проверить по формуле предыдущей задачи): $\overline{xy}$, $\overline{x \vee y}$.

6.26. См. таблицу в указаниях к задаче. Пусть $\Phi=\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ — базис из четырех функций. Причем φ_1 — функция, не сохраняющая нуль ($\varphi_1 \notin \mathbf{P}_0$). Как мы уже видели при решении задачи 6.21, она обязательно или немонотонна или несамодвойственна. Ясно, что если в базисе четыре функции, то φ_1 может не принадлежать лишь одному из этих классов ($\mathbf{M}$ или $\mathbf{S}$), а во все остальные она должна входить. В частности, $\varphi_1 \in \mathbf{P}_1$, т. е. $\varphi_1(0, \ldots, 0)=1$, $\varphi_1(1, \ldots, 1)=1$, а значит, φ_1 — несамодвойственная функции. Тогда она должна быть монотонной, а для этого в силу задачи 5.4 есть лишь одна возможность: $\varphi_1=1$. Аналогично показывается, что функция, не сохраняющая единицу, должна быть тождественным нулем. Итак, в базисе должны быть обе константы и мы заполнили две строки в таблице Поста. Две остальные функции из базиса должны обязательно сохранять и нуль, и единицу; одна из них должна быть монотонной нелинейной, другая немонотонной линейной. Начнем с последней функции (пусть это φ_3). Поскольку $\varphi_3 \in P_0$, свободный член в полиноме Жегалкина равен нулю, а так как $\varphi_3 \in P_1$, она существенно зависит от нечетного числа переменных: $\varphi_3 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k+1}$, $k \geqslant 1$. Эта функция самодвойственна. Тем самым мы заполнили третью строчку в таблице Поста. Что касается монотонной нелинейной функции, то она может быть как несамодвойственной (xy), так и самодвойственной ($xy \vee xz \vee yz$). В результате для четвертой строки в таблице Поста имеется две возможности.

6.27. В силу задачи 6.26 в любом, не обязательно минимальном, базисе из четырех функций имеются две функции — константы. Третья функция имеет вид $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k+1}$, причем годится любая из таких функций при $k \geqslant 1$. Отождествим все переменные, начиная с x_3. Получим функцию $x_1 + x_2 + x_3$. Полученная функция входит в те же классы, что и исходная. Дальнейшее отождествление переменных невозможно. Итак, третья функция в минимальном базисе имеет вид $x_1 + x_2 + x_3$. Теперь рассмотрим монотонную нелинейную функцию φ_4. В силу задачи 6.22, если базис минимален, то у φ_4 не более трех переменных. Мы видели (задача 5.5), что имеются только две монотонные нелинейные функции от двух переменных: xy и $x \vee y$. Остается исследовать случай трех переменных. Нужно найти монотонные нелинейные функции от трех переменных φ_4, принадлежащие P_0, P_1, у которых нельзя отождествить переменные так, чтобы функции остались нелинейными. Представим φ_4 в виде полинома Жегалкина:

$$\varphi_4(x, y, z) = axyz + b_1xy + b_2yz + b_3xz + c_1x + c_2y + c_3z.$$

Свободный член равен нулю, так как $\varphi_4 \in P_0$. Предположим, что $a = 1$. Отождествим какие-либо два аргумента. Без ограничения общности можно считать, что это y и z. Тогда у получившегося в результате полинома нелинейная часть будет равна $(1 + b_1 + b_3)xy$. Для нелинейности функции, представленной этим полиномом, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент $(1 + b_1 + b_3)$ был нечетным. Ясно, что у φ_4 всегда можно так переобозначить переменные, что это условие будет выполнено. Итак, при $a = 1$ всегда можно так отождествить переменные, чтобы получилась нелинейная функция. Поэтому $a = 0$.

Пусть теперь один из коэффициентов $b_i = 0$, например, $b_3 = 0$. Один из них (допустим b_1) обязательно равен 1 (в противном случае φ_4 была бы линейной функцией). Отождествим переменные x и z. В результате получится функция, в полиноме Жегалкина которой есть член $xy (b_1 = 1)$, т. е. получается нелинейная функция. Это невозможно. Значит, $b_1 = b_2 = b_3 = 1$.

Теперь рассмотрим коэффициенты c_i. Поскольку $\varphi_4 \in P_1$, то или они все равны нулю, или только один из них равен нулю. Пусть $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 0$. Тогда $\varphi_4(x, y, z) = xy + yz + xz + x + y$. Функция φ_4 не является монотонной, как показывает сравнение ее значений на наборах $(1, 0, 0)$ и $(1, 0, 1)$. Значит, этот случай невозможен, и $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Итак, в минимальном базисе функция φ_4 может иметь вид

$$xy, \quad x \vee y \quad \text{или} \quad xy + yz + xz = xy \vee yz \vee xz$$

(задача 4.3, в)).

§ 7. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ

1. Функционально замкнутые классы и общая постановка задач о полноте. В предыдущем параграфе мы выяснили, что вопрос о полноте системы функций алгебры логики приводит к рассмотрению предполных функционально замкнутых классов. Оказывается, что целый ряд вопросов сводится к изучению других функционально замкнутых классов, не обязательно предполных. Можно ожидать, что число различных функционально замкнутых классов бесконечно и даже что их множество имеет мощность континуум. Это связано с тем, что классы естественно задавать какими-либо системами функций, их порождающими. Поскольку множество функций алгебры логики счетно, множество различных систем функций имеет мощность континуум. Конечно, различные системы функций часто порождают один и тот же класс. Но нет никаких оснований заранее считать, что это отождествление настолько сильно, что число различных классов будет конечно или счетно. На самом деле оказывается, что множество классов счетно. Бесконечность этого множества — факт отнюдь не очевидный (см. конец этого параграфа).

Сейчас мы опишем принципиальную схему множества функционально замкнутых классов, отложив ее конкретное описание (перечень всех классов) до конца параграфа. Множество классов удобно представлять себе в виде дерева, вершины которого соответствуют классам. Если один класс входит в другой, то вершину, соответствующую первому, мы будем располагать под вершиной, соответствующей второму, причем эти вершины соединяются отрезками. Классы допускают естественное расположение по этажам. В основании дерева (в первом этаже) находится класс всех функций алгебры логики (обозначим его через **P**), во втором этаже — предполные классы, в третьем — классы, которые не содержатся ни в одном классе, кроме предполных; вообще, в $(i+1)$-м этаже — классы, которые не принадлежат предыдущим этажам и не содержатся ни в одном классе, не принадлежащем этим i этажам. Число этажей бесконечно. Существенно, что в каждом этаже имеется конечное число классов (и даже ограниченное некоторой константой) и что если класс содержится в некотором классе из i-го этажа, то он или сам принадлежит $(i+1)$-му этажу или содержится

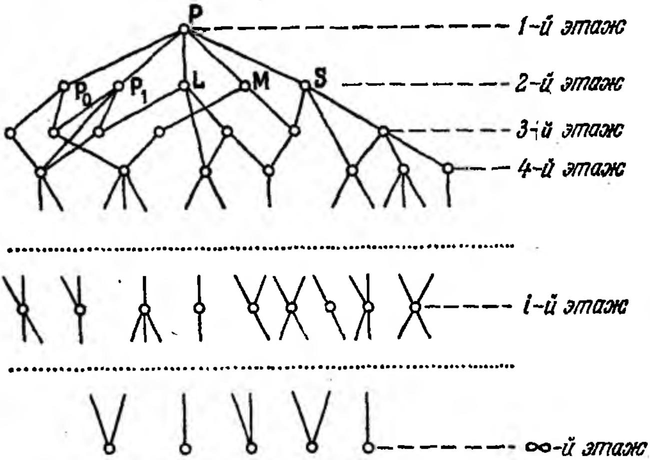


Рис. 2.

в некотором классе $(i+1)$-го этажа (см. сноску на стр. 82). В частности, это означает, что в каждый класс i-го этажа входит лишь конечное число (ограниченное общей константой) классов следующего этажа и что в нем существует конечный базис, причем число элементов в базисах для всех таких классов ограничено (подробнее см. ниже). Не следует думать, что, перебирая указанным способом этажи, мы рано или поздно рассмотрим все классы, т. е. что каждый класс принадлежит какому-либо этажу. Однако оказывается, что этим свойством обладают все классы, кроме конечного числа классов, в некотором смысле предельных («классов ∞-го этажа»). Итак, принципиальная схема имеет вид (этажи располагаются сверху вниз), указанный на рис. 2.

На схеме соединены вершины только для таких классов $Q_1 \subset Q_2$, для которых нет промежуточного класса Q_3:

$Q_1 \subset Q_3 \subset Q_2$, $Q_3 \neq Q_1$, $Q_3 \neq Q_2$. Вся часть этой схемы, начиная с 3-го этажа и ниже, не отвечает действительности (число классов в этаже, включеиия и т. д.) — здесь мы хотим лишь проиллюстрировать приведеиные выше общие замечания. Последняя строка в схеме соответствует предельным классам.

Теперь посмотрим, как используется таблица классов при решении задач алгебры логики. Общая задача ставится так. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая (вообще говоря, бесконечиая) совокупность множеств $R_1, \ldots, R_n, \ldots$ функций алгебры логики. Нужно найти алгоритм, позволяющий по каждой системе функций Ф узнавать, можно ли из входящих в Ф функций получить при помощи суперпозиций все функции, по крайней мере, из одного множества R_i, входящего в $\mathfrak{A}$. Систему фуикций, обладающих этим свойством, назовем $\mathfrak{A}$-п о л н о й.

В том случае, когда $\mathfrak{A}$ состоит из единственного множества — множества P всех функций алгебры логики,— этот вопрос превращается в вопрос о нолноте системы функций Ф (см. § 6). Но возможно и много других вариантов этой задачи, например, вопрос о том, когда система порождает какой-либо функционально замкнутый класс Q (тогда $\mathfrak{A}$ содержит единствеиный элемент Q). Если все множества, входящие в $\mathfrak{A}$, содержат по одной функции, то $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как некоторое множество функций. В этом случае задача ставится так: можно ли хотя бы одну функцию из $\mathfrak{A}$ представить в виде суперпозиции функций из Ф. Схема функционально замкнутых классов позволяет в принципе дать ответ на эти вопросы в тех же терминах, в каких теорема Поста дает ответ на вопрос о полноте.

Назовем функционально замкнутый класс Q *$\mathfrak{A}$-предполным*, если он не содержит ни одного из множеств $R_i \in \mathfrak{A}$, а любой класс, содержащий Q и не совпадающий с Q, содержит, по крайней мере, одно из миожеств $R_i \in \mathfrak{A}$. Ясно, что всякий класс, не содержащий множеств $R_i \in \mathfrak{A}$, содержится, по крайней мере, в одном $\mathfrak{A}$-предполном классе. Находить $\mathfrak{A}$-предполные классы часто можно следующим образом. Вначале проверим, какие из предельных классов содержат множества $R_i \in \mathfrak{A}$, а затем, двигаясь от класса **Р** вниз и рассматривая лишь классы, не содержащие предельных классов, обладающих этим свойством, отбираем $\mathfrak{A}$-предполные. Оии будут граиичными между классами, содержащими какие-либо из $R_i \in \mathfrak{A}$ и не содержащими ни одного из R_i.

Этот путь неприемлем, если какие-либо из предельных классов являются $\mathfrak{A}$-предполными, так как мы не можем при помощи указанной процедуры дойти до них за конечное число шагов. Это обстоятельство надо исследовать специально. Заметим, что даже если все функционально замкнутые классы известны, может оказаться очень трудным выяснение того, принадлежит ли некоторому классу хотя бы одно из множеств R_i или нет. Так что не следует думать, что знание таблицы превращает нахождение $\mathfrak{A}$-предполных классов в чисто автоматическую процедуру. Однако, если $\mathfrak{A}$-предполные классы уже найдены, то вопрос о $\mathfrak{A}$-полноте систем Φ действительно решается автоматически (по крайней мере, для конечных множеств Φ). При этом важно, что для каждого класса (как будет следовать из приводимого в конце параграфа списка классов) имеется алгоритм, позволяющий выяснять, содержится в нем некоторая функция или нет. Фактически эта проверка может оказаться громоздкой.

7.1. Доказать, что для $\mathfrak{A}$-полноты некоторой системы функций Φ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\mathfrak{A}$-предполного функционально замкнутого класса в Φ имелась функция, ему не принадлежащая. ▲

Пока что мы ничего не говорили о том, как находятся все функционально замкнутые классы. Эта очень трудная задача была решена Постом (см. [1], [2]). Мы здесь лишь приведем окончательный результат (в конце параграфа) и рассмотрим некоторые примеры. Заметим, что в общем результате важнее всего «угадать» все классы, хотя и доказательство того, что других классов нет, является весьма громоздким. Напомним, что в задаче о предполных классах (§ 6) после того, как они были «угаданы», доказательство теоремы о полноте не вызвало больших затруднений.

2. Расширенная суперпозиция. Сейчас мы рассмотрим один упрощенный вариант задачи о функционально замкнутых классах. Он во многом иллюстрирует ситуацию, имеющуюся в общем случае, хотя и значительно проще его.

Определение 7.1. Будем говорить, что функция f получена из системы Φ при помощи *расширенной суперпозиции*, если она получается из Φ при помощи операций суперпозиции (определение 2.3) и подстановки констант.

Другими словами, расширенными суперпозициями системы функций Φ являются обычные суперпозиции системы функций $\Phi \cup \{0, 1\}$, если Φ содержит хотя бы одну функцию, отличную от константы; в противном случае (если в Φ входят лишь константы) Φ совпадает с множеством расширенных суперпозиций. Достаточно заметить, что из функции, не являющейся константой, подстановками констант можно получить обе константы (нужно подставить в аргументы набор констант, на котором функция принимает соответствующее значение). Расширенной суперпозицией системы функций, сводящейся к константе, является лишь она сама.

7.2. Найти предполные классы для расширенной суперпозиции. ▲

7.3. Как связаны функционально замкнутые классы относительио обычной и расширенной суперпозиции? ▲

Итак, мы можем заполнить первые два этажа в таблице классов для расширенной суперпозиции (рис. 3).

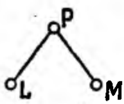


Рис. 3.

Определение 7.2. Если всякая функция из некоторого функционально замкнутого класса Q представима в виде суперпозиции функций из некоторого множества Φ, то мы будем говорить, что система функций Φ *Q-полна* (ср. с $\mathfrak{A}$-полнотой; здесь $\mathfrak{A}$ состоит из одного множества Q). Минимальную Q-полную систему Φ назовем *Q-базисом*.

7.4. Доказать, что система функций $\{x+y, 1\}$ является $\mathbf{L}$-базисом; относительно расширенной суперпозиции $\mathbf{L}$-базисом является система из одной функции $x+y$. ▲

Замечание. Всюду в дальнейшем в этом пункте мы, говоря о функционально замкнутых классах, если только не оговорено противное, будем иметь в виду классы относительно расширенной суперпозиции.

7.5. Найти $\mathbf{L}$-предполные классы *).

7.6. Найти все функционально замкнутые классы, содержащиеся в $\mathbf{L}$, и нарисовать схему включений. ▲

*) То есть максимальиые фуикциоиальио замкиутые классы в $\mathbf{L}$, ие совпадающие с $\mathbf{L}$. Это частный случай $\mathfrak{A}$-предполиых классов, отвечающий снстеме $\mathfrak{A}$ из одиого множества Q.

Итак, мы построили ту часть таблицы классов, которая связана с классом линейных функций **L**. Теперь нам нужно провести аналогичные построения для класса монотонных функций **M**. Они проводятся несколько сложнее, чем в предыдущем случае.

Определение 7.3 *). Обозначим через **D** класс функций, состоящий из дизъюнкций любого числа переменных $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k$ (в том числе и одной переменной x), через $\mathbf{D}^{01}$ **) — класс, полученный присоединением констант.

Аналогично, через **K** обозначим класс, состоящий из конъюнкций любого числа переменных $x_1 x_2 \ldots x_k$ (в том числе и единственной переменной x), а через $\mathbf{K}^{01}$ — класс, полученный присоединением констант.

7.7. Доказать, что $\mathbf{D}^{01}$ и $\mathbf{K}^{01}$ являются единственными **M**-предполными классами. ▲

7.8. Найти все функционально замкнутые классы, содержащиеся в **M**. Нарисовать схему включений. ▲

Итак, найдены все функционально замкнутые классы для расширенной суперпозиции. В частности, их оказалось конечное число. Приведем окончательную таблицу классов (рис. 4). Эту таблицу можно использовать при решении вопросов о $\mathfrak{A}$-полноте множеств функций относительно расширенной суперпозиции по схеме, указанной в п. 1 этого параграфа. Рассмотрим несколько примеров.

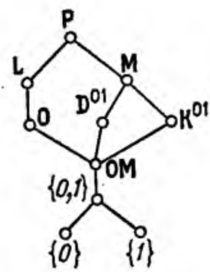


Рис. 4.

7.9. В каждом из нижеследующих случаев найти необходимые и достаточные условия на систему функций алгебры логики Φ, при выполнении которых расширенными суперпозициями функций из системы Φ могут быть представлены:

---

*) В этом определении вводятся классы для обычной суперпозиции. Классы $\mathbf{D}^{01}$ и $\mathbf{K}^{01}$ являются также классами для расширенной суперпозиции.

**) Мы будем пользоваться следующими обозначениями для функционально замкнутых классов. Если Q — класс, то через Q_0, Q_1 и Q_{01} будем обозначать соответственно его пересечения с классами $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ и их пересечением $\mathbf{P}_{01} = \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ (см. указания к задаче 7.6); через Q^0, Q^1 и Q^{01} — классы, полученные расширением Q при помощи соответственно 0, 1 и обеих констант 0, 1.

а) все линейные функции;

б) все монотонные функции;

в) функция $xy \vee yz \vee xz$;

г) функция $x+y+z$;

д) по крайней мере одна из двух функций: $xy \vee yz \vee xz$; $x+y+z$;

е) обе указанные в д) функции;

ж) функция $\bar{x}$;

з) всякая линейная функция или функция xy;

и) xy или $\bar{x}$;

к) xy и $\bar{x}$;

л) xy или $x \vee y$ или $\bar{x}$.

Другими словами, нужно найти условие $\mathfrak{A}$-полноты системы Φ относительно расширенной суперпозиции в тех случаях, когда $\mathfrak{A}$ состоит: а) из одного множества $\mathbf{L}$; б) из одного множества $\mathbf{M}$ и т. д. Мы предоставляем читателю продолжить этот список. ▲

В рассмотренных примерах все множества, входящие в $\mathfrak{A}$, описываются просто. После этого, по крайней мере в случае расширенной суперпозиции, $\mathfrak{A}$-предполные классы легко находятся. Однако элементы $\mathfrak{A}$ могут описываться сложно и неэффективно, в результате чего выяснение того, какие классы содержат элементы $\mathfrak{A}$, а какие нет, может оказаться трудным. Это обстоятельство в какой-то степени будет проиллюстрировано примерами, рассмотренными в этом и следующих параграфах (более сложный пример нахождения $\mathfrak{A}$-предполных классов см., например, в [3]). Начнем со сравнительно простого примера.

Определение 7.4. Пусть Φ — некоторая система функций алгебры логики. Будем говорить, что функция f *самодвойственно представима* через систему Φ, если f и f^+ представляются суперпозицией функций из Φ.

Определение 7.5. Система функций Φ называется *самодвойственно полной*, если совокупность функций, самодвойственно представимых через Φ, вместе с отрицанием $\bar{x}$ образует полную систему.

В этих определениях можно иметь в виду как обычную, так и расширенную суперпозиции.

7.10. Доказать, что всякая полная система функций является самодвойственно полной; обратное, вообще говоря, неверно (приведите пример). ▲

7.11. Доказать, что: 1) всякая самодвойственно полная система функций вместе с $\bar{x}$ образует полную систему;

2) не всякая система функций Φ, образующая вместе с $\bar{x}$ полную систему, является самодвойственно полной;

3) для того чтобы такая система Φ была самодвойственно полной, достаточно (но не необходимо!), чтобы в Φ вместе с каждой функцией входила двойственная. ▲

7.12. Доказать, что совокупность функций, самодвойственно представимых через функции из некоторого функционально замкнутого класса Q, образует функционально замкнутый класс, совпадающий с пересечением класса Q и двойственного ему класса Q^{+} (см. задачу 6.6): QQ^{+}. ▲

Вполне возможно, что понятие самодвойственной полноты покажется читателю несколько искусственным. В § 8 мы приведем пример задачи, естественно приводящей к этому понятию.

В соответствие с принятым соглашением мы будем связывать в этом пункте понятие самодвойственной полноты с расширенной суперпозицией. К этому случаю относится и приводимая ниже задача.

7.13. Найти необходимое и достаточное условие самодвойственной полноты системы функций. ▲

Мы заканчиваем на этом рассмотрение расширенной суперпозиции. Некоторые примеры нам встретятся в дальнейшем (в §§ 8, 9).

3. Самодвойственная полнота. Как мы уже говорили, общий случай значительно сложнее случая расширенной суперпозиции. Этому общему случаю и будет посвящена оставшаяся часть этого параграфа. Часто можно дать ответ на ту или иную задачу в терминах функционально замкнутых классов, не прибегая к таблице всех классов, а так или иначе угадав классы, имеющие отношение к рассматриваемой задаче. В этом пункте мы приведем пример такой задачи — задачу о самодвойственной полноте системы функций относительно обычной суперпозиции. Мы начинаем рассмотрения, позволяющие решить эту задачу. Однако советуем читателю попробовать решить эту задачу самостоятельно, не используя следующие ниже указания.

Нам потребуются некоторые новые функционально замкнутые классы.

Определение 7.6. Обозначим через $\mathbf{F}^{(2)}$ (соответственно через $\mathbf{G}^{(2)}$) совокупность таких функций $f(x_1,\ldots,x_n)$, что любые два набора $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, на которых $f(\alpha)=f(\beta)=0$ (соответственно $f(\alpha)=f(\beta)=1$), имеют общий нуль: $\alpha_i=\beta_i=0$ для некоторого $1\leqslant i\leqslant n$ (соответственно имеют общую единицу: $\alpha_i=\beta_i=1$ для некоторого i).

Отметим, что

а) функции $f\in\mathbf{F}^{(2)}$ ($f\in\mathbf{G}^{(2)}$) сохраняют единицу (соответственно нуль), т. е. $\mathbf{F}^{(2)}\subset\mathbf{P}_1$, $\mathbf{G}^{(2)}\subset\mathbf{P}_0$;

б) $1\in\mathbf{F}^{(2)}$, $0\in\mathbf{G}^{(2)}$;

в) $0\notin\mathbf{F}^{(2)}$, так как, считая функцию $f=0$ фиктивно зависящей от каких-то переменных, мы получаем, что она не удовлетворяет определению 7.6. Напомним (§ 2, определение 2.2), что мы не различаем функции, отличающиеся друг от друга фиктивными переменными, а потому рассматриваем свойства функций, не меняющиеся при их добавлении. Аналогично $1\notin\mathbf{G}^{(2)}$.

г) Множества $\mathbf{F}^{(2)}$ и $\mathbf{G}^{(2)}$ двойственны друг другу.

7.14. Доказать, что $\mathbf{F}^{(2)}$ и $\mathbf{G}^{(2)}$ — функционально замкнутые классы. ▲

Теперь мы можем сформулировать ответ на интересующий нас вопрос.

7.15. Доказать, что для самодвойственной полноты системы функций Φ необходимо и достаточно, чтобы в ней содержались функции: а) $\varphi_1\notin\mathbf{L}$; б) $\varphi_2\notin\mathbf{D}^{01}$; в) $\varphi_3\notin\mathbf{K}^{01}$; г) $\varphi_4\notin\mathbf{S}$; д) $\varphi_5\notin\mathbf{F}^{(2)}$; е) $\varphi_6\notin\mathbf{G}^{(2)}$. ▲

Быть может, хотя читателю и не удалось угадать результат, содержащийся в задаче 7.15, ему удастся доказать его, не прибегая к нашей дальнейшей помощи. Если же это не так, то ему следует перейти к решению следующих задач, цель которых заключается в том, чтобы постепенно подойти к решению задачи 7.15.

7.16. Доказать, что всякая несамодвойственная функция не принадлежит по крайней мере одному из классов $\mathbf{F}^{(2)}$, $\mathbf{G}^{(2)}$.

Следующая задача является некоторым уточнением задачи 3.10.

7.17. Перечислить иесамодвойственные функции, у которых нельзя отождествить переменные так, чтобы вновь получилась несамодвойственная функция. Какие из этих функций не входят в $\mathbf{F}^{(2)}$, а какие в $\mathbf{G}^{(2)}$? ▲

7.18. Пусть $f \notin \mathbf{F}^{(2)}$. Функцию от какого наименьшего числа переменных, также не входящую в $\mathbf{F}^{(2)}$, можно получить, отождествляя переменные у f? Аналогичный вопрос про функцию $f \notin \mathbf{G}^{(2)}$. ▲

7.19. Пусть система функций Φ содержит функции $\varphi_1 \notin \mathbf{S}$, $\varphi_2 \notin \mathbf{F}^{(2)}$ (соответственно $\varphi_1 \notin \mathbf{S}$, $\varphi_2 \notin \mathbf{G}^{(2)}$). Функцию от какого наименьшего числа переменных, не входящую в $\mathbf{F}^{(2)}$ (соответственно $\mathbf{G}^{(2)}$), можно представить в виде суперпозиции функций из Φ? ▲

Теперь читатель имеет все необходимое для того, чтобы решить задачу 7.15.

4. Третий этаж постовской схемы функционально замкнутых классов. Настоящий пункт посвящен задаче о нахождении функционально замкнутых классов. Эта задача не будет решена полностью. Мы уже знаем предполные классы — второй этаж. Построим сейчас следующий этаж и, более того *), для каждого предполного класса Q мы найдем Q-предполные классы. При этом нам существенную помощь окажут результаты двух предыдущих пунктов.

Для новых классов будем вводить обозначения, используя замечания в сноске на стр. 97 и в указании к задаче 7.6.

Начнем с классов монотонных и линейных функций.

7.20. Найти все $\mathbf{M}$-предполные классы. ▲

7.21. Найти все $\mathbf{L}$-предполные классы. ▲

Перед тем как перейти к рассмотрению других Q-предполных классов, вновь напомним идею доказательств Q-предполноты классов $R_1, \ldots, R_m \subset Q$ для какого-либо функционально замкнутого класса Q (см. решение задачи 6.18; указания к задаче 7.7). Нужно показать, что

1) ни один из классов R_i не совпадает с Q;

2) ни один из классов R_i не содержится в другом;

3) всякая система функций Φ, которая для каждого класса R_i содержит функцию $\varphi_i \notin R_i$, Q-полна.

Вопрос о Q-полноте тех или иных систем Φ, в свою очередь, сводится к нахождению некоторых стандартных Q-полных систем в Q (например, $\{xy, x \vee y\}$ для класса $\mathbf{M}$

*) Как мы увидим, эта задача действительно более обща (см. решение задачи 7.27).

и $\{x+y, 1\}$ для класса **L**) и последующему доказательству того, что через элементы Φ могут быть представлены все функции из какой-то стандартной системы. С этой задачи о стандартных Q-полных системах естественно и начинать вопрос о нахождении Q-предполных классов.

7.22. Доказать, что система функций $\{xy, x+y+1\}$ является $\mathbf{P}_1$-полной системой (и даже $\mathbf{P}_1$-базисом). ▲

7.23. Доказать, что система функций $\{x\rightarrow y, xy\}$ является $\mathbf{P}_1$-полной системой и $\mathbf{P}_1$-базисом. ▲

7.24. Найти все $\mathbf{P}_1$-предполные классы. ▲

7.25. Сформулировать аналоги задач 7.22, 7.23 и 7.24 для класса $\mathbf{P}_0$ функций, сохраняющих 0. Решить их по аналогии с решением этих задач, а также вывести из соответствующих задач про $\mathbf{P}_1$ при помощи закона двойственности (§ 3). ▲

Мы переходим к рассмотрению класса самодвойственных функций **S**. Начнем с вопроса о построении стандартного **S**-базиса. Этот вопрос потребует, как мы увидим, существенно новых соображений. Во всех предыдущих случаях мы так или иначе использовали нормальные формы или полиномы Жегалкина. Эти представления связаны с базисами из несамодвойственных функций и поэтому не могут быть непосредственно использованы при рассмотреии самодвойственных функций.

7.26. Доказать, что система функций $\{xy\vee yz\vee xz, \bar{x}\}$ является **S**-базисом. ▲

7.27. Найти **S**-предполные классы. ▲

Теперь найдены все Q-предполные классы для предполных классов Q. Составим схему включений (рис. 5).

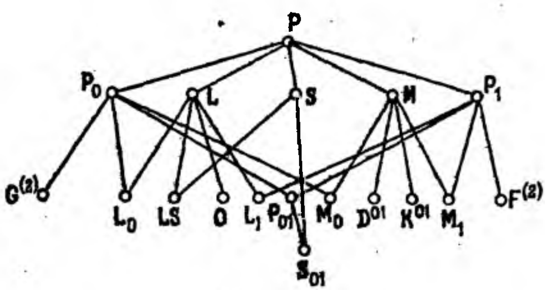


Рис. 5.

Итак, мы нашли весь третий этаж в схеме Поста, который состоит из всех Q-предполных классов, где Q — предполные классы, исключая $\mathbf{S}_{01} \subset \mathbf{P}_{01}$.

5. Постовская схема функционально замкнутых классов. Приведем без доказательства постовскую схему функционально замкнутых классов (рис. 6).

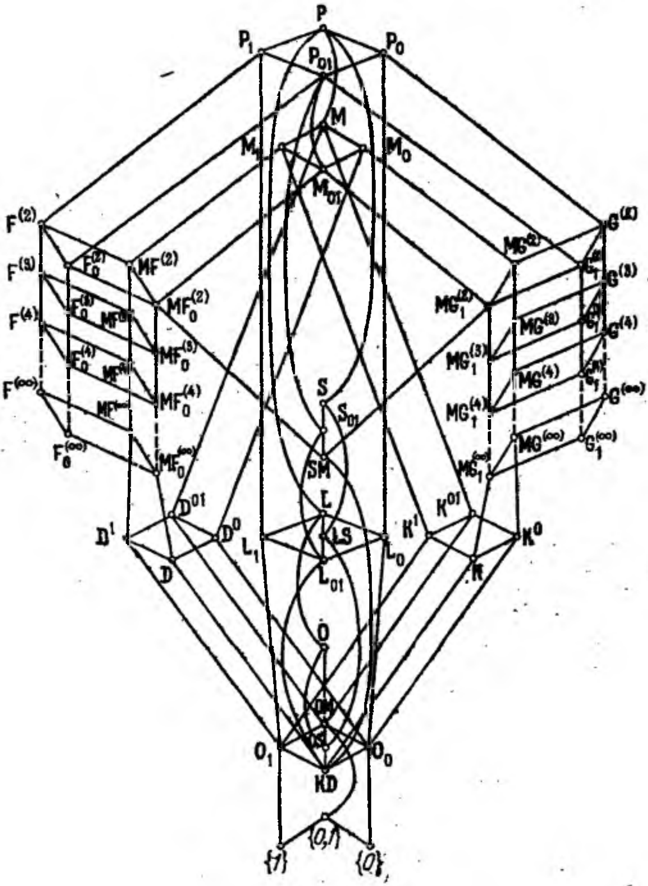


Рис. 6.

Сделаем необходимые пояснения. В приведенной схеме классы не располагаются по этажам (ср. рис. 2). Однако правило, в силу которого класс Q_1, содержащийся в Q_2, располагается в схеме ниже Q_2, сохранено. Поэтому по схеме можно легко определить, какому этажу принадлежит тот или иной класс Q. Для этого нужно рассмотреть всевозможные цепочки классов $\mathbf{P}=Q_1\supset Q_2\supset\ldots\supset Q_r=Q$ (все Q_i различны). Эти цепочки имеют конечную длину и различных цепочек имеется конечное число. Максимальная из длин этих цепочек r совпадает с номером этажа, в котором находится Q. Из схемы видно, что для каждого класса Q имеется не более пяти Q-предполных (причем пять только для $\mathbf{P}$).

Большинство классов, фигурирующих в схеме, уже определено *). Классы $\mathbf{F}^{(k)}$ определяются по аналогии с $\mathbf{F}^{(2)}$: любые k наборов, на которых функция $f\in\mathbf{F}^{(k)}$ равна нулю, должны иметь общий нуль в некотором разряде. Поскольку среди этих наборов могут быть совпадающие, $\mathbf{F}^{(k)}\supset\mathbf{F}^{(m)}$ при $k<m$. Классы $\mathbf{G}^{(k)}$ двойственны к $\mathbf{F}^{(k)}$. Класс $\mathbf{F}^{(\infty)}$ состоит из функций, у которых все наборы, на которых они равны нулю, имеют общий нуль; $\mathbf{F}^{(\infty)}\subset\mathbf{F}^{(k)}$. Имеются следующие предельные классы: $\mathbf{F}^{(\infty)}$, $\mathbf{F}^{(\infty)}_0$, $\mathbf{MF}^{(\infty)}$, $\mathbf{MF}^{(\infty)}_0$, $\mathbf{G}^{(\infty)}$, $\mathbf{G}^{(\infty)}_1$, $\mathbf{MG}^{(\infty)}$, $\mathbf{MG}^{(\infty)}_1$, $\mathbf{D}^1$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}^0$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{O}_1$, $\mathbf{O}_0$, $\mathbf{KD}$, $\{1\}$, $\{0\}$, т. е. существуют бесконечные цепочки вложенных классов, соединяющих их с $\mathbf{P}$. Опишем классы, состоящие из функций одной переменной:

$$\mathbf{O}=\{0,\ 1,\ x,\ \bar{x}\},\quad \mathbf{OM}=\{0,\ 1,\ x\},\quad \mathbf{OS}=\{x,\ \bar{x}\},$$
$$\mathbf{KD}=\{x\},\quad \mathbf{O}_1=\{1,\ x\},\quad \mathbf{O}_0=\{0,\ x\}.$$

7.28. Найти условия самодвойственной полноты при помощи схемы классов Поста (т. е. получить результат задачи 7.15). ▲

7.29. Описать (используя схему Поста) базисы в классе самодвойственных монотонных функций. ▲

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 7

7.2. $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$.

7.3. Функционально замкнутыми классами относительно расширенной суперпозиции являются те и только те функционально замкнутые классы относительно обычной суперпозиции, которые содержат обе константы или состоят из одной-единственной константы.

7.5. Имеется единственный $\mathbf{L}$-предполный класс—класс $\mathbf{O}$ функций от одной переменной (все они линейны). Он состоит из четырех функций: x, $\bar{x}=x+1$, 0, 1.

7.6. $\mathbf{L}$-предполный класс $\mathbf{O}$ мы нашли (задача 7.5). Все остальные классы содержатся в нем. Ими будут классы $\mathbf{OM}=\{x,\ 0,\ 1\}$, $\{0,\ 1\}$,

*) Наши обозначения отличаются от принятых в книгах [1], [2].

$\{0\}$, $\{1\}$. Заметим, что **OM** — этот класс монотонных функций от одной переменной (а также монотонных линейных функций). Мы будем неоднократно в дальнейшем обозначать через QR пересечение классов Q и R (как показывает пример **OM**=**ML**, это обозначение не однозначно). Схема включений изображена на рис. 7.

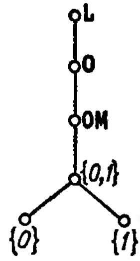


Рис. 7.

7.7. Для доказательства достаточно показать, что если в некоторой системе функций $\Phi \subseteq \mathbf{M}$ имеются функции $\varphi_1 \notin \mathbf{D}^{01}$ и $\varphi_2 \notin \mathbf{K}^{01}$, то система Φ будет **M**-полной. Мы уже неоднократно пользовались этим приемом доказательства $\mathfrak{A}$-предполноты классов (см. задачи 6.18, 7.5). При этом нужно лишь заметить, что ни один из классов $\mathbf{D}^{01}$ и $\mathbf{K}^{01}$ не содержится в другом.

Для доказательства **M**-полноты $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ достаточно показать, что их суперпозициями можно представить дизъюнкцию и конъюнкцию, так как эта система **M**-полна (задача 5.9). При доказательстве представимости xy и $x \vee y$ через φ_1, φ_2 удобно пользоваться представлением φ_1 и φ_2 в виде правильных ДНФ и КНФ (определение 5.3, задачи 5.12, 5.13).

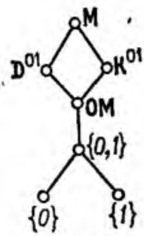


Рис. 8.

7.8. В обоих **M**-предполных классах имеется единственный предполный класс $\mathbf{OM}=\{x, 0, 1\}$. Его подклассы нам уже известны (задача 7.5). Схема включений изображена на рис. 8.

7.9. Заметим прежде всего, что $\mathfrak{A}$ состоит в б) из одного множества **M**; в в) из одного множества, состоящего, в свою очередь, из одной функции $xy \vee yz \vee xz$; в г) из одного множества $\{x+y+z\}$; в д) из двух множеств $\{xy \vee yz \vee xz\}$ и $\{x+y+z\}$; в е) из одного множества $\{xy \vee yz \vee xz,\ x+y+z\}$; в ж) из множества $\{\bar{x}\}$; в з) из множеств **L** и $\{xy\}$; в и) из множеств $\{xy\}$ и $\{\bar{x}\}$; в к) из множества $\{xy, \bar{x}\}$; в л) из множеств $\{xy\}$, $\{x \vee y\}$, $\{\bar{x}\}$.

В силу соображений, содержащихся в п. 1 § 7, вопрос о $\mathfrak{A}$-полноте сводится к вопросу о перечислении всех $\mathfrak{A}$-предполных классов. Ими же, в свою очередь, являются максимальные классы, не содержащие ни одного из множеств системы $\mathfrak{A}$. Максимальность означает, что всякий больший класс содержит хотя бы одно из множеств системы $\mathfrak{A}$.

7.10. Система $\{xy, x \vee y\}$ самодвойственно полна, но не полна.

7.11. 2) Система $\{xy, \bar{x}\}$ полна, но система, состоящая из одной функции xy, не является самодвойственно полной.

3) Достаточность очевидна, а как показывает пример полной (а значит, самодвойственно полной) системы $\{\overline{xy}\}$, это условие не является необходимым.

7.13. Эта задача следующим образом сводится к задаче о $\mathfrak{A}$-полноте. Множество R входит в $\mathfrak{A}$, если совокупность $\bar{R}$ функций, входящих в R вместе со своими двойственными, образует вместе с $\bar{x}$ полную систему. Таких множеств функций бесконечное число, однако можно эффективно выяснить, содержит ли некоторый функционально замкнутый класс по крайней мере одно из них или нет.

О т в е т. Для самодвойственной полноты (относительно расширенной суперпозиции) некоторой системы функций Φ необходимо и достаточно, чтобы в ней содержались функции: а) $\varphi_1 \notin \mathbf{L}$; б) $\varphi_2 \notin \mathbf{D}^{01}$; в) $\varphi_3 \notin \mathbf{K}^{01}$.

7.14. Доказывается индукцией по рангу суперпозиции.

7.15. См. условия следующих задач; *указания см. после указаний к задаче* 7.19.

7.16. Дать определение функции, не входящей в класс $\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{G}^{(2)})$, и воспользоваться задачей 3.6.

7.17. Классу $\mathbf{F}^{(2)}$ не принадлежат функции 0, xy, $\overline{xy}$, $\overline{x\vee y}$; классу $\mathbf{G}^{(2)}$ — функции 1, $x\vee y$, $\overline{xy}$, $\overline{x\vee y}$. Воспользоваться задачей 3.10.

7.18. Всегда можно получить функцию не более чем от трех переменных. Дальнейшее уменьшение числа переменных, вообще говоря, невозможно (привести примеры).

7.19. Всегда можно получить функцию от двух переменных. Дальнейшее уменьшение числа переменных, вообще говоря, невозможно.

Указания к задаче 7.15. При доказательстве необходимости удобно пользоваться задачей 7.13.

Достаточность. 1. Можно считать, что $\varphi_4\notin\mathbf{S}$ зависит от двух переменных (задача 3.10). Пусть для определенности $\varphi_4\notin\mathbf{F}^{(2)}$ (задача 7.16). Тогда мы в силу задачи 7.17 имеем одну из функций 0, xy, $\overline{xy}$, $\overline{x\vee y}$. Последние две функции — функции Шеффера. Нужно рассмотреть случаи, когда мы имеем какую-либо из функций $\psi_4=0$ или $\psi_4(x, y)=xy$.

2. Рассматривая теперь $\varphi_5\notin\mathbf{G}^{(2)}$ и используя результат задачи 7.19, можно получить одну из функций ψ_5: 1, $x\vee y$, $x+y$ (или опять-таки функцию Шеффера $\overline{x\vee y}$).

3. Нужно рассмотреть различные сочетания ψ_4 и ψ_5. Если мы имеем константы 0, 1, то все сводится к случаю расширенной суперпозиции (задача 7.13). Самодвойственная полнота системы $\{xy, x\vee y\}$ уже доказывалась. К этому случаю, в свою очередь, сводится случай $\{xy, x+y\}$.

4. Если мы имеем $x+y$, то $x+x=0$. Из нелинейной функции φ_1 можно получить нелинейную функцию от двух переменных (задача 4.12), а из нее или 1, или xy, или $x\vee y$, или $x\bar{y}$, а из нее, в свою очередь, xy. Все сводится к разобранным случаям.

5. Если мы имеем 0 и $x\vee y$, то из $\varphi_2\notin\mathbf{D}^{01}$ можно получить xy, если она монотонна. Если φ_2 немонотонна, то из нее можно получить немонотонную функцию от двух переменных, а из нее, в свою очередь, или 1, или $\bar{x}$, или $x+y$, или $x\bar{y}$. Во втором случае получаем полную систему в обычном смысле. Остальные случаи уже разобраны.

6. Случай $\{1, xy\}$ двойствен случаю 5.

7.20. Ответ. $\mathbf{D}^{01}$, $\mathbf{K}^{01}$, $\mathbf{M}_0$ (класс всех монотонных функций, сохраняющих нуль, т. е. это все монотонные функции, за исключением тождественной единицы (задача 5.4)), $\mathbf{M}_1$ (все монотонные функции, за исключением тождественного нуля). Замкнутость $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{M}_1$ следует из задачи 6.6.

7.21. Оказывается, что, как и в предыдущей задаче, $\mathbf{L}$-предполные классы состоят из пересечений $\mathbf{L}$ с другими предполными классами: $\mathbf{L}_0=\mathbf{L}\cap\mathbf{P}_0$, $\mathbf{L}_1=\mathbf{L}\cap\mathbf{P}_1$, $\mathbf{LS}=\mathbf{L}\cap\mathbf{S}$ и класса $\mathbf{O}$ функций от одной переменной, возникшего при рассмотрении $\mathbf{L}$-предполных классов относительно расширенной суперпозиции. Воспользоваться задачей 4.6 (см. также указания к задаче 6.14). Напомним также, что система функций $\{x+y, 1\}$ является $\mathbf{L}$-полной (задача 7.4).

7.22. Воспользоваться представлением функций из $\mathbf{P}_1$ в виде полинома Жегалкина. Чем характерны полиномы Жегалкина для функций из $\mathbf{P}_1$?

7.23. Воспользоваться представлением функций из $\mathbf{P}_1$ в СКНФ. Чем они характерны? См. задачу 1.17. При доказательстве того, что рассматриваемая система является $\mathbf{P}_1$-базисом, обратить особое внимание на доказательство того, что система $\{x\to y\}$ не является $\mathbf{P}_1$-полной. Воспользоваться классом $\mathbf{F}^{(2)}$.

7.24. $\mathbf{P}_1$-предполными классами являются пересечения $\mathbf{P}_1$ с предполными классами $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, а также уже встретившийся в предыдущей задаче класс $\mathbf{F}^{(2)}$, т. е. $\mathbf{P}_{01}$, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{F}^{(2)}$.

Пусть система функций $\Phi\subset\mathbf{P}_1$ для каждого из этих классов содержит функцию, в него не входящую. Приведем схему доказательства $\mathbf{P}_1$-полноты Φ:

1. Из функции $\varphi_1\notin\mathbf{P}_{01}$ можно получить 1.

2. Из функции $\varphi_2\notin\mathbf{M}_1$ и 1, используя результат задачи 5.15, можно получить $x\to y$ или $x+y+1$.

3. Из функции $\varphi_4\notin\mathbf{F}^{(2)}$ и 1 можно получить xy или $x+y+1$.

4. Если мы имеем $x\to y$ и xy, то система Φ будет $\mathbf{P}_1$-полной (задача 7.23).

5. Если же мы имеем $x+y+1$, то с ее помощью можно получить из φ_2 конъюнкцию xy. Мы вновь получаем $\mathbf{P}_1$-полную систему (задача 7.22).

7.25. Ответ: 1. Системы функций $\{x\vee y,\ x+y\}$ (а также $\{xy,\ x+y\}$ и $\{\bar{x}y,\ x\vee y\}$) будут $\mathbf{P}_0$-полными.

2. $\mathbf{P}_0$-предполные классы: $\mathbf{P}_{01}$, $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{G}^{(2)}$.

7.26. Пусть $f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\in\mathbf{S}$. Тогда функции $\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})=f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$ и $\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})=f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$ двойственны: $\varphi^+=\psi$. Обозначим через $m(x,y,z)$ функцию $xy+yz+xz=xy\vee yz\vee xz$. Заметим, что $m(x,y,1)=x\vee y$, $m(x,y,0)=xy$. Пусть теперь функция φ каким-либо образом представлена в виде суперпозиции xy, $x\vee y$ и $\bar{x}$ (можно было бы ограничиться одной из функций xy, $x\vee y$). Заменим теперь всюду в суперпозиции, представляющей φ, дизъюнкции функциями $m(*,*,x_n)$, а конъюнкции — функциями $m(*,*,\bar{x}_n)$. Опишем это преобразование несколько более подробно. Функция φ в некоторое число шагов получается из конъюнкций, дизъюнкций и отрицаний. Указанная замена производится последовательно на каждом шаге. Если, например, на некотором шаге дизъюнкция заменяется на $m(*,*,x_n)$, то вместо звездочек подставляются те функции, которые получились на предыдущем шаге из функций, которые подставлялись в аргументы дизъюнкции. Строгое определение следует дать по индукции. Мы этого делать не будем, а приведем лишь пример. Пусть

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)=((x_1\vee\bar{x}_2x_3)\vee\overline{x_1x_2})\,x_4.$$

Теперь последовательно заменяем

$$\bar{x}_2x_3\Rightarrow m(\bar{x}_2,x_3,\bar{x}_5);\qquad \overline{x_1x_2}\Rightarrow\overline{m(x_1,x_2,\bar{x}_5)};$$

$$x_1\vee\bar{x}_2x_3\Rightarrow m(x_1,m(\bar{x}_2,x_3,\bar{x}_5),x_5);$$

$$(x_1\vee\bar{x}_2x_3)\vee\overline{x_1x_2}\Rightarrow m(m(x_1,m(\bar{x}_2,x_3,\bar{x}_5),x_5),\overline{m(x_1,x_2,\bar{x}_5)},x_5)$$

и, наконец, получаем

$$\varphi\Rightarrow m(m(m(x_1,m(\bar{x}_2,x_3,\bar{x}_5),x_5),\overline{m(x_1,x_2,\bar{x}_5)},x_5),x_4,\bar{x}_5).$$

Показать, что после указанной замены в суперпозиции, представляющей $\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})$, мы получим $f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$. Тем самым будет доказана $\mathbf{S}$-полнота системы $\{m(x,y,z),\ \bar{x}\}$.

7.27. Ответ. **S**-предполными являются классы $\mathbf{SL} = \mathbf{S} \cap \mathbf{L}$, $\mathbf{S}_{01} = \mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_1$.

Пусть в системе функций Φ имеются функции $\varphi_1 \notin \mathbf{SL}$, $\varphi_2 \notin \mathbf{S}_{01}$.

1. Из φ_2 можно получить $\bar{x}$.

2. Из функции φ_1 в силу задачи 4.10 можно получить самодвойственную нелинейную функцию от трех переменных $\psi(x, y, z)$. Исходя из условия самодвойственности, исследовать полином Жегалкина для $\psi(x, y, z)$. Оказывается, что его нелинейная часть обязательно имеет вид $xy+yz+xz$. Линейную часть, используя $\bar{x}$, можно сделать нулем.

7.28. В качестве совокупности множеств $\mathfrak{A}$ (ср. решение задачи 7.13) можно взять такие самодвойственные классы, что **P** — единственный класс, содержащий их и $\bar{x}$. Это **P**, $\mathbf{P}_{01}$, **M** и $\mathbf{M}_{01}$. Далее следует действовать по схеме, изложенной в п.1.

7.29. **SM**-базис состоит из одного элемента — любой функции из **SM**, отличной от x.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 7

7.1. Необходимость следует из того, что в $\mathfrak{A}$-предполном классе не содержится ни одного множества $R_i \in \mathfrak{A}$. Для доказательства достаточности заметим, что функционально замкнутый класс, порождаемый системой функций Φ, не содержится ни в одном $\mathfrak{A}$-предполном классе, а всякий класс, не содержащий ни одного из множеств $R_i \in \mathfrak{A}$, содержится, по крайней мере, в одном $\mathfrak{A}$-предполном классе.

7.2. Всякий функционально замкнутый класс относительно расширенной суперпозиции функционально замкнут относительно обычной суперпозиции. Аналогично предполный класс относительно расширенной суперпозиции является предполным относительно обычной суперпозиции. Остается заметить, что классы **L**, **M** замкнуты, а $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, **S** не замкнуты относительно расширенной суперпозиции.

Можно было бы также заметить, что система функций, содержащая нелинейную и немонотонную функции, полна относительно расширенной суперпозиции (в силу теоремы Поста).

7.3. Мы уже заметили при решении предыдущей задачи, что функционально замкнутые относительно расширенной суперпозиции классы замкнуты в обычном смысле. Итак, нужно выяснить, какие из функционально замкнутых классов (в смысле § 6) замкнуты относительно расширенной суперпозиции. Если класс содержит хотя бы одну функцию, не являющуюся константой, то в этом случае класс должен содержать обе константы (как мы уже отмечали, их можно получить из этой функции при помощи расширенной суперпозиции). Еще остаются классы, состоящие из констант. Их три: $\{0, 1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$.

7.4. Ясно, что, рассматривая многократную суперпозицию $x+y$, можно получить сумму любого числа переменных: $x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k$. Подставив $x_k=1$, можно получить любую линейную функцию со свободным членом, равным 1. Остается заметить, что $x+x=0$. **L**-полнота доказана. Минимальность очевидна.

7.5. Докажем, что **O** — единственный **L**-предполный класс. Для этого достаточно доказать, что всякая функция $\varphi \in \mathbf{L}$, $\varphi \notin \mathbf{O}$, образует **L**-полную систему. Рассмотрев в случае необходимости суперпозицию φ с собой, можно считать, без ограничения общности, что φ содержит (существенно) не менее трех переменных. Подставляя нуль вместо всех переменных, кроме каких-нибудь трех (x_1, x_2, x_3), мы получим функцию

$x_1+x_2+x_3+a$. Если $a=1$, то подставим $x_3=1$; если $a=0$, то подставим $x_3=0$. Получаем функцию x_1+x_2, являющуюся **L**-базисом (задача 7.4).

7.6. К **OM** можно добавить лишь $\bar{x}\in$ **O**, после чего мы получим **O**. Аналогично к $\{0,1\}$ можно добавить лишь $\bar{x}$.

7.7. Пусть $\varphi_1\notin$ **D**^{01}. Покажем, что из нее при помощи расширенной суперпозиции можно получить конъюнкцию. Представим φ_1 в виде правильной ДНФ. Тогда, поскольку $\varphi_1\notin$ **D**^{01}, в ней найдется, по крайней мере, одна элементарная конъюнкция, содержащая более одного сомножителя (скажем, $x_1 \dots x_k$, $k\geqslant 2$). Подставим вместо всех переменных, кроме тех, которые входят в выбранную конъюнкцию ($x_1, \dots, x_k$), нули. При этом все элементарные конъюнкции, кроме $x_1 \dots x_k$, обратятся в нуль, так как в силу правильности ДНФ в каждой из них найдется хотя бы одна переменная, отличная от $x_1, \dots, x_k$. В результате мы получим конъюнкцию $x_1 \dots x_k$. Если подставить теперь во все переменные этой конъюнкции, кроме каких-нибудь двух, единицы, то мы получаем конъюнкцию двух переменных x_1x_2. Можно было бы также отождествить все переменные, кроме x_1.

Аналогично при помощи правильной КНФ для $\varphi_2\notin$ **K**^{01} можно построить $x_1\vee x_2$. Итак, в силу **M**-полноты системы $\{xy,\ x\vee y\}$ система $\{\varphi_1,\ \varphi_2\}$ также **M**-полна. Можно было бы также воспользоваться законом двойственности.

З а м е ч а н и е 1. Имеем $\varphi\in$ **M**, $\varphi\notin$ **D**^{01} тогда и только тогда, когда в ее правильной ДНФ имеется хотя бы одна элементарная конъюнкция не менее чем двух переменных. Это следует из единственности представления монотонной функции в виде правильной ДНФ (ср. критерий нелинейности функции, использующий полиномы Жегалкина, замечание в § 4, стр. 66). Аналогично $\varphi\notin$ **M**, $\varphi\notin$ **K**^{01} в том и только в том случае, когда в ее правильной КНФ есть хотя бы одна элементарная дизъюнкция, содержащая не менее двух членов.

З а м е ч а н и е 2. Из доказательства следует, что при помощи обычной суперпозиции из любой функции $\varphi\notin$ **D**^{01} и 0 можно получить конъюнкцию, а из $\varphi\notin$ **K**^{01} и 1 — дизъюнкцию.

7.9. Множество Φ должно содержать функции:

а) $\varphi_1\notin$ **O**, $\varphi_2\notin$ **M**;
б) $\varphi_1\notin$ **L**, $\varphi_2\notin$ **D**^{01}, $\varphi_3\notin$ **K**^{01};
в) $\varphi_1\notin$ **L**, $\varphi_2\notin$ **D**^{01}, $\varphi_3\notin$ **K**^{01};
г) $\varphi_1\notin$ **O**, $\varphi_2\notin$ **M**;
д) $\varphi_1\notin$ **O**, $\varphi_2\notin$ **D**^{01}, $\varphi_3\notin$ **K**^{01};
е) $\varphi_1\notin$ **L**, $\varphi_2\notin$ **M**;
ж) $\varphi\notin$ **M**;
з) $\varphi_1\notin$ **O**, $\varphi_2\notin$ **D**^{01};
и) $\varphi\notin$ **D**^{01};
к) $\varphi_1\notin$ **L**, $\varphi_2\notin$ **M**;
л) $\varphi\notin$ **OM**.

В каждом из этих случаев мы требуем наличия в Φ функций, не принадлежащих $\mathfrak{A}$-предполным классам.

7.10. См. пример в указаниях. В этой системе самодвойственно представима функция xy, а она вместе с $\bar{x}$ образует полную систему.

7.11. 2) См. пример в указаниях. Через xy самодвойственно представима лишь функция x.

7.13. Заметим, что если некоторое множество содержит какое-либо из множеств, входящих в $\mathfrak{A}$, то оно само входит в $\mathfrak{A}$. Поэтому вопрос о том, содержится ли в некотором функционально замкнутом классе Q какая-либо система функций, входящая в $\mathfrak{A}$, сводится к вопросу о том, входит ли сам класс Q в $\mathfrak{A}$ или нет, т. е. совпадает ли с классом всех функций алгебры логики $\mathbf{P}$ класс $\tilde{Q}$, порождаемый функциями, входящими в Q вместе со своими двойственными (самодвойственно представимыми через Q, задача 7.12), и функцией $\bar{x}$. Поскольку все классы эффективно описываются, этот вопрос легко решается при помощи схемы. Ясно, что максимальными классами, не входящими в $\mathfrak{A}$, будут классы $\mathbf{L}$ (так как $\bar{x}\in\mathbf{L}$ и $\tilde{\mathbf{L}}=\mathbf{L}$), $\mathbf{D}^{01}$ (так как в $\mathbf{D}^{01}$ самодвойственно представимы лишь константы 0,1 в x; $\widetilde{\mathbf{D}^{01}}=\mathbf{O}$), $\mathbf{K}^{01}$ (аналогично $\widetilde{\mathbf{K}^{01}}=\mathbf{O}$). Содержащие их классы $\mathbf{P}$ к $\mathbf{M}$, очевидно, уже самодвойственно полны. Итак, $\mathfrak{A}$-предполными являются классы $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}^{01}$, $\mathbf{K}^{01}$, и мы получаем результат, сформулированный в указаниях к решению этой задачи.

Замечание. При решении предыдущих задач мы видели, что характерным примером самодвойственно полной системы функций является система $\{xy,\ x\vee y\}$. Из результата задачи 7.13 следует, что если имеется произвольная самодвойственная система Φ для расширенной суперпозиции, то через ее элементы представимы функции xy, $x\vee y$. Действительно, через них представим либо весь класс $\mathbf{M}$, либо вообще все функции ($\mathbf{P}$).

7.14. Случаи $\mathbf{F}^{(2)}$ и $\mathbf{G}^{(2)}$ рассматриваются аналогично, поэтому ограничимся рассмотрением $\mathbf{F}^{(2)}$ (можно также воспользоваться законом двойственности).

Пусть Φ — какая-то совокупность функций из $\mathbf{F}^2$ ($\Phi\subset\mathbf{F}^{(2)}$) и уже известно, что суперпозиции ранга k также принадлежат $\mathbf{F}^{(2)}$ ($\Phi^{(k)}\subset\mathbf{F}^{(2)}$). Покажем, что $\Phi^{(k+1)}\subset\mathbf{F}^{(2)}$. Пусть $f\in\Phi^{(k+1)}$. Если f получается из некоторой функции $\varphi\in\Phi^{(k)}$ переименованием какой-то переменной (согласно а) определения 2.3), то интересующий нас факт следует непосредственно из определения $\mathbf{F}^{(2)}$. Пусть теперь $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, $\psi(y_1,\ldots,y_l)\in\Phi^{(k)}$ и

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n;\ y_1,\ \ldots,\ y_l)=$$
$$=\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ \psi(y_1,\ \ldots,\ y_l),\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n).$$

Надо показать, что $f\in\mathbf{F}^{(2)}$. Пусть мы имеем два набора значений ее переменных:

$$\gamma'=(\alpha_1',\ \ldots,\ \alpha_{i-1}',\ \alpha_{i+1}',\ \ldots,\alpha_n';\ \beta_1',\ \ldots,\ \beta_l'),$$
$$\gamma''=(\alpha_1'',\ \ldots,\ \alpha_{i-1}'',\ \alpha_{i+1}'',\ldots,\alpha_n'';\ \beta_1'',\ \ldots,\ \beta_l''),$$

на которых $f(\gamma')=f(\gamma'')=0$. Положим $\alpha_i'=\psi(\beta_1',\ \ldots,\ \beta_l')$, $\alpha_i''=\psi(\beta_1'',\ldots,\beta_l'')$. Тогда на наборах $\alpha'=(\alpha_1',\ldots,\alpha_{i-1}',\ \alpha_i',\ \alpha_{i+1}',\ldots,\alpha_n')$, $\alpha''=(\alpha_1'',\ \ldots,\ \alpha_{i-1}'',\ \alpha_i'',\ \alpha_{i+1}'',\ \ldots,\ \alpha_n'')$ функция φ равна нулю, а так как по предположению индукции $\varphi\in\mathbf{F}^{(2)}$, то эти наборы имеют общий нуль в каком-то разряде. Если $\alpha_j'=\alpha_j''=0$ при $j\neq i$, то наборы γ' и γ'' имеют общий нуль. Если $\alpha_i'=\alpha_i''=0$, т. е. $\psi(\beta')=$

$=\psi(\beta'')=0$, то наборы β', β'' имеют общий нуль, так как $\psi\in F^{(2)}$ (по предположению индукции), а значит, наборы γ' и γ'' также имеют общий нуль, т. е. $f\in F^{(2)}$. Доказательство закончено.

7.15. *Решение этой задачи см. после решения задачи* 7.19.

7.16. Функция $f\notin F^{(2)}$, если существуют такие наборы α, β, что $f(\alpha)=f(\beta)=0$, а для всякого i или $\alpha_i\neq\beta_i$, или $\alpha_i=\beta_i=1$. Аналогично дается определение функции $f\notin G^{(2)}$.

Пусть теперь $\varphi\notin S$. Тогда существует такой набор α, что $\varphi(\alpha)=\varphi(\overline{\alpha})$. Наборы α и $\overline{\alpha}$ не имеют ни общих нулей, ни общих единиц. Поэтому, если $\varphi(\alpha)=\varphi(\overline{\alpha})=0$, то $\varphi\notin F^{(2)}$; если $\varphi(\alpha)=\varphi(\overline{\alpha})=1$, то $\varphi\notin G^2$.

Замечание. Доказанному факту можно придать следующий вид. Пусть Φ — некоторое множество функций алгебры логики. Через $\overline{\Phi}$ обозначим его дополнение до множества всех функций P. Тогда доказанное утверждение означает, что $\overline{S}\subset\overline{F^{(2)}}\cup\overline{G^{(2)}}$. Это соотношение в силу обычных соотношений двойственности в теории множеств равносильно соотношению $S\supset F^{(2)}\cap G^{(2)}$, т. е. функции, одновременно принадлежащие классам $F^{(2)}$ и $G^{(2)}$, являются самодвойственными (этот факт также легко следует из определений).

7.17. Пусть $f\notin S$, и это свойство нарушается при любом отождествлении переменных. Пусть, кроме того, f не является константой. Тогда в силу задачи 3.10 функция f зависит не более чем от двух переменных. Итак, $f(x, y)\notin S$. Тогда для некоторого набора $(\alpha_1;\ \alpha_2)$ имеем $f(\alpha_1, \alpha_2)=f(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2)$. Если $\alpha_1=\alpha_2$, то, отождествляя x и y, мы получаем какую-либо из констант, т. е. снова несамодвойственную функцию. Значит, $\alpha_1\neq\alpha_2$. Пусть $f(0, 1)=f(1, 0)=0$. В силу только что проведенного рассуждения $f(0, 0)=f(1, 1)$, и остаются две возможности, либо $f(0, 0)=0$ и тогда $f(x, y)=xy$, либо $f(0, 0)=1$ и тогда $f(x, y)=\overline{x}\,\overline{y}$. Аналогично рассматривается случай $f(0, 1)=f(1, 0)=1$. В этом случае либо $f(x, y)=x\vee y$, либо $f(x, y)=\overline{x}\vee\overline{y}$. Очевидно, что дальнейшее отождествление переменных у этих функций с сохранением несамодвойственности невозможно. Итак, имеется шесть функций, обладающих нужным свойством: 0, 1, xy, $x\vee y$, $\overline{x}\,\overline{y}$, $\overline{x}\vee\overline{y}$. Вопрос о принадлежности этих функций классам $F^{(2)}$ и $G^{(2)}$ легко решается непосредственно, исходя из определений. Случай констант уже обсуждался. Рассмотрим для примера функцию $f(x, y)=x\vee y$. Поскольку $f(0, 1)=f(1, 0)=1$, то функция f не входит в $G^{(2)}$. Что касается функций $\overline{x}\,\overline{y}$ и $\overline{x}\vee\overline{y}$, то это функции Шеффера, а потому они не входят ни в один предполный, а значит, и вообще ни в один функционально замкнутый класс, отличный от P.

7.18. Рассмотрим, например, случай $f(x_1, \ldots, x_n)\notin G^{(2)}$. Случай $f\notin F^{(2)}$ рассматривается аналогично, а кроме того, он может быть получен при помощи закона двойственности. При решении задачи 7.16 мы дали определение функции $f\notin G^{(2)}$. Должны существовать наборы $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, не имеющие общих единиц, на которых $f(\alpha)=f(\beta)=1$. Разделим переменные $x_1, \ldots, x_n$ на три группы. В первую включим те переменные x_i, для которых $\alpha_i=0$, $\beta_i=1$, во вторую — те переменные x_i, для которых $\alpha_i=1$, $\beta_i=0$, и в третью — те переменные x_i, для которых $\alpha_i=\beta_i=0$. Отождествим переменные внутри каждой из этих групп. Получим функцию $\varphi(y_1, y_2, y_3)$, для которой $\varphi(0, 1, 0)=\varphi(1, 0, 0)=1$, т. е. $\varphi\notin G^{(2)}$. Итак, доказана первая часть утверждения: возможность получить функцию от трех переменных.

Теперь нужно привести пример функции от трех переменных, у которой дальнейшее уменьшение числа переменных невозможно. Возьмем функцию $\varphi(x, y, z)$ такую, что $\varphi(0, 1, 0)=\varphi(1, 0, 0)=1$, а на всех остальных наборах $\varphi=0$, т. е. функция $\varphi\notin G^{(2)}$ «лишь из-за одной пары наборов» (0, 1, 0) и (1, 0, 0). Ясно, что нельзя отождествить переменные так, чтобы оба этих набора соответствовали каким-либо наборам функции с отождествленными переменными (так как наборы совпадают лишь в одном разряде). Проведем те же рассуждения более строго. Имеем $\varphi(x, y, z)=\bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{z}=\bar{z}(\bar{x}y\vee x\bar{y})=\bar{z}(x+y)$. Переменные x и y входят в φ симметрично; поэтому достаточно рассмотреть два возможных отождествления: x, y; x, z и показать, что при этом получаются функции, принадлежащие $G^{(2)}$ (тем более тогда отождествление всех трех переменных приведет к функции из $G^{(2)}$; впрочем, это видно и непосредственно). Получаем $\varphi(x, x, z)=0\in G^{(2)}$; $\varphi(x, y, x)=\bar{x}(x+y)=\bar{x}y\in G^{(2)}$, так как единственый набор (0, 1), на котором $\bar{x}y$ равна 1, содержит 1. Аналогично показывается, что у функции $\bar{z}(x+y)$ нельзя отождествить переменные так, чтобы вновь получилась функция, не принадлежащая $F^{(2)}$.

7.19. Покажем, что можно получить функцию из $F^{(2)}$ не более чем от двух переменных. Отождествим переменные у φ_1 так, чтобы получилась несамодвойственная функция ψ_1 от двух переменных. В силу задачи 7.17 полученная функция либо не будет принадлежать $F^{(2)}$, либо является одной из функций 1 или $x\vee y$. В первом случае наша цель достигнута. Если же $\psi_1\in F^{(2)}$, то рассмотрим $\varphi_2\notin F^{(2)}$. В силу предыдущей задачи из φ_2, отождествляя переменные, можно получить такую функцию от трех перемеиных $\psi_2(x, y, z)$, что $\psi_2(0, 1, 1)=\psi_2(1, 0, 1)=0$. В зависимости от того, какая из функций 1 или $x\vee y$ у нас имеется, рассмотрим функции $\nu_1(x, y)=\psi_2(x, y, 1)$ или $\nu_2(x, y)=\psi_2(x, y, x\vee y)$. Для обеих этих функций имеем $\nu_i(0, 1)=\nu_i(1, 0)=0$, т. е. $\nu_i\notin F^{(2)}$, и, значит, искомая функция построена. Пример функции $\varphi(x, y)=xy$, $\varphi\notin S$, $\varphi\notin F^{(2)}$ показывает, что дальнейшее уменьшение числа переменных, вообще говоря, невозможно.

Двойственный случай ($\varphi_2\notin G^{(2)}$) рассматривается аналогично или получается из рассмотренного при помощи закона двойственности.

Решение задачи 7.15. 1. Необходимость. Необходимость условий а), б), в) по существу была проверена при решении задачи 7.13. Проверим необходимость условия г). Если бы все функции из Φ были самодвойственными, то этим же свойством обладали бы и все представимые через них и, тем более, самодвойственно представимые функции. Поскольку $\bar{x}\in S$, мы не получим полной системы. Рассмотрим теперь условие $\varphi_5\notin F^{(2)}$. Поскольку $G^{(2)}$ — двойственный класс к $F^{(2)}$, через функции из $F^{(2)}$ самодвойственно представимы функции из $F^{(2)}\cap G^{(2)}$ (см. задачу 7.12). Но в силу замечания к решению задачи 7.16 $F^{(2)}\cap G^{(2)}\subset S$. Добавление к $F^{(2)}\cap G^{(2)}$ функции $\bar{x}\in S$ не выводит за пределы S. Аналогично проверяется необходимость условия е).

2. **Достаточность.** Пусть $\varphi_4 \notin \mathbf{S}$ зависит от двух переменных и для определенности не принадлежит $\mathbf{F}^{(2)}$ (случай $\varphi_4 \notin \mathbf{G}^{(2)}$ рассматривается аналогично). Тогда в силу задачи 7.17 φ_4 является одной из функций 0, xy, $\overline{xy}$, $\overline{x \vee y}$. Последние две функции являются функциями Шеффера, а потому в этих случаях система Φ полна и, тем более, самодвойственно полна.

Итак, можно считать, что у нас имеется одна из функций $\psi_4 = 0$ или $\psi_4(x, y) = xy$. В силу задачи 7.19 из $\varphi_4 \notin \mathbf{S}$ и $\varphi_5 \notin \mathbf{G}^{(2)}$ можно получить функцию $\psi_5(x, y) \notin \mathbf{G}^{(2)}$ (от двух переменных). Посмотрим более внимательно, какой может быть функция ψ_5. Должна быть пара наборов, не имеющих общих единиц, на которых ψ_5 равна 1. Это $(0, 0)$ и $(1, 1)$, либо $(0, 1)$ и $(1, 0)$. В первом случае, отождествляя переменные у ψ_5, мы получим тождественную 1. Пусть эта возможность не осуществляется. Тогда $\psi_5(0, 1) = \psi_5(1, 0) = 1$, причем не может быть, чтобы $\psi_5(0, 0) = \psi_5(1, 1) = 1$. Остаются три возможности: $\psi_5(0, 0) = 0$, $\psi_5(1, 1) = 1$; $\psi_5(0, 0) = 0$, $\psi_5(1, 1) = 0$; $\psi_5(0, 0) = 1$, $\psi_5(1, 1) = 0$. В этих случаях функция ψ_5 имеет соответственно вид $x \vee y$, $x + y$, $\overline{xy}$. В последнем случае мы имеем функцию Шеффера, и в дальнейших рассмотрениях нет необходимости. Итак, с одной стороны, у нас имеется одна из функций ψ_4: 0, xy; с другой стороны, одна из функций ψ_5: 1, $x \vee y$, $x + y$.

Рассмотрим различные возможные комбинации. Если мы имеем константы 0, 1, то доказываемый результат следует из критерия самодвойственной полноты для расширенной суперпозиции (задача 7.13). Самодвойственная полнота системы $\{xy, x \vee y\}$ уже неоднократно отмечалась. Из функций $\psi_5(x, y) = x + y$, $\psi_4(x, y) = xy$ можно получить дизъюнкцию $x \vee y = xy + x + y = \psi_5(xy, \psi_5(x, y))$, т. е. этот случай сводится к предыдущему. Остаются двойственные случаи $\{1, xy\}$, $\{0, x \vee y\}$ и случай $x + y$ (так как $x + x = 0$, наличие 0 не дает ничего нового).

Начнем с последнего случая. Тогда в силу задачи 4.11 из нелинейной функции φ_1 и 0 можно получить нелинейную функцию $\psi_1(x, y) = xy + \alpha x + \beta y + \gamma$ (от двух переменных). Если $\gamma = 1$, то $\psi_1(0, 0) = 1$, и мы приходим к уже разобранному случаю, когда имеются обе константы. Итак, $\gamma = 0$. Если $\alpha = \beta = 0$, то $\psi_1(x, y) = xy$, и мы вновь получаем разобранный случай $\{xy, x + y\}$. Аналогично обстоит дело со случаем $\alpha = \beta = 1$; тогда $\psi_1(x, y) = x \vee y$. Оставшиеся два случая одинаковы. Пусть $\alpha = 1$, $\beta = 0$; тогда $\psi_1(x, y) = x\overline{y}$. Имеем $\psi_1(x, \psi_1(x, y)) = x(\overline{x} \vee y) = xy$ (см. формулу (2.24)). И в этом случае мы попадаем в уже рассматривавшуюся ситуацию.

Пусть мы имеем функции 0, $x \vee y$. Рассмотрим функцию $\varphi_2 \notin \mathbf{D}^{01}$. Если φ_2 монотонна, то в силу замечания 2 к решению задачи 7.8 из φ_2 и 0 можно получить конъюнкцию xy, и в этом случае все доказано. Если же $\varphi_2 \notin \mathbf{M}$, то в силу задачи 5.15 из φ_2 и 0 можно получить немонотонную функцию от двух переменных $\psi_2(x, y)$, причем $\psi_2(1, 0) = 1$, $\psi_2(1, 1) = 0$. Если $\psi_2(0, 0) = 1$, то, отождествляя x с y, мы получаем отрицание, а в результате полную систему. Пусть теперь $\psi_2(0, 0) = 0$. Могут представиться две возможности: либо $\psi_2(x, y) = x + y$, либо $\psi_2(x, y) = x\overline{y}$. Случай $\{x + y, x \vee y\}$ уже разобран. Из $x\overline{y}$, как мы видели при рассмотрении предыдущего случая, можно получить xy, а тогда мы имеем $x \vee y$ и xy. Все случаи разобраны, и доказательство закончено.

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что замечание к решению задачи 7.13 переносится на случай обычной суперпозиции (из самодвойственно полной системы всегда можно получить дизъюнкцию и конъюнкцию).

7.20. Как мы уже неоднократно отмечали (см. указания к задаче 7.7), достаточно показать, что ни один из этих классов не содержится в другом (очевидно) и что если в системе функций Φ имеются монотонные функции $\varphi_1 \notin \mathbf{D}^{01}$, $\varphi_2 \notin \mathbf{K}^{01}$, $\varphi_3 \notin \mathbf{M}_0$, $\varphi_4 \notin \mathbf{M}_1$, то эта система $\mathbf{M}$-полна. Единственная функция, не входящая в $\mathbf{M}_0$,— это $\varphi_3 = 1$. Аналогично $\varphi_4 = 0$. Таким образом, $\mathbf{M}$-полнота Φ следует из соответствующего результата для расширенной суперпозиции (задача 7.7).

7.21. Пусть в системе линейных функций Φ имеются функции $\varphi_1 \notin \mathbf{L}_0$, $\varphi_2 \notin \mathbf{L}_1$, $\varphi_3 \notin \mathbf{LS}$, $\varphi_4 \notin \mathbf{O}$. Покажем, что система Φ будет $\mathbf{L}$-полной. Отождествим в φ_4 максимальное четное число переменных так, чтобы осталось не менее одной переменной (рассматриваются лишь существенные переменные). Поскольку $x + x = 0$, получим функцию ψ_4 от двух $(x_1 + x_2 + a)$ или от трех переменных $(x_1 + x_2 + x_3 + a)$. Отождествим теперь максимальное четное число переменных у функций φ_1, φ_2, φ_3. Из φ_1 получим функцию $\psi_1 = 1$ или $\psi_1(x) = x + 1$ (так как у φ_1 свободный член — единица); из φ_2 — функцию $\psi_2 = 0$ или $\psi_2(x) = x + 1$ (так как или у ψ_2 свободный член — нуль и число переменных четно, или свободный член — единица и число переменных нечетно); из φ_3 — функции $\psi_3 = 0$ или $\psi_3 = 1$ (так как у самодвойственной линейной функции число переменных четно). Итак, или обе функции ψ_1, ψ_2 — константы или по крайней мере одна из них — отрицание. Но тогда из ψ_3 мы можем получить вторую константу. Итак, мы имеем обе константы.

Из функции вида $x_1 + x_2 + b$ можно всегда при помощи суперпозиции получить функцию вида $x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3 + b) + b$. Итак, можно считать, что мы имеем функцию $x_1 + x_2 + x_3 + a$. Подставляя $x_3 = a$, получаем $x_1 + x_2$. Остается заметить, что $\{x_1 + x_2, 1\}$ является $\mathbf{L}$-полной системой.

7.22. Полиномы Жегалкина для функций из $\mathbf{P}_1$ содержат нечетное число одночленов с ненулевыми коэффициентами (к числу одночленов мы относим и свободный член). Это условие является необходимым и достаточным. Поскольку все одночлены ненулевой степени можно выразить через конъюнкцию xy, вопрос сводится к представимости линейных функций из $\mathbf{P}_1$: $x_1 + \ldots + x_k + a$, где $a = 1$ при четном k и $a = 0$ при нечетном k. Ясно, что все эти функции представимы через $x + y + 1$ (при $k = 0$ имеем $x + x + 1 = 1$; далее, последовательно подставляя вместо одной из переменных функцию $x + y + 1$, мы можем получить все нужные функции; строгое доказательство можно провести индукцией по k). Итак, $\mathbf{P}_1$-полнота системы $\{xy, x + y + 1\}$ доказана. Очевидно, что она является также $\mathbf{P}_1$-базисом, так как из $x + y + 1$ можно получать лишь линейные функции, а из xy — лишь функции из $\mathbf{K}$.

7.23. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathbf{P}_1$. Если $f = 1$, то $1 = x \to x$. Если же $f \neq 1$, то ее можно представить в виде СКНФ (формула (2.17)):

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{f(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n) = 0} x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}.$$

Ясно, что СКНФ, представляющие функции из $\mathbf{P}_1$, выделяются тем, что в них отсутствует элементарная дизъюнкция $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n$, в которую все переменные входят под знаком отрицания. Поскольку в систему $\{x \to y, xy\}$ входит конъюнкция, для доказательства ее P_1-полноты достаточно показать представимость через $x \to y$ и xy всех элементарных дизъюнкций $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$, отличных от $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n$. Мы покажем сейчас, что все эти дизъюнкции можно выразить даже через одну функцию $x \to y$.

Как мы уже видели при решении задачи 1.17 (вспомним, что $x \to y = \bar{x} \vee y$),

$$x \vee y = (x \to y) \to y = \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee y = x\bar{y} \vee y.$$

Покажем, что элементарную дизъюнкцию

$$\bar{x}_1 \vee \ldots \vee \bar{x}_m \vee y_1 \vee \ldots \vee y_l, \qquad l \neq 0,$$

можно выразить через $x \to y = \bar{x} \vee y$. Доказательство будем вести индукцией по $n = m + l$. Основание индукции (например, для $n = 2$) уже проведено. Пусть для числа переменных, меньшего n, представимость доказана. Можно считать, что $n \geqslant 3$. Рассмотрим два случая. Если $l \geqslant 2$, то по предложению индукции можно представить $\bar{x}_1 \vee \ldots \vee \bar{x}_m \vee y_1 \vee \ldots \vee y_{l-1}$. Подставляя вместо y_{l-1} дизъюнкцию $y_{l-1} \vee y_l$ (которую также можно представить), мы получаем искомую функцию. Если же $l = 1$, то $m \geqslant 2$ и можно представить $\bar{x}_1 \vee \ldots \vee \bar{x}_{m-1} \vee y_1$. Мы получим искомую функцию, если вместо y_1 представим $\bar{x}_m \vee y = x_m \to y$. Тем самым P_1-полнота доказана.

Мы уже отмечали при решении предыдущей задачи, что одна функция xy не образует P_1-полную систему. Аналогичный факт имеет место и для функции $x \to y$, но он не столь очевиден. Дело в том, что $x \to y$ не принадлежит ни одному предполному классу, исключая P_1. Поэтому необходимо прибегнуть к какому-либо из непредполных функционально замкнутых классов. Подходящий класс уже встречался в наших рассмотрениях: это $F^{(2)}$. Имеем $x \to y \in F^{(2)}$, так как она равна нулю лишь на наборе $(1, 0)$, содержащем нуль. Ясно также, что $F^{(2)} \subset P_1$, но не совпадает с P_1 (например, $xy \notin F^{(2)}$, $xy \in P_1$).

7.24. Докажем, что классы P_{01}, L_1, M_1, $F^{(2)}$ — полная система P_1-предполных классов. Ясно, что P_{01}, L_1, M_1 не совпадают с P_1, так как это противоречило бы предполноте P_1 (тогда было бы $P_1 \subset P_0$, или $P_1 \subset M$, или $P_1 \subset L$); для $F^{(2)}$ это доказано при решении предыдущей задачи. Без труда строятся примеры функций, показывающие, что ни один из этих классов не содержится в другом (постройте эти примеры!).

Теперь покажем, что если в системе функций Φ имеются функции $\varphi_1 \notin P_{01}$, $\varphi_2 \notin L_1$, $\varphi_3 \notin M_1$, $\varphi_4 \notin F^{(2)}$, то система Φ является P_1-полной.

1) Отождествляя переменные у функции φ_1, сохраняющей единицу, но не сохраняющей нуля, мы получаем тождественную единицу.

2) Возьмем теперь немонотонную функцию φ_3. Отождествляя у нее переменные и подставляя константу 1, в силу задачи 5.15 можно получить немонотонную функцию от двух переменных $\psi_3(x, y)$, причем $\psi_3(0, 0) = 1$, $\psi_3(1, 0) = 0$. Далее, $\psi_3(1, 1) = 1$, так как φ_3 сохраняла 1, а это свойство сохраняется при отождествлении переменных и подстановке единицы. Для функции ψ_3 остаются две возможности: либо $\psi_3(0, 1) = 1$ и тогда $\psi_3(x, y) = x \to y$, либо $\psi_3(0, 1) = 0$ и тогда $\psi_3(x, y) = x + y + 1$.

3) Теперь мы проделаем аналогичные преобразования с функцией $\varphi_4 \notin \mathbf{F}^{(2)}$. Поскольку $1 \notin \mathbf{S}$, в силу задачи 7.13, отождествляя переменные и подставляя единицу, мы можем получить функцию $\psi_4(x, y) \notin \mathbf{F}^{(2)}: \psi_4(0, 1) = \psi_4(1, 0) = 0$. Поскольку $\varphi_4 \in \mathbf{P}_1$, а значит, и $\psi_4 \in \mathbf{P}_1$, имеем $\psi_4(1, 1) = 1$. Если $\psi_4(0, 0) = 0$, то $\psi_4(x, y) = xy$; если же $\psi_4(0, 0) = 1$, то $\psi_4(x, y) = x + y + 1$.

4) Сопоставляя 2) и 3), получаем, что или мы имеем функцию $x + y + 1$, или мы имеем функции xy, $x \to y$. Во втором случае в силу задачи 7.23 мы имеем $\mathbf{P}_1$-полную систему.

5) Пусть мы имеем функцию $x + y + 1$. Рассмотрим функцию $\varphi_2 \notin \mathbf{L}_1$. Поскольку у нас есть константа 1, мы можем получить из φ_2 нелинейную функцию от двух переменных $\psi_2(x, y) = xy + \alpha x + \beta y + \gamma$ (задача 4.11). Если $\alpha \neq 0$, то, подставляя в $x + y + 1$ вместо y функцию $\psi_2(x, y)$, мы получим нелинейную функцию от двух переменных с $\alpha = 0$. Аналогично можно обратить в нуль коэффициент при y. Получим функцию $xy + \delta$. Эта функция должна сохранять 1, так как мы получили ее в результате суперпозиции функций из $\mathbf{P}_1$. Поэтому $\delta = 0$, и мы получили конъюнкцию xy (впрочем, $xy + 1$ — функция Шеффера). В результате в силу задачи 7.22 мы имеем $\mathbf{P}_1$-полную систему. Доказательство закончено.

Замечание. В ряде рассмотренных выше задач, в частности в задаче 7.24, мы видели, что при изучении Q-предполных классов для предполных классов Q важную роль играют пересечения класса Q с другими предполными классами. Однако не всякий Q-предполный класс имеет такой вид (например, класс $\mathbf{F}^{(2)}$ в $\mathbf{P}_1$). С другой стороны, не всякое пересечение класса Q с предполными классами является Q-предполным. Например, класс $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S} \cap \mathbf{P}_1$ не является $\mathbf{P}_1$-предполным; $\mathbf{S}_1$ содержится, в частности, в $\mathbf{P}_{01}$, не совпадая с ним. Можно привести и другие примеры.

7.26. При $x_n = 1$ функции m превращаются в дизъюнкции в тех случаях, когда они заменяют дизъюнкции ($m(*, *, x_n)$), и в конъюнкции, когда они заменяют конъюнкции, т. е., подставляя $x_n = 1$, мы получим представление для $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Если подставить $x_n = 0$, то получится двойственная функция $\varphi^+(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ (в силу закона двойственности). Поскольку f совпадает с φ при $x_n = 1$ и с ψ при $x_n = 0$, то мы действительно получили f.

Ясно, что ни одна из функций $m(x, y, z)$, $\bar{x}$ в отдельности не образует $\mathbf{S}$-полную систему ($m(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ — монотонная функция, $\bar{x}$ — функция от одной переменной).

7.27. Пусть в системе функций Φ имеются функции $\varphi_1 \notin \mathbf{SL}$, $\varphi_2 \notin \mathbf{S}_{01}$.

1. Отождествляя переменные у φ_2, получаем функцию $\bar{x}$.

2. В силу задачи 4.10 у функции φ_1 можно отождествить переменные так, чтобы получилась нелинейная функция от трех переменных $\psi(x, y, z)$. Функция ψ будет также самодвойственной. Заметим, что ψ будет существенно зависеть от всех трех переменных, так как нет нелинейных самодвойственных функций, зависящих от меньшего числа переменных (самодвойственные функции от двух переменных: x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$). Пусть

$$\psi(x, y, z) = axyz + b_1xy + b_2yz + b_3xz + c_1x + c_2y + c_3z + d.$$

Рассмотрим двойственную функцию $\psi^+(x, y, z) = \overline{\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \psi(x+1, y+1, z+1) + 1$. Пусть

$$\psi^+(x, y, z) = a'xyz + b_1'xy + b_2'yz + b_3'xz + c_1'x + c_2'y + c_3'z + d'.$$

Ясно, что $a=a'$, $b'_i=b+a$ *). Поскольку $\psi=\psi^+$, а представление в виде полинома Жегалкина единственно, $b'_i=b_i$, а значит, $a=0$. Далее, $c'_i=c_i+b_j+b_k$, где i, j, k все различны. Отсюда следует, что все суммы $b_j+b_k=0$, а потому либо все $b_i=1$, либо все $b_i=0$. Второе исключено, так как ψ — нелинейная функция. Наконец, $d'=d+c_1+c_2+c_3$, т. е. сумма $c_1+c_2+c_3=0$. Таким образом, либо все c_i равны нулю, либо только одно из них равно нулю (пусть для определенности $c_3=0$). Итак,

$$\psi(x, y, z)=xy+yz+xz+c(x+y)+d.$$

Если $c=1$, то рассмотрим $\nu(x, y, z)=\psi(x, y, \bar{z})$. Получим:

$$\nu(x, y, z)=xy+yz+xz+d.$$

Если теперь $d=1$, то, рассматривая $\overline{\nu(x, y, z)}$, получаем функцию $xy+yz+xz$. Значит, в силу предыдущей задачи система Φ является $\mathbf{S}$-полной.

Легко проверяется, что ни один из классов $\mathbf{SL}$, $\mathbf{S}_{01}$ не содержится в другом и не совпадает с $\mathbf{S}$.

Замечание. Как уже говорилось в замечании к решению задачи 7.25, класс $\mathbf{S}_{01}=\mathbf{S}_1=\mathbf{S}_0$ не является $\mathbf{P}_1$-предполным. Сейчас же мы видим, что он является $\mathbf{S}$-предполным. Таким образом, пересечение двух предполных классов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{P}_1$ в одном из них ($\mathbf{S}$) является предполным, в другом ($\mathbf{P}_1$) — нет. Пользуясь языком, введенным в п. 1 этого параграфа, можно сказать, что класс $\mathbf{S}_{01}$ не принадлежит третьему этажу, хотя и является $\mathbf{S}$-предполным, так как он содержится в классе $\mathbf{P}_{01}$ из третьего этажа.

7.28. Множество функций, самодвойственно представимых через некоторую систему функций, является в силу задачи 7.12 самодвойственным функционально замкнутым классом, т. е. совпадающим с двойственным классом (не путать с подклассом класса самодвойственных функций). Таких классов конечное число: они занимают в схеме среднюю вертикаль: $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_{01}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_{01}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_{01}$, $\mathbf{SM}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{SL}$ и т. д. В качестве совокупности $\mathfrak{A}$ такой, что $\mathfrak{A}$-полнота совпадает с самодвойственной полнотой, можно взять совокупность таких из этих классов Q, что единственный класс, содержащий Q и $\bar{x}$, — это класс $\mathbf{P}$ всех функций. Поскольку $\bar{x}\in\mathbf{S}$, $\bar{x}\in\mathbf{L}$, то ясно, что классы $\mathbf{L}$, $\mathbf{S}$ и содержащиеся в них классы не обладают этим свойством. Напротив, остальные классы $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_{01}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_{01}$ этим свойством обладают. Итак, $\mathfrak{A}$ состоит из этих четырех классов. Ясно, что предельные классы не содержат ни одного из них. Поэтому, двигаясь от $\mathbf{P}$ вниз, найдем все классы, их содержащие. Это $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_{01}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_{01}$. Остается взять все Q-предполные классы для этих классов Q, отбросив те из них, которые содержатся в других. Получаются классы $\mathbf{L}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{F}^{(2)}$, $\mathbf{G}^{(2)}$, $\mathbf{D}^{01}$, $\mathbf{K}^{01}$, т. е. те классы, которые указаны в условии задачи 7.15.

7.29. В $\mathbf{SM}$ имеется один $\mathbf{SM}$-предполный класс — это класс $\mathbf{KD}$, состоящий из одной функции x. Поэтому любая другая функция из $\mathbf{SM}$ (например, $xy\vee yz\vee xz$) образует $\mathbf{SM}$-базис. Попытайтесь доказать это, не используя схему Поста.

---

*) Всюду рассматриваются суммы по модулю 2.

§ 8. СХЕМЫ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1. Функциональные элементы без задержки и схемы из них. Пусть имеется некоторое устройство (рис. 9), внутренняя структура которого нас не интересует, а известно лишь, что оно имеет n упорядоченных «входов» (например, занумерованных числами от 1 до n) и один «выход». На каждый из входов могут подаваться два сигнала (например, отсутствие электрического тока или наличие его), которые мы условимся обозначать символами 0 и 1, и при каждом наборе сигналов на входах на выходе возникает один из сигналов (0 или 1), причем набор сигналов на входах однозначно определяет сигнал на выходе. Такое устройство назовем *функциональным элементом* *). Ясно, что каждому функциональному элементу отвечает функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ (мы будем говорить, что функциональный элемент *реализует* эту функцию f), которая строится следующим образом: входу с номером i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ставится в соответствие переменная x_i и каждому (двоичному) набору значений этих переменных отвечает величина $f(x_1, \ldots, x_n)$, равная 0 или 1 в зависимости от того, какой сигнал возникает на выходе при подаче этого набора на входы функционального элемента.

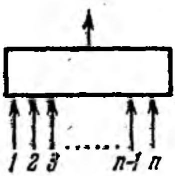


Рис. 9.

Если у нас имеется несколько функциональных элементов, то из них можно получать новые сложные функциональные элементы следующим образом. Один из входов одного

*) В этом пункте мы рассматриваем функциональные элементы без учета времени, т. е считаем, что сигнал на выходе возникает в тот же момент, когда подаются входные сигналы. В следующем пункте мы отказываемся от предложения о мгновенном срабатывании функциональных элементов.

функционального элемента можно соединить с выходом другого функционального элемента (рис. 10). Возникающее при этом устройство можно считать новым функциональным элементом, выходом которого является выход первого элемента (f), а входами все оставшиеся свободными входы обоих элементов, т. е. все входы второго элемента (φ) и те входы первого элемента, которые не соединены с выходом второго. Если теперь на все эти входы подать сигналы, то на свободные входы элемента f они попадут непосредственно, а на оставшийся попадет сигнал, возникший на выходе элемента φ.

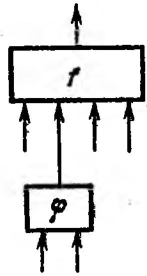


Рис. 10.

Кроме этой операции можно отождествлять входы функционального элемента (рис. 11). При этом возникает новый функциональный элемент, у которого тот же выход и те же входы, кроме отождествленных, которые теперь считаются одним входом.

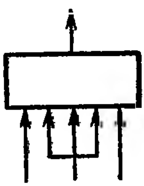


Рис. 11.

Подача набора сигналов на входы этого нового элемента равносильна подаче на входы f набора сигналов, в котором на все отождествленные входы подается один и тот же сигнал. Можно, далее, у какого-нибудь элемента f соединить некоторые (различные) входы с выходами других элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, а некоторые группы входов f (не соединенных с выходами φ_j) такие, что ни один вход не попадает одновременно в различные группы, отождествить (пример приведен на рис. 12). Ясно, что функция, которая реализуется этим сложным функциональным элементом, является суперпозицией функций, реализуемых теми функциональными элементами, из которых он построен. Именно, если выход элемента, реализующего функцию φ_i, соединен с какими-то входами элемента, реализующего функцию f, то в соответствующий аргумент функции f нужно подставить функцию φ_i. Всем отождествленным входам в одной группе нужно поставить в соответствие один и тот же аргумент.

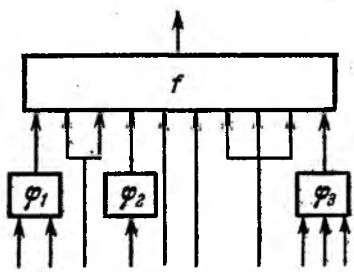


Рис. 12.

Мы будем называть *допустимыми* соединениями функциональных элементов, или *схемами*, соединения, получаемые многократным повторением конструкций, указанных на рис. 10, 11. При этом схемы, полученные на некотором шаге, в дальнейшем используются как функциональные элементы, которые соединяются по тем же правилам. Опишем теперь аккуратно класс допустимых соединений. Соответствующее определение дается по индукции аналогично определению 2.3 суперпозиции функций алгебры логики. Некоторые отличия мы обсудим ниже.

Определение 8.1. а) Всякий функциональный элемент является *схемой*. Ее входами являются входы этого элемента, выходом — его выход.

б) Если S_0 — схема и два ее входа соединены вместе, то получившаяся в результате конструкция S также является *схемой*, причем выход у S тот же, что у S_0, а входами S являются несоединенные входы S_0 и еще один вход, соответствующий двум соединенным входам S_0.

в) Если S_0 и S_1 — схемы, то *схемой* будет также конструкция S, полученная соединением какого-либо входа схемы S_0 с выходом схемы S_1, причем выходом схемы S будет выход схемы S_0, а входами — все входы схемы S_1 и все входы S_0, за исключением того, который соединен с выходом схемы S_1.

г) Всякая схема может быть построена из функциональных элементов за конечное число шагов при помощи конструкций, описанных в б) и в).

Это определение по форме несколько отличается от определения 2.3, что связано прежде всего с отказом от рассмотрения понятия ранга схемы (числа шагов, за которое она получается из функциональных элементов). Пункт г) равносилен последней фразе в определении 2.3. Операция пункта в) соответствует операции б) из определения 2.3. Операция пункта б) отвечает операции отождествления переменных. Нам нет необходимости вводить аналог общей операции переименования переменной по следующей причине. Когда мы ставили в соответствие функциональному элементу функцию алгебры логики, им реализуемую, мы ставили в соответствие его входам произвольные переменные. Таким образом, функции, отличающиеся только обозначениями переменных (согласно определениям из § 2 они, вообще говоря, не равносильны), реализуются *одним и тем же* функциональным элементом. В этом смысле соответствие между функциями и элементами не является взаимно-однозначным.

Укажем, как проводятся индуктивные рассуждения для схем. Для индуктивного доказательства какого-нибудь утверждения, прежде всего, следует проверить его справедливость для функциональных элементов (основание индукции). Затем, предполагая это утверждение справедливым для схемы S_0, надо доказать его для схемы S, полученной из S_0 объединением входов (б) определения 8.1), и из справедливости его для схем S_0 и S_1 сделать вывод о его справедливости для схемы S, построенной в в) определения 8.1 (индуктивный переход). Аналогично вводятся различные характеристики схем.

8.1. Определить функцию алгебры логики, реализуемую схемой. Показать, что она определена однозначно с точностью до переобозначения переменных, не приводящего к их отождествлению. ▲

Нам удобно считать, что равносильные функции реализуются одним и тем же элементом. Для этого введем понятие фиктивного входа.

Определение 8.2. Будем называть вход x функционального элемента f *фиктивным*, если при любом наборе сигналов на остальных входах сигнал на выходе не зависит от сигнала на входе x (т. е. у реализуемой этим элементом функции соответствующая переменная является фиктивной).

Будем называть *эквивалентными* функциональные элементы, отличающиеся разве лишь нумерацией входов и фиктивными входами.

Таким образом, можно формально добавлять (и отбрасывать) любое число фиктивных входов, не изменяя (с точностью до эквивалентности) функциональный элемент.

В дальнейшем при доказательстве того, что некоторое соединение элементов допустимо (является схемой), мы не всегда будем, следуя определению 8.1, разбивать ее построение на элементарные шаги (б), в) этого определения). Мы будем использовать более крупные шаги (подобные изображенному на рис. 12), если они очевидным образом распадаются на элементарные операции.

Теперь посмотрим, как на языке схем перефразируется задача о полноте системы функций. Имеется некоторая система Ф функциональных элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (точнее, типов функциональных элементов, т. е. имеется неограниченное число элементов, реализующих каждую из функций φ_j). Спрашивается, при каких условиях на эту систему любую функцию алгебры логики можно реализовать при помощи схемы из элементов системы Ф. Поскольку, как следует из решения задачи 8.1, допустимыми являются те и только те соединения элементов, которые отвечают суперпозициям реализуемых ими функций, ответ на этот вопрос дается теоремой Поста.

Итак, мы видим, что язык схем из функциональных элементов эквивалентен языку суперпозиций функций алгебры логики. Однако при рассмотрении схем возникают некоторые новые вопросы (неестественные в старой постановке задачи). На один из них мы сейчас хотим обратить внимание. Не следует думать, что любые соединения функциональных элементов являются допустимыми. Есть несколько очевидных условий: не могут соединяться выходы; у схемы существует единственный выход и т. д. Но есть и менее очевидные требования. Пусть мы имеем, например, один-единственный элемент, у которого все входы, кроме одного, фиктивны, и он реализует отрицание аргумента, соответствующего этому входу. Соединим этот существенный вход с выходом элемента (рис. 13).

Рис. 13.

Ясно, что мы не получаем функционального элемента, поскольку мы не можем приписать выходу никакого значения, так как, с одной стороны, оно должно совпадать со значением на существенном входе (они соединены), а с другой стороны, они должны быть различны (исходный элемент реализует $\bar{x}$). Аналогичная ситуация возникала у нас при рассмотрении сложных высказываний (§ 1, стр. 24). Может возникнуть возражение, что у устройства, указанного на рис. 13, нет свободного выхода. Но это несущественное обстоятельство, так как можно рассмотреть соединение (рис. 14), которое хотя и имеет свободный выход, однако обладает прежним свойством. Из задачи 8.1 (да и непосредственно) видно, что соединения на рис. 13, 14 не являются схемами. Причина этого состоит в том, что сигнал на одном из входов элемента $\bar{x}$ зависит от сигнала на его выходе, чего не может быть при допустимых соединениях элементов (это следовало бы доказывать по индукции; мы обсудим этот вопрос несколько ниже).

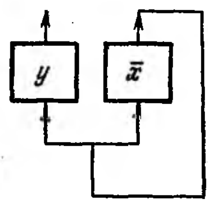


Рис. 14.

8.2. Какие из указанных на рис. 15 *) соединений функциональных элементов являются схемами? ▲

*) Обозначение  указывает на то, что эти пути не соединяются.

При помощи определения 8.1 можно доказать, что какое-либо соединение является схемой. Однако при доказательстве того, что некоторое соединение не является схемой, приходится искать какие-либо свойства схем, которыми данное соединение не обладает (см. решение предыдущей задачи). При решении таких задач удобен критерий того, что соединение является схемой, который мы сейчас получим (задача 8.3).

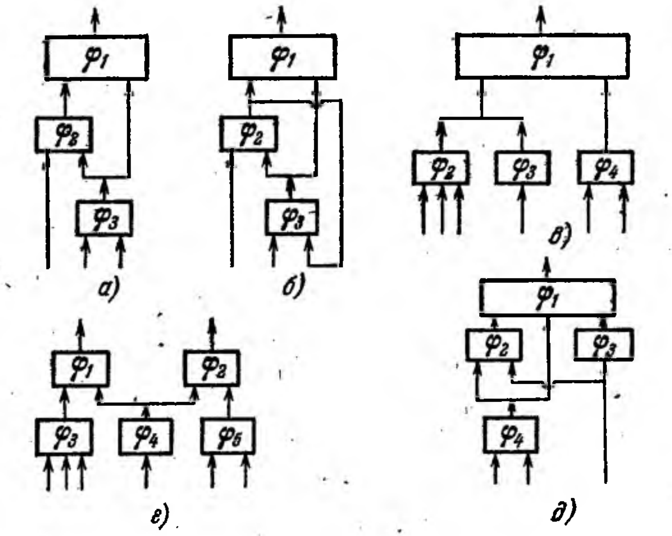


Рис. 15.

Определение 8.3. Пусть имеются некоторым образом соединенные функциональные элементы *). Совокупность элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ называется *циклом*, если выход элемента φ_1 соединен с каким-то входом элемента φ_2, выход φ_2 — с каким-то входом φ_3 и т. д., выход φ_{k-1} — с каким-то входом φ_k, а выход φ_k — с каким-то входом φ_1.

В этом случае еще говорят, что в соединении элементов имеется *обратная связь*.

На рис. 13 и 14 изображены простейшие примеры циклов.

8.3. Доказать, что соединение S конечного числа функциональных элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ является схемой тогда и только тогда, когда

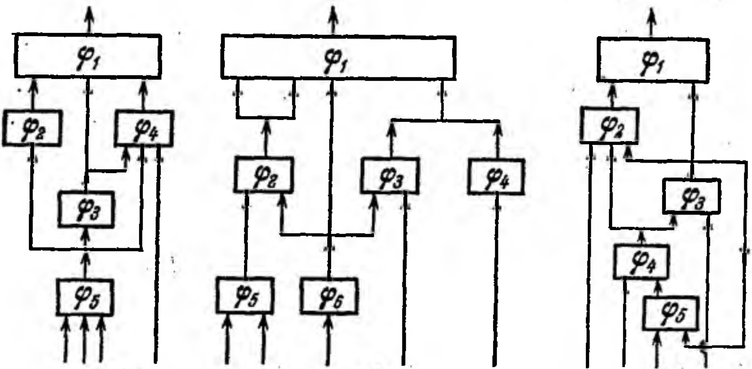
*) При соединении функциональных элементов вход одного соединяется с выходом другого. Никаких других ограничений нет.

1) среди элементов φ_i имеется один и только один элемент со свободным выходом (т. е. с выходом, не соединенным ни с какими из входов элементов φ_j) *);

2) вход каждого элемента φ_i может быть соединен не более чем с одним из выходов элементов φ_j;

3) в S нет обратных связей (циклов). ▲

8.4. Какие из указанных на рис. 16 соединений являются схемами? ▲



а) б) в)

Рис. 16.

Другие примеры соединений функциональных элементов, как являющихся схемами, так и не являющихся ими, читатель построит без труда самостоятельно.

2. Многотактные схемы из функциональных элементов. Работу схем из функциональных элементов можно мыслить двумя способами. Первый способ (см. сноску на стр. 118) состоит в предположении о том, что элементы срабатывают мгновенно. В этом случае в тот же момент, когда какие-то сигналы подаются на входы схемы, на ее выходе возникает результирующий сигнал. Другое возможное предположение состоит в том, что для получения выходного сигнала функционального элемента требуется некоторое время. Тогда, если на входы схемы подать сигналы, то на входы элементов схемы сигналы могут приходить не одновременно, так как при этом сигналы, пришедшие на разные входы внутрен-

*) От требования 1) часто удобно отказаться, рассматривая схемы с несколькими выходами. Тогда на каждом из выходов реализуется своя функция алгебры логики.

них элементов, могут пройти через разное число элементов, да и время, требующееся различным элементам для обработки входных сигналов, может быть различным. Однако можно предположить, что сигналы на входы схемы подаются сколь угодно долго с тем, чтобы те сигналы, которые приходят на одни входы внутренних элементов раньше, чем на другие входы этих же элементов, продолжали поступать до тех пор, пока и на остальные входы поступят нужные сигналы. В результате через некоторое время на выходе схемы появится сигнал, соответствующий сигналам, подающимся на входы схемы. После этого (а иногда даже ранее) подачу сигналов на входы можно прекратить и при желании использовать эту схему для вычисления значения реализующей ее функции на новом наборе значений аргументов.

Первое из этих предположений (о мгновенности работы элементов) неестественно с точки зрения реализации функциональных элементов. Второе предположение вполне соответствует реальной ситуации — но у него имеется один серьезный недостаток: необходимость подавать входные сигналы в течение некоторого времени, а также то, что в течение определенного времени на выходе схемы появляются сигналы, не соответствующие сигналам, подающимся на входы. Это обстоятельство можно еще выразить и так: при указанных предположениях о работе функциональных элементов схемы из них нельзя рассматривать как некоторый новый функциональный элемент. При этом следует уточнить, что мы понимаем под функциональным элементом в новых условиях (с учетом времени его работы). *Функциональный элемент* — это такое устройство (схематически изображенное на рис. 9), что при подаче некоторого набора сигналов на его входы через некоторое фиксированное для данного элемента время ν на выходе элемента появляется вполне определенный сигнал (значение реализуемой функции на этом наборе). При этом, если в следующий момент времени на входы будет подан новый набор сигналов, то через время ν после его подачи на выходе появится соответствующий ему сигнал, т. е. обработка наборов сигналов, последовательно подаваемых на входы элемента, проводится независимо. Мы предполагаем здесь, что время изменяется дискретно, т. е. принимает натуральные значения $t=1, 2, \ldots, k, \ldots$ Единицу времени мы назовем *тактом*. Другими словами, мы следим за состоянием входов и выходов элементов лишь в моменты времени, кратные одному такту.

Время ν, которое проходит между подачей входных сигналов и появлением выходного сигнала, называется *временем задержки* функционального элемента. Теперь ясно, что схема из функциональных элементов, работа которой понимается вторым из указанных выше способов, не является, вообще говоря, функциональным элементом.

При рассмотрении сложных схем может оказаться сложным вычисление времени (числа тактов), в течение которого нужно подавать сигналы на входы; при этом при соединении схем это время для входов объединенной схемы, как правило, будет не тем, что для входов отдельных схем и т. д.

Поэтому мы ограничимся рассмотрением схем, являющихся функциональными элементами в новом смысле. При построении таких схем важную роль будут играть специальные элементы — *элементы задержки*, обеспечивающие одновременную подачу сигналов на все входы каждого элемента схемы. Элементы задержки — это функциональные элементы, реализующие функцию x, т. е. на выходе возникает тот же сигнал, что и на входе, но с некоторой задержкой (через некоторое число тактов).

Введем ограничение, которое сильно упростит рассмотрения. Именно, будем считать, что *все функциональные элементы, из которых строятся схемы, являются однотактными*, т. е. между сигналами на входе и результирующим сигналом на выходе происходит один такт. Подача сигнала на вход элемента происходит мгновенно; через один такт можно подавать новый сигнал.

Определение 8.4. Схема из функциональных элементов S реализует некоторую функцию алгебры логики f с *задержкой* ν, если ее входы можно отождествить с аргументами f так, что при подаче в любой момент времени на входы S некоторого набора сигналов на выходе S через ν тактов возникает сигнал, отвечающий значению функции f при значениях аргументов, соответствующих поданным сигналам. Такую схему S можно рассматривать как функциональный элемент с временем задержки ν, реализующий функцию f.

Схема, реализующая какую-либо функцию алгебры логики, называется *правильной*.

Схемы из функциональных элементов, работающих мгновенно, мы будем в дальнейшем называть *нультактными*; схемы из однотактных функциональных элементов (мы договорились рассматривать только такие функциональные элементы) — *многотактными*, или просто схемами.

8.5. Привести пример неправильной схемы. ▲

Замечание 1. Если в правильной схеме (состоящей из однотактных элементов) предположить все элементы нультактными, то получившаяся нультактная схема будет реализовать ту же функцию алгебры логики, что и исходная многотактная.

Замечание 2. Не следует думать, что задержка ν, с которой правильная схема S реализует функцию f, равняется максимальному числу последовательно соединенных элементов схемы. Например, задержку в один такт может иметь схема, состоящая более чем из одного функционального элемента. На рис. 17 приведен пример такой схемы. Если здесь φ_1 реализует $xy(z \vee \bar{t} \vee s)$, φ_2 реализует uv, φ_3 реализует $\bar{p}$, φ_4 реализует $\bar{r}$, то вся схема реализует xy с задержкой в один такт. Характерно, что два последних входа схемы являются фиктивными входами схемы,

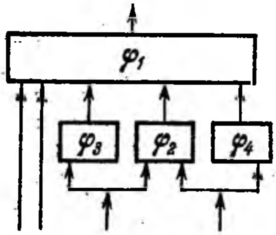


Рис. 17.

но существенными входами ее внутренних элементов. Сигналы на входах элемента φ_1 в момент времени t зависят (существенно) как от сигналов на первых двух входах S в тот же момент t, так и от сигналов на двух других входах S в предыдущий момент $t-1$; но от последних двух выходной сигнал φ_1 будет зависеть фиктивно. Вообще, если задержка равна ν, то выходной сигнал схемы в момент времени t зависит только от сигналов на ее входах в момент времени $t-\nu$, в то время как соответствующие сигналы на входах и выходах внутренних элементов схемы могут зависеть как от более ранних сигналов на ее входах (так было в рассмотренном примере), так и от более поздних (приведите пример), но выходной сигнал схемы зависит от них фиктивно.

Замечание 3. Все входы элементов или схем, реализующих константы, являются фиктивными. Все такие схемы можно считать имеющими задержку нуль (как, впрочем, и любую другую). Дело в том, что независимо от того, сколько времени проходит между поступлением сигналов на входы и выходом обработанного сигнала, нужный нам сигнал на выходе мы уже имеем (в любой момент времени). В дальнейшем мы будем исходить из предположения, что если вообще можно реализовать какую-то константу схемой из данного запаса элементов, то мы имеем нультактный функциональный элемент, ее реализующий.

При решении задач иногда полезно иметь в виду следующее обстоятельство.

8.6. Доказать, что всякую правильную схему S можно перестроить так, что она, оставаясь правильной, будет реализовывать ту же функцию алгебры логики с той же задержкой, будет состоять из функциональных элементов тех же типов, но в ней могут отождествляться лишь входы элементов, являющиеся входами схемы. ▲

В вопросах, которые мы будем рассматривать ниже, можно ограничиться схемами, обладающими перечисленными в задаче 8.6 свойствами (хотя это и не обязательно). Мы будем постоянно пользоваться последовательностью схем S_i, построенной при решении задачи 8.3. Заметим, что при наложенных в задаче 8.6 ограничениях множество M_i состоит из всех элементов, выходы которых соединены с входами S_i (они не могут быть соединены с входами других элементов). При этом входы S_i, которые не соединены с выходами элементов M_i, являются входами всей схемы S.

Если $S_i=S$, $S_{i-1}\neq S$, то будем говорить, что i — *глубина* схемы S. Как мы отмечали (замечание 2), глубина, вообще говоря, не совпадает с величиной задержки.

Переходим к рассмотрению основного вопроса этого пункта — вопроса о полноте системы однотактных функциональных элементов. Постановка вопроса аналогична прежней.

Определение 8.5. Система Φ (однотактных) функциональных элементов *), реализующих функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, называется *полной*, если всякую функцию алгебры логики можно реализовать (все равно с какой задержкой) схемой, составленной из этих элементов.

Начнем с рассмотрения примеров.

8.7. 1) Пусть система функциональных элементов Φ содержит элемент задержки ($\varphi_1=x$) и функции, реализуемые ее элементами, образуют полную систему (в смысле функций алгебры логики). Тогда система Φ полна. Показать, что первое из этих условий не является необходимым.

*) Точнее, как мы уже отмечали на стр. 121, типов функциональных элементов.

2) Пусть Φ состоит из элемента задержки φ_1 (реализующего x) и элемента Шеффера φ_2, реализующего $\overline{xy}$. Построить схемы, реализующие: а) $\bar{x}$; б) xy; в) $x \vee y$; г) 1; д) 0; е) $x+y$. Указать величину задержки. ▲

8.8. Показать, что система элементов $\{x\bar{y}, 1\}$*) полна. ▲

Итак, мы видели, что наличие элементов задержки не является необходимым для полноты системы функциональных элементов. Возникает вопрос, можно ли от него отказаться, т. е. совпадают ли условия полноты однотактных функциональных элементов и соответствующих функций алгебры логики. Мы советуем читателю попытаться самому разобраться в этом вопросе перед тем, как читать дальнейший текст, в котором он решается.

8.9. Будет ли полной система, состоящая из функционального элемента φ, реализующего функцию Шеффера $\overline{xy}$? ▲

Решив эту задачу, читатель убедится, что условие полноты системы однотактных функциональных элементов не совпадает с условием полноты системы реализуемых ими функций. Рассмотрим еще один пример.

8.10. Получим ли мы полную систему, если присоединим к элементу φ, реализующему функцию Шеффера $\overline{xy}$, элементы, реализующие константы? ▲

Внимательное продумывание примеров, рассмотренных в задачах 8.9 и 8.10, позволит читателю решить вопрос о полноте.

8.11. Найти необходимые и достаточные условия полноты системы однотактных функциональных элементов. ▲

Заметим, что если отказаться от однотактности элементарных функциональных элементов, а разрешить им иметь любое время задержки, то задача о полноте осложняется (см. [1]). В этом случае условие полноты содержит бесконечное число условий.

---

*) Часто мы будем писать «функциональный элемент $f(x_1, \ldots, x_n)$» вместо «функциональный элемент, реализующий функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$».

Правильным схемам из однотактных элементов отвечают некоторые суперпозиции соответствующих функций. Поэтому мы фактически рассматривали вопрос о полноте относительно некоторого сужения обычной суперпозиции (ср. расширенную суперпозицию, рассмотренную в п. 2 § 7). Описание этого класса суперпозиций было дано нами на языке схем (определение правильной схемы), однако его можно дать и не прибегая к этому языку. В заключение этого пункта мы предлагаем читателю рассмотреть некоторые другие сужения суперпозиции (не имеющие отношения к схемам) и выяснить вопрос о полноте для них. Заранее ясно, что в то время, как переход к расширенной суперпозиции приводит к уменьшению числа классов (и, в частности, предполных), сужение класса суперпозиций приводит, вообще говоря, к увеличению их числа.

Определение 8.6. Суперпозиция системы функций Φ называется *глобальной*, если она может быть получена из элементов Φ путем последовательного применения операций переименования переменных (и, в частности, их отождествления) и подстановки каких-то функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi$ вместо всех аргументов некоторой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi$.

Ограничение состоит в том, что не разрешается подстановка вместо части аргументов функции. Однако, если в системе Φ имеется функция x, то любую суперпозицию можно считать глобальной (так как тогда аргумент y можно оставить неизменным, подставляя вместо него $\varphi(y)=y$).

8.12. Привести пример системы функций, полной в обычном смысле, но не полной относительно глобальной суперпозиции. ▲

8.13. Найти условия полноты системы функций относительно глобальной суперпозиции. ▲

8.14. Назовем подстановку функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ вместо некоторых аргументов функции f *сокращающей*, если полученная в результате функция будет фиктивно зависеть от всех аргументов функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Расширим понятие глобальной суперпозиции, допуская наряду с подстановкой во все аргументы сокращающую подстановку. Выяснить условия полноты относительно этого класса суперпозиций. ▲

3. Автоматы без обратных связей. Мы выяснили в предыдущем пункте, что схемы из однотактных функциональных элементов лишь в специальных случаях (правильных схем) реализуют функции алгебры логики. Возникает вопрос, как же описать работу схемы из однотактных элементов в общем случае. Будем считать, что на входы схемы в каждый момент времени подаются какие-то сигналы. Ясно, что сигнал на выходе схемы зависит от сигналов, подаваемых на входы в течение нескольких предшествовавших моментов времени.

Воспользуемся введенным в замечании к решению задачи 8.7 понятием верхнего индекса. По аналогии с ним индуктивно введем понятие нижнего индекса: нижний индекс элемента φ схемы на единицу больше минимального из нижних индексов элементов, выходы которых соединены с входами φ. Другими словами, нижний индекс φ равен минимальному числу элементов, которые нужно пройти какому-либо сигналу, поданному на вход схемы, прежде чем попасть на выход элемента φ. Обозначим через $\varkappa=\varkappa(S)$, $\mu=\mu(S)$ соответственно нижний и верхний индексы выходного элемента схемы S. Тогда непосредственно видно из определения (и легко доказывается по индукции), что выходной сигнал схемы S в какой-то момент времени t может зависеть только от входных сигналов S в моменты времени от $t-\mu$ до $t-\varkappa$ включительно. Итак, выходной сигнал в момент t есть функция от $\rho=\mu-\varkappa+1$ последовательных наборов сигналов на входе:

$$F(x_1^0, \ldots, x_n^0;\ x_1^1, \ldots, x_n^1;\ \ldots;\ x_1^{\rho-1}, \ldots, x_n^{\rho-1}),$$

где F — функция алгебры логики от ρn переменных; $(x_1^i, \ldots, x_n^i)$ — набор сигналов в момент времени $t-\mu+i$. Если S — правильная схема, то F может существенно зависеть только от одного из наборов сигналов $(x_1^i, \ldots, x_n^i)$, отвечающего моменту $t-\nu$ (т. е. $i=\varkappa-\nu$, обязательно $\varkappa\geqslant\nu$), и схема S реализует эту функцию $F(x_1^i, \ldots, x_n^i)$ $(i=\varkappa-\nu)$ с задержкой ν.

Определение 8.7. Пусть имеется устройство с n входами и одним выходом (рис. 9) такое, что в каждый момент времени на его входы подаются сигналы 0 или 1, а на выходе в каждый момент времени t возникает сигнал 0 или 1, являющийся функцией от ρ последовательных наборов сигналов на входах, поданных в моменты времени от $t-\mu$ до $t-\varkappa$, $\rho=\mu-\varkappa+1$:

$$F(x_1^0, \ldots, x_n^0;\ x_1^1, \ldots, x_n^1;\ \ldots;\ x_1^{\rho-1}, \ldots, x_n^{\rho-1}),$$

где $(x_1^i, \ldots, x_n^i)$ — набор, поданный в момент времени $t-\mu+i$. Тогда это устройство представляет собой *автомат* *без обратных связей*. Функция алгебры логики F называется его *характеристической функцией*, ρ — его *индексом*, $\varkappa$ — *временем задержки*.

Автоматы без обратных связей называются *эквивалентными*, если их характеристические функции F_1, F_2 отличаются только фиктивными переменными, причем соответствующие переменные у F_1, F_2 отвечают одним и тем же моментам времени относительно времени выходных сигналов (отвечающих значениям F_1, F_2). Значит, автомат не меняется, если формально считать F зависящей от входных сигналов еще в какие-то моменты времени.

Функциональный элемент представляет некоторый автомат без обратных связей. Для него характеристическая функция совпадает с реализуемой, а индекс и задержка равны единице.

Проведенные выше рассмотрения показывают, что всякая схема из однотактных функциональных элементов представляет автомат без обратных связей. На самом деле предположение об однотактности элементов здесь не существенно. Нужно лишь иначе вычислять верхний и нижний индексы μ и $\varkappa$: именно, нужно прибавлять в индуктивном определении к максимуму (соответственно минимуму) не единицу, а величину задержки рассматриваемого элемента (в частности, для однотактных элементов нужно прибавлять единицу). Возникает вопрос, имеет ли место обратное утверждение: всякий ли автомат без обратных связей можно представить (с точностью до эквивалентности) некоторой схемой из функциональных элементов (пока без всяких ограничений на состав элементов).

8.15. Показать, что всякий автомат без обратных связей может быть представлен некоторой схемой из функциональных элементов. ▲

Теперь рассмотрим вопрос о схемах, построенных из ограниченного запаса функциональных элементов. Мы вновь ограничимся случаем однотактных элементов.

Определение 8.8. Схема S из функциональных элементов *реализует* некоторый автомат без обратных связей A, если представляемый этой схемой автомат отличается от A, быть может, лишь временем задержки $\varkappa$.

В том случае, когда A — функциональный элемент, мы получим определение реализации функции алгебры логики схемой из функциональных элементов (см. определение 8.5).

Определение 8.9. Система функциональных элементов называется *слабо автоматно полной*, если всякий автомат без обратных связей можно реализовать схемой, составленной из этих элементов.

8.16. Доказать, что условия слабой автоматной полноты системы функциональных элементов и полноты относительно функций алгебры логики, рассмотренной в предыдущем пункте, совпадают. В частности, в задаче 8.11 даны одновременно необходимые и достаточные условия слабой автоматной полноты системы элементов. ▲

Мы рассмотрели вопрос о реализации автоматов схемами из однотактных функциональных элементов. Мы не касаемся здесь более общей постановки задачи, когда основные элементы имеют произвольные времеиа задержки. С другой стороны, соединять в схемы можно не только функциональные элементы, но и произвольные автоматы. В этом случае возникают вопросы, аналогичиые рассмотрeииым выше, в частности, вопрос о полноте.

4. Схемы из функциональных элементов с обратными связями. Общее понятие конечного автомата. Всюду в этом параграфе мы рассматривали схемы из функциональных элементов, не содержащие обратных связей. Это ограничение возникло при рассмотрении нультактных схем, так как в противном случае нельзя было непротиворечивым образом описать их работу. Однако при переходе к многотактным схемам это ограничение перестает быть оправданным. Рассмотрим, например, схему, изображенную на рис. 13, в предположении однотактности элемента $\bar{x}$. Тогда, если в какой-то момент времени t на выходе возник сигнал 1, то он в тот же момент попадает на вход элемента $\bar{x}$ и в $(t+1)$-й момент на выходе возникает 0 и т. д. В результате на выходе возникает последовательность 1, 0, 1, 0, 1, 0,..., и противоречие, имевшееся при предположении о нультактности элемента, исчезает. Эту схему естественно назвать схемой «звонка», так как в звонке используется последовательность сигналов, меняющихся на противоположный на каждом такте.

Нетрудно показать, что, вообще, если рассматривать схемы, составленные из функциональных элементов, имеющих ненулевую задержку, не удовлетворяющие условию 3) задачи 8.3 (схемы с обратными связями), то все равно можно описать непротиворечивым образом их работу. В этом пункте под схемами (мы иногда будем говорить «схемами с обратными связями») будем понимать соединения, удовлетворяющие только условиям 1) и 2) задачи 8.3. Мы по-прежнему ограничимся случаем однотактных функциональных элементов. В этом случае уже нельзя утверждать, как это было в предыдущем пункте, что сигнал на выходе схемы зависит лишь от сигналов на входах, подававшихся в течение некоторого фиксированного времени. За счет обратных связей сигнал на выходе может зависеть от сигналов на выходах элементов схемы, которые могут не определяться входными сигналами или определяться входными сигналами в сколь угодно отдаленные моменты времеии. Например, элементы цикла (определеиие 8.3) могут вообще не иметь входов, являющихся входами схемы (свободных входов). На рис. 18, *а*) элемент φ реализует функцию $x \vee y$, на рис. 18, *б*) элемент ψ реализует функцию $(x \vee y)z$; оба элемента однотактны; f — элемент задержки (мы его включили для того, чтобы схема имела свободный выход). Тогда, если на вход y схемы *а*) сколь угодно давно был подан единичный сигнал, то тот же сигнал будет постоянно возиикать на ее выходе (сигнал y «запоминается»). На схеме *б*) сигнал y запоминается при $z=1$. Подав $z=0$, мы «очистим память» и после этого можем «запомнить» новый сигнал y (подавая при этом $z=1$). В реальных схемах «запоминающие устройства» реализуются как раз при помощи циклов.

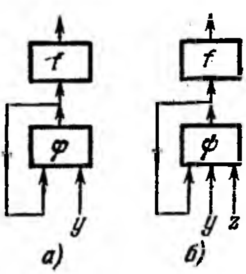


Рис. 18.

Для характеристики работы схемы с обратными связями естественно учитывать состояние внутренних элементов схемы. Мы сделаем это следующим образом.

Пусть S — схема (вообще говоря, с обратными связями), и пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — ее элементы, причем φ_0 — выходной элемент *). Через $\varphi_i(t)$ обозначим сигнал на выходе элемента φ_i в момент времени t ($\varphi_i(t)$ равняется 0 или 1). Значение $\varphi_0(t)$ указывает на выходной сигнал схемы в момент времени t. Набор значений $\varphi(t)=\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots \ldots, \varphi_k(t)\}$ назовем *состоянием* схемы S в момент времени t. Через $s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t)$ обозначим сигналы, подаваемые на входы S в момент времени t; через $s(t)=\{s_1(t),\ldots,s_n(t)\}$ — их набор. Тогда состояние $\varphi(t+1)$ схемы в момент времени

*) Можно допустить, что выход φ_0 соединен с входамн других элементов.

$t+1$ однозначно определяется состоянием схемы $\varphi(t)$ в предыдущий момент времени и входным набором $s(t)$ в предыдущий момент времени, т. е.

$$\varphi(t+1) = \Phi(\varphi(t),\ s(t)).$$

Другими, словами, выходные сигналы элементов в момент $t+1$ зависят от входных сигналов на них в момент t, т. е. от выходных сигналов элементов и входных сигналов схемы в этот момент. Более подробно, Φ представляет собой набор $k+1$ функций $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k$ алгебры логики от $k+n+1$ переменных. На самом деле некоторые из этих переменных являются несущественными: для Φ_i существенны лишь те аргументы, которые соответствуют тем функциональным элементам, выходы которых соединены с входами φ_i, и тем входным сигналам схемы, которые подаются непосредственно на входы φ_i. Если оставить только эти аргументы, то Φ_i совпадет с функцией, реализуемой элементом φ_i, и приведенная выше формула показывает просто, какие сигналы появляются на выходах элементов φ_i в момент времени $t+1$,— в зависимости от того, какие сигналы поступили на его входы в момент времени t. Заметим еще, что множество двоичных наборов длины $k+1$, которые могут служить состоянием схемы S, может не совпадать с множеством всех двоичных наборов длины $k+1$. В связи с этим значения функций Φ_i на некоторых наборах могут быть не определены (как говорят, функции Φ_i являются частично определенными). Отметим, что построенное описание работы схемы в случае схем без обратных связей не совпадает с данным в предыдущем пункте описанием.

Дадим теперь определение конечного автомата.

Определение 8.10. Пусть Ω — некоторое множество двоичных наборов длины $k+1>0$. Мы говорим, что на множестве допустимых состояний Ω задан *автомат* $\mathfrak{A}(\Omega, n)$ *с n входами*, если указан набор Φ, состоящий из $k+1$ частично определенных функций алгебры логики Φ_i от $n+k+1$ переменных, причем эти функции определены для всех тех двоичных наборов длины $k+n+1$, у которых первые $k+1$ элементов образуют набор, входящий в Ω, и при этом набор значений Φ_i на этих наборах принадлежит Ω. Число элементов в Ω называется *памятью* автомата.

Мы говорим, что определена работа автомата $\mathfrak{A}(\Omega, n)$, если задано некоторое начальное состояние $\varphi^0 \in \Omega$, некоторое натуральное число ν, которое мы назовем *временем* *задержки*, и в каждый момент времени подается набор входных сигналов $s(t)=\{s_1(t), \ldots, s_n(t)\}$ длины n.

Если определена работа автомата, то последовательность его состояний для $t \geqslant \nu$ определяется по формуле

$$\varphi(t+\nu)=\Phi(\varphi(t),\ s(t)),\ \varphi(0)=\varphi^0.$$

Эта формула называется *уравнением состояний* автомата $\mathfrak{A}(\Omega, n)$. Ясно, что в любой момент времени состояние автомата $\varphi(t) \in \Omega$. *Выходом* автомата (*результатом работы*) называется последовательность $\varphi_0(t)$ $(t \geqslant \nu)$. При $k=0$ и Φ, зависящей только от $s(t)$, автомат $\mathfrak{A}$ превращается в функцию алгебры логики.

В согласованных обозначениях схема (с обратными связями) S из однотактных элементов представляет автомат с $\nu=1$; φ^0 — сигналы на выходах элементов схемы S при $t=0$; в качестве Ω удобно брать все возможные наборы (одновременных) сигналов на выходах элементов.

8.17. Показать, что работа всякого конечного автомата с временем задержки $\nu=1$ может быть представлена схемой с обратными связями из однотактных функциональных элементов. ▲

Если ограничить запас функциональных элементов, из которых строятся схемы (фиксировать систему основных элементов), то нетрудно убедиться в том, что не всякий автомат (даже при $\nu=1$) можно представить схемой из этих элементов. Однако мы будем связывать со схемой не один автомат, а несколько. Именно, пусть $\Xi=\{\varphi_0, \ldots, \varphi_k\}$ — некоторое множество элементов, входящих в схему S (быть может, не все), φ_0 — выходной элемент схемы S, и пусть сигнал на выходе каждого из этих элементов в момент времени $t+\nu$ определяется сигналами в момент времени t на входах схемы $(s(t)=\{s_1(t), \ldots, s_n(t)\})$ и на выходах элементов $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ из выбранного множества $\Xi(\varphi(t)=$ $=\{\varphi_0(t), \ldots, \varphi_k(t)\})$. В этом случае множество Ξ элементов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ называется *ν-замкнутым*. Для правильной схемы выходной элемент φ_0 образует ν-замкнутое множество (ν — время задержки). С ν-замкнутым множеством мы встречаемся, если у нас имеются схемы $S_0, \ldots, S_k$, реализующие какие-то функции алгебры логики с задержкой ν, а из них как из функциональных элементов строится новая схема S. Тогда в этой схеме выходные элементы $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ подсхем $S_0, \ldots, S_k$ образуют ν-замкнутое множество.

Всякое ν-замкнутое множество элементов Ξ естественным образом порождает конечный автомат, работающий с задержкой ν. Мы будем говорить, что этот автомат *реализован* схемой S с задержкой ν относительно множества элементов Ξ *).

Определение 8.11. Система функциональных элементов называется *автоматно полной*, если любой конечный автомат, с точностью до времени задержки, можно реализовать схемой S, составленной из элементов этой системы, с некоторой задержкой ν относительно некоторого ν-замкнутого подмножества Ξ элементов S.

8.18. Доказать, что условие автоматной полноты системы функциональных элементов совпадает с условием полноты относительно функций алгебры логики (а значит, в силу задачи 8.16 и с условием слабой автоматной полноты). ▲

В указаниях к задаче 8.11 тем самым даются необходимые и достаточные условия автоматной полноты системы элементов.

Как и в случае автоматов без обратных связей, следует подчеркнуть, что можно было бы рассматривать схемы из функциональных элементов с произвольными временами задержки, а также схемы из автоматов. При этом вопрос о полноте усложняется. Оказывается, что для систем автоматов вообще нет алгоритма, позволяющего решать вопрос, является ли система полной [2].

Теории автоматов посвящено большое число работ (см., например, [3], [4], [5]). Имеется несколько различных определений автомата, эквивалентных в некотором естественном смысле. Оказывается, что очень сложные устройства (например, быстродействующие вычислительные машины) могут рассматриваться как автоматы (быть может, с очень большим числом состояний), причем эта точка зрения оказывается полезной во многих вопросах. Мы коснулись здесь лишь вопроса о синтезе автоматов из некоторых стандартных. В теории автоматов рассматриваются и другие вопросы, например, вопрос о восстановлении структуры автомата по выходным последовательностям сигналов, соответствующим тем или иным последовательностям наборов входных сигналов.

Очень интересен вопрос об обучении автоматов. Одна из возможных постановок задачи такая [5]. Автомат находится в некоторой среде,

---

*) Если множество Ξ состоит лишь из выходного элемента φ_0 схемы S, причем выход φ_0 свободен (т. е. не соединен с входом какого-либо элемента), то относительно Ξ схема S реализует автомат, являющийся функцией алгебры логики.

где в зависимости от сигнала на его выходе с некоторой вероятностью, зависящей от этого сигнала, на его входы подаются в виде двоичных наборов сигналы «поощрения» или «порицания», причем принцип, по которому подаются эти сигналы (соответствующие вероятности), в точности не известен (имеется некоторое множество возможностей). Нужно так устроить автомат, чтобы он, находясь в одной и той же среде (в какой — заранее не известно), через некоторое число тактов начинал выдавать с вероятностью, близкой к единице, такой сигнал, за который его в большей степени поощряют. Внешняя среда может время от времени меняться. Сигналы поощрения могут подаваться за счет присоединения к входам автомата выходов других автоматов. Эта связь может быть взаимной. Возникает «игра автоматов». Точную постановку задачи см. в [5].

5. Схемы из функциональных элементов для двойных линий. Мы приведём в этом пункте еще один способ реализации функций алгебры логики на базе функциональных элементов, принадлежащий Дж. фон Нейману [6]. Для простоты будем считать функциональные элементы нультактными. Каждой переменной x будем ставить в соответствие (рис. 19) упорядоченную пару проводов (двойная линия), по одному из которых передается x, по другому $\bar{x}$.

Рис. 19.

Пусть имеются две схемы из функциональных элементов, каждая с n входами, причем между входами схем установлено такое взаимно однозначное соответствие, что если на входы первой схемы подавать значения аргументов $x_1, \ldots, x_n$, а на соответствующие входы второй — их отрицания $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, то на выходе первой схемы получится значение $f(x_1, \ldots, x_n)$, а на выходе второй $\overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$. В этом случае мы будем говорить, что имеется схема, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в двойных линиях, причем пару соответственных входов схем можно рассматривать как двойную линию, представляющую соответствующий аргумент. Кроме того, если некоторая переменная уже представлена двойной линией, то ее отрицание можно получить без помощи функциональных элементов (рис. 20).

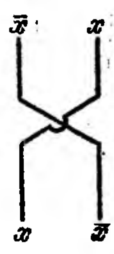


Рис. 20.

Поэтому, кроме того, при реализации функций схемой в двойных линиях можно на аргументы первой из схем подавать отрицания аргументов, а сами аргументы — на соответствующие входы второй схемы. Можно было бы еще строить таким образом отрицание функции, но этого же можно добиться перестановкой первой и второй схем и переходом к отрицаниям аргументов. Общий вид схемы в двойных линиях получается многократным комбинированием указанных выше конструкций (мы не будем уточнять это понятие).

Не следует думать, что система функциональных элементов полна в двойных линиях, если ее элементы реализуют функции, которые вместе с отрицанием образуют полную систему.

8.19. Показать, что функциональный элемент, реализующий конъюнкцию, не образует полной системы в двойных линиях. ▲

Условие полноты системы элементов в двойных линиях получается, исходя из следующего утверждения.

8.20. Показать, что система функциональных элементов полна в двойных линиях тогда и только тогда, когда система реализуемых этими элементами функций самодвойственно полна (определение 7.5). ▲

Поэтому в условии задачи 7.15 содержатся необходимые и достаточные условия полноты системы функциональных элементов в двойных линиях.

Можно рассматривать схемы в двойных линиях в предположении, что у нас имеются элементы, реализующие константы (по терминологии Дж. фон Неймана, «активные» и «заземленные» элементы, которые реализуют соответственно 1 и 0). В этом случае вопрос о полноте элементов также сводится к вопросу о самодвойственной полноте функций, но теперь уже относительно расширенной суперпозиции (так что критерий полноты в этом случае дан в решении задачи 7.13).

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 8

8.1. Реализуемая функция определяется по индукции.

8.2. Для доказательства того, что некоторое соединение элементов является схемой, достаточно построить его в некоторое число шагов из исходных элементов при помощи операций из определения 8.1.

Для доказательства противоположного утверждения достаточно заметить, что соединение обладает каким-либо свойством, которым схемы не обладают (имеется несколько свободных выходов; какие-либо выходы элементов соединены между собой; сигнал на входе какого-либо элемента зависит от сигнала на его выходе). Строго говоря, необходимость этих условий следовало бы доказывать по индукции. В дальнейшем эти факты получат обоснование (задача 8.3).

Ответ. Соединения а) и д) являются схемами, а остальные нет.

8.3. Необходимость доказывается по индукции (см. определение 8.1 и пояснение к нему).

Для доказательства достаточности удобно начать с элемента, выход которого свободен, и постепенно расширять схему, присоединяя на каждом шаге те элементы, которые соединены лишь с выходами предыдущей схемы. Обратить особое внимание на доказательство того, что при таком построении мы на некотором шаге исчерпаем все элементы.

8.4. При выяснении вопроса о том, является ли некоторое соединение элементов схемой, удобно, как и при решении предыдущей задачи, строить последовательно схемы S_0, S_1, ..., S_k и т. д. Если на каком-то шаге выяснится, что нарушено условие 1) или 2) задачи 8.3 или же S_i совпадает с S_{i+1}, не совпадая с S, то S не является схемой. Если же S_i совпадет с S для некоторого i, то S — схема.

Ответ. Соединение S является схемой в примере а).

8.6. Использовать представление S в виде последовательности схем S_i, построенной при решении задачи 8.3 (проводить перестройку индукцией по i).

8.7. 1) Используя п. 1, для любой функции φ можно построить нультактную схему S, реализующую φ. Если в этой схеме считать элементы однотактными, то S, вообще говоря, не будет правильной схемой. Однако S можно перестроить, вставляя элементы задержки так, чтобы получилась схема, реализующая φ. Эту перестройку можно осуществить индукцией по построению схемы S (определение 8.1).

8.9. Нет, не будет. Например, нельзя получить констант. Показать, что схема из элементов $\bar{\varphi}$ с одним входом (все входы отождествлены) реализует либо x, либо $\bar{x}$ в зависимости от четности или нечетности задержки.

8.10. Ответ. Нет, не получим. Например, нельзя реализовать функцию $\overline{xy}$. Пусть имеется схема из элементов указанных в условии типов, реализующая функцию от двух переменных $\varphi(x, y)$ с задержкой ν. Тогда при замещении одной переменной константой может получиться либо константа, либо x, либо y, если ν четно, и одна из функций 0, 1, $\bar{x}$, $\bar{y}$, если ν нечетно.

Решение аналогично решению задачи 8.9.

8.11. Введем некоторые обозначения. Пусть

Q — множество функций алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, не сохраняющих 0 и 1 ($f \notin \mathbf{P}_0$, $f \notin \mathbf{P}_1$):

$$f(0, \ldots, 0) = 1, \quad f(1, \ldots, 1) = 0,$$

т. е. при отождествлении всех переменных у f получается отрицание;

R — множество таких функций, что при фиксации любой части переменных (т. е. при подстановке вместо них констант) и отождествлении остальных переменных получается одна из функций 0, 1, $\bar{x}$ (т. е. не может получиться x).

Система однотактных функциональных элементов полна тогда и только тогда, когда среди реализуемых ими функций имеется

а) полная система функций алгебры логики (т. е. удовлетворяющая условиям теоремы Поста, § 6, стр. 83);

б) функция, не принадлежащая множеству **Q**;

в) функция, не принадлежащая множеству **R**.

Воспользоваться решениями задач 8.9 и 8.10. Показать, что при выполнении перечисленных условий всегда можно получить однотактную задержку.

8.12. Рассмотреть систему $\{x\overline{y}, 1\}$, полную в обычном смысле. Через нее нельзя представить глобальной суперпозицией, например, x или $\overline{x}$. Любая глобальная суперпозиция данных функций принимает на нулевом и единичном наборах одинаковые значения. Показать, что совокупность **T** таких функций ($f(0, \ldots, 0)=f(1, \ldots, 1)$) замкнута относительно глобальной суперпозиции.

8.13. Предполными для глобальной суперпозиции являются предполные классы для обычной суперпозиции и класс **T**, введенный в указаниях к предыдущей задаче.

8.14. Условия полноты относительно суперпозиций, удовлетворяющих условиям задачи, и обычных суперпозиций совпадают. Учесть, что подстановка констант всегда является сокращающей подстановкой.

8.15. Рассмотреть однотактный функциональный элемент, реализующий функцию F. Используя однотактные элементы задержки, построить из него искомый автомат.

8.16. Всякая слабо автоматно полная система функциональных элементов полна относительно функций алгебры логики, так как функциональные элементы являются частным случаем автоматов без обратных связей. Обратное можно получить, используя конструкцию предыдущей задачи.

8.17. Взять функциональные элементы, реализующие функции Φ_i, и соединить их в соответствии с уравнением состояний автомата.

8.18. Справедливость этого утверждения в одну сторону следует из того, что функции алгебры логики являются частным случаем автоматов.

Для реализации автомата достаточно взять схему из задачи 8.17 и заменить в ней все элементы схемами, реализующими те же функции с одинаковой задержкой и составленными из имеющихся у нас элементов (воспользоваться замечанием 1 к решению задачи 8.11).

8.19. Нельзя реализовать $x \vee y$ и даже xy, так как в последнем случае надо одновременно реализовать $\overline{xy}$.

8.20. Если схема S реализует некоторую функцию f в двойных линиях, то через функции, реализуемые элементами S, самодвойственно представима некоторая функция φ, отличающаяся от f, быть может, только отрицаниями над аргументами.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 8

8.1. Строим функцию по индукции. Непосредственно видно, что она определена однозначно с точностью до переобозначения переменных, не приводящего к их отождествлению.

1. Основание индукции. Функции, реализуемые функциональными элементами, уже определены.

2. Индуктивный переход. а) Если схема S_0 реализует, функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, то схема S_1, построенная в б) определения 8.1 реализует функцию, полученную отождествлением переменных x_i, x_j, отвечающих объединенным входам.

б) Пусть схема S_0 реализует функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, а схема S_1 — функцию $\psi(y_1, \ldots, y_l)$. Выберем обозначения так, чтобы все переменные $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ были различны. Тогда схема S, построенная в в) определения 8.1, реализует функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, \psi(y_1, \ldots, y_l),$

$x_{i+1}, \ldots, x_n)$, т. е. функция ψ подставлена вместо аргумента x_i, отвечающего входу схемы S_0, соединенному с выходом S_1. Требование о несовпадении x_j, y_m очень существенно, так как могло бы возникнуть недопустимое отождествление переменных.

Проведенное построение показывает, что схему можно рассматривать как функциональный элемент, реализующий построенную функцию.

8.2. а) Сначала рассмотрим схему, изображенную на рис. 21. Затем отождествим у этой схемы два последних входа и соединим этот отождествленный вход с выходом элемента, реализующего φ_3.

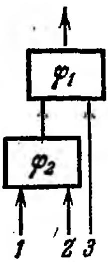


Рис. 21.

б) Сигнал на одном входе элемента φ_2 зависит от выхода элемента φ_3, а сигнал на одном входе элемента φ_3 зависит от сигнала на выходе φ_2. В результате сигнал на одном из входов элемента φ_2 зависит от сигнала на его выходе (и аналогично для φ_3). В схеме этого быть не может.

в) Выходы элементов φ_2 и φ_3 соединены.

г) Имеются два свободных выхода (у элементов φ_1 и φ_2).

д) Рассмотрим схему на рис. 22.

Отождествим у этой схемы попарно первый вход с третьим, а второй — с четвертым. Теперь первый из отождествленных входов соединим с выходом элемента φ_4.

8.3. Необходимость. Доказательство будем вести индукцией по конструкции схемы S.

1. Для одного функционального элемента справедливость условий 1) — 3) очевидна.

2. а) Пусть условия 1) — 3) выполняются для схемы S_0. Проверим их для схемы S_1, полученной из S_0 отождествлением входов (б) определения 8.1). Ясно, что при этом свободные выходы остаются свободными и новых свободных выходов не возникает, а также два выхода не могут попасть на один вход. Кроме того, не может возникнуть цикла $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$, так как тогда эти элементы образовали бы цикл и в схеме S_0. В самом деле, мы соединили лишь входы схемы S_0, т. е. свободные входы функциональных элементов, а новых соединений входов и выходов элементов не могло возникнуть.

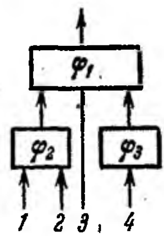


Рис. 22.

б) Пусть теперь схема S построена из схем S_0 и S_1 так, как указано в в) определения 8.1, причем известно, что для схем S_0 и S_1 условия 1) — 3) выполнены. Тогда у элементов схемы S будет свободным единственный выход — выход схемы S_0. Далее, поскольку при соединении схем S_0 и S_1 соединяются лишь некоторые входы элементов, входящих в схему S_0, с выходом одного элемента схемы S_1, не может возникнуть соединений выходов элементов S_0 и S_1. Далее, если бы в схеме S был цикл, то в него обязательно вошли бы как элементы схемы S_0, так и элементы схемы S_1 (так как ни в одной из этих схем не было циклов). Но тогда, как легко заметить, обязательно найдется элемент $\varphi_i \in S_0$, выход которого соединен с входом какого-то элемента $\varphi_j \in S_1$. Но таких соединений быть не может. Итак, для схемы S выполняются условия 1) — 3). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть функциональные элементы соединены так, что выполняются условия 1) — 3). Покажем, что тогда мы имеем схему S. Мы покажем, что S можно индуктивно построить при помощи допустимых соединений. Прежде всего в S имеется единственный функциональный элемент (скажем, φ_0), имеющий свободный выход (условие 1)). Этот элемент мы примем за начальную схему S_0. Рассмотрим теперь те функциональные элементы, выходы которых соединены лишь с входами S_0 (т. е. φ_0). Через S_1 обозначим схему, которая получается из S_0 соединением этих элементов, причем, если какой-то элемент φ_i соединен с несколькими входами S_0, то эти входы нужно предварительно отождествить. Это отождествление проводится непротиворечивым образом в силу условия 2). Опять же в силу условия 2) оставшиеся элементы в S могут быть соединены лишь с теми входами элементов из S_1, которые являются входами схемы S_1. Присоединяя теперь к схеме S_1 те элементы из S, которые соединены лишь с входами схемы S_1, и предварительно отождествляя в случае необходимости входы схемы S_1, получаем схему S_2 и т. д. Если уже построена схема S_i, то рассмотрим множество M_i элементов из S, выходы которых соединены лишь с входами схемы S_i. Заметим, что выходы элементов из S, не входящих в S_i, не могут быть соединены с входами элементов S_i, не являющимися входами всей схемы S_i (в силу условия 2)). Отождествим теперь те входы схемы S_i, которые соединены с одним и тем же элементом из системы M_i. Выходы элементов из M_i соединим с соответствующими входами получившейся схемы. Построенную в результате схему обозначим через S_{i+1}.

Если мы на некотором шаге исчерпаем все элементы из S, то, поскольку все S_i — схемы, а входы элементов из S_i соединены с входами тех же элементов, что и в S, все будет доказано. Итак, нужно доказать, что если S_i не совпадает с S, то S_{i+1} не совпадает с S_i, т. е. что каждая следующая схема содержит большее число элементов, чем предыдущая, а потому на некотором шаге S_i совпадет с S. Предположим противное, т. е. пусть S_i не совпадет с S, хотя S_i и S_{i+1} совпадают, значит, M_i пусто. Это означает, что выход каждого элемента $\varphi \notin S_i$ соединен с входом, по крайней мере, одного элемента, также не принадлежащего S_i. Рассмотрим какую-либо последовательность элементов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_j, \ldots$, где все $\psi_j \notin S_i$, причем какой-либо вход ψ_{j+1} соединен с выходом ψ_j. В силу предыдущего замечания такую последовательность построить можно. Но поскольку в этой последовательности лишь конечное число элементов, какой-либо из элементов встретится в ней дважды. Тогда отрезок последовательности между двумя одинаковыми элементами (начинающийся с этого элемента) является циклом. Мы пришли к противоречию с условием 3), и все доказано.

8.4. а) См. рис. 23. Схема S_3 совпадает с S.

б) S не является схемой, так как последний вход φ_1 соединен с выходами φ_3 и φ_4 (нарушено условие 2)).

в) См. рис. 24. Множество M_1 пусто и S_1 совпадает с S_2; значит, S не является схемой. Элементы φ_3, φ_4, φ_5 образуют цикл.

8.5. Можно, например, рассмотреть схему, изображенную на рис. 25, где φ_1 реализует xy, φ_2 реализует zt. Если элементы φ_1 и φ_2 однотактны, то сигнал на выходе схемы существенно зависит от сигналов на входах схемы, поступивших в разные моменты времени.

8.6. Будем пользоваться обозначениями, введенными при решении задачи 8.3. Перестройку будем проводить индукцией по i. Схема S_0 в перестройке не нуждается. Пусть схема S_i перестроена в схему $\tilde{S}_i$, обладающую нужными свойствами. Если при переходе к S_{i+1} какие-то входы S_i отождествляются и на них подается выход элемента $\varphi \in M_i$, то у $\tilde{S}_i$ соответствующие входы не будем отождествлять, а соединим с ними выходы соответствующего числа элементов φ, у которых отождествим одноименные входы. В результате получаем схему $\tilde{S}_{i+1}$. При этом сигнал на выходе $\tilde{S}_{i+1}$ в момент времени t зависит от сигналов на входах $\tilde{S}_{i+1}$ в те же моменты времени, что и сигнал на выходе $\tilde{S}_{i+1}$ от сигналов на соответствующих входах S_{i+1} (из построения видно, что между входами S_{i+1} и $\tilde{S}_{i+1}$ существует естественное взаимно-одно-

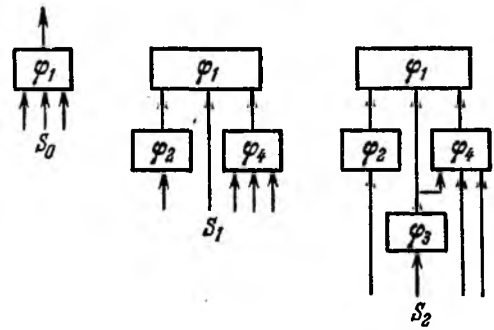


Рис. 23.

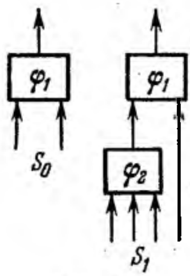


Рис. 24.

значное соответствие). Отсюда следует, что построенная на последнем шаге схема $\tilde{S}$ будет правильной (нужно рассмотреть $\tilde{S}_i$ при i, для которого S_i совпадает с S).

8.7. 1) Пусть мы имеем нультактную схему S, реализующую функцию f. Укажем, как по ней построить схему для f из однотактных элементов тех же типов, что и входящие в S, и элементов задержки. Последние будем осуществлять, исходя из индуктивного определения нультактной схемы (определение 8.1).

Рис. 25.

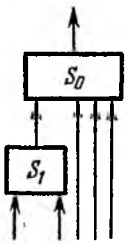


Рис. 26.

1. Основание индукции. Если схема S состоит из одного функционального элемента, то она не нуждается в перестройке: $\tilde{S}=S$.

2. Индуктивный переход. а) Если схема S получается из S_0 отождествлением входов (а) определения 8.1), а схему S_0 мы уже умеем перестраивать ($\tilde{S}_0$), то для перестройки схемы S достаточно отождествить входы у $\tilde{S}_0$, соответствующие тем входам S_0, которые отождествлялись при получении схемы S. Ясно, что получающуюся схему $\tilde{S}$ можно рассматривать как функциональный элемент, реализующий ту же функцию, что и нультактная схема S.

б) Пусть схема S (рис. 26) получается соединением схем S_0 и S_1 (в) определения 8.1). Пусть, далее, схемы S_0 и S_1 уже перестроены ($\tilde{S}_0$, $\tilde{S}_1$), причем в схеме $\tilde{S}_0$ происходит задержка на ν тактов, а в $\tilde{S}_1$ — на μ тактов. Тогда для получения $\tilde{S}$ заменяем в S схему S_0 на $\tilde{S}_0$, S_1 на $\tilde{S}_1$, а ко всем входам $\tilde{S}_0$, кроме соединенного с выходом $\tilde{S}_1$, присоединим последовательно по μ элементов задержки (рис. 27).

В результате на входы $\tilde{S}_0$ будут одновременно (с задержкой μ) подаваться сигналы с выхода $\tilde{S}_1$ и сигналы, которые подаются непосредственно на входы всей схемы $\tilde{S}$, отличные от входов $\tilde{S}_1$. Легко проверяется, что построенная схема обладает нужным свойством и задержка в ней равна $\nu+\mu$.

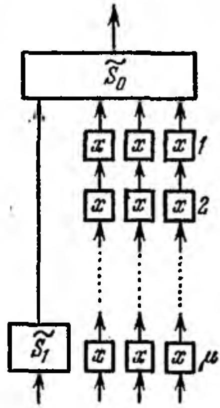


Рис. 27.

З а м е ч а н и е. Укажем, как еще можно описать возможную перестройку нультактной схемы S. Определим индуктивно понятие *верхнего индекса* элемента, входящего в схему. Верхний индекс элемента, все входы которого являются входами схемы, равен единице. Пусть уже определены верхние индексы всех элементов, входы которых соединены с входами элемента φ. Тогда верхний индекс φ равен максимальному из этих индексов плюс единица. Отсутствие обратных связей, как и при решении задачи 8.3, гарантирует нам корректность этого определения. Вообще верхний индекс функционального элемента φ равен максимальному числу элементов, которые сигналы, поданные на вход схемы S, могут пройти, прежде чем попасть на выход элемента φ (т. е. элемент φ тоже считается). Мы не будем пересказывать эту фразу более формально. Легко заметить, что если верхние индексы всех элементов, выходы которых соединены с входами какого-либо одного элемента, равны, то схема будет правильной (это достаточное условие). Отсюда следует способ перестройки схемы S в $\tilde{S}$: нужно вставить между входами элементов и соединенными с ними выходами такое число соединенных последовательно элементов задержки, чтобы сформулированное выше условие равенства верхних индексов было выполнено.

В заключение заметим, что в некоторых случаях не нужно требовать наличия в Φ элементов задержки. Так, система элементов, реализующих $x\bar{y}$ и $\bar{x}$, полна, поскольку задержку (однотактную) можно получить из элемента, реализующего конъюнкцию, отождествлением входов. Отметим, что соединение двух элементов $\bar{x}$ дает двухтактную задержку $\bar{\bar{x}}=x$, но это, как будет видно из дальнейшего, нас, вообще говоря, не устраивает.

2) См. рис. 28.

Заметим, что перестройка схемы при помощи элементов задержки потребовалась в примерах г), д), е).

8.8. Элемент, реализующий единицу, можно считать нультактным (см. замечание 3 к определению 8.4). Такой же можно считать схему, реализующую нуль, полученную отождествлением входов у элемента φ, реализующего $x\bar{y}$. Соединяя выход этой схемы со вторым входом элемента φ (отвечающего y), мы получим схему, реализующую x с задержкой 1; эту схему можно использовать как однотактный элемент задержки. Теперь полнота следует из задачи 8.7 и полноты системы функций алгебры логики $\{x\bar{y}, 1\}$.

8.9. Пусть имеется некоторая правильная схема S, реализующая какую-то функцию f с задержкой ν. Отождествим у нее все входы. Сигнал y на выходе полученной схемы в момент времени t может зависеть существенно лишь от сигнала на входе схемы в момент времени $t-\nu$ (обозначим этот сигнал через x) и не может зависеть от сигналов на входе схемы в другие моменты времени. Поэтому, не меняя y, мы можем подавать на вход схемы в моменты времени, отличные от $t-\nu$, любые сигналы. Будем подавать в момент времени $t-\nu+k$ (k — любое целое число) сигнал x, если k четно, и сигнал $\bar{x}$, если k нечетно. Тогда, учитывая, что элемент φ при отождествленных входах реализует отрицание, получаем, что на выходах всех элементов, входящих в схему, в любой момент времени возникает тот же сигнал, что и на входе схемы в данный

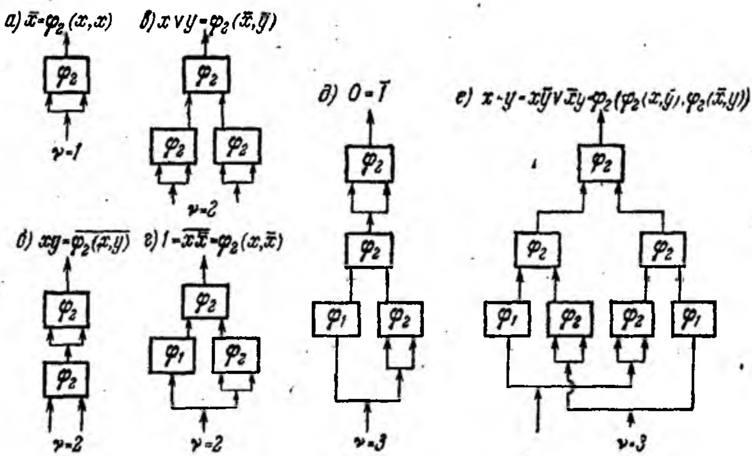


Рис. 28.

момент (т. е. всюду в схеме в каждый момент времени передается один и тот же сигнал). Строгое доказательство проводится индукцией по верхнему индексу элемента (см. замечание к решению задачи 8.6). Если это доказано для элементов с верхним индексом, не превосходящим k, то на все входы элементов с верхним индексом $k+1$ в каждый момент поступают одинаковые сигналы (это либо входные сигналы схемы, либо выходные сигналы элементов с верхним индексом, меньшим $k+1$); в следующий момент на его выходе возникает противоположный сигнал, т. е. тот, который в этот момент подается на вход схемы. В результате на выходе схемы в момент времени t будет тот же сигнал, что и на ее входе, т. е. $y=x$, если ν четно, и $y=\bar{x}$, если ν нечетно. Таким образом, схема с отождествленными входами реализует x, если задержка четна, и $\bar{x}$, если задержка нечетна.

З а м е ч а н и е. Мы опять-таки (см. замечание к решению задачи 8.6) можем построить двухтактную задержку, но, как видно из решения этой задачи, ее присутствие (в отличие от однотактной задержки; см. задачу 8.7) не делает полной систему э л е м е н т о в, реализующих полную систему ф у н к ц и й.

8.10. Пусть имеется некоторая правильная схема S из перечисленных элементов, реализующая функцию φ с задержкой ν. Присоединим к какой-то части входов схемы выходы элементов, реализующих константы (их можно считать не имеющими входов), а остальные входы отождествим. Получим схему с задержкой ν, реализующую функцию от одной переменной, полученную из φ подстановкой констант вместо соответствующих переменных и отождествлением остальных. Пусть на вход полученной схемы S в момент времени $t-\nu$ поступил сигнал x. Тогда сигнал на выходе в момент времени t зависит только от x и не зависит от сигналов на входе схемы в другие моменты времени. Как и при решении предыдущей задачи, будем подавать в момент времени $t-\nu+k$ сигнал x, если k четно, и $\bar{x}$, если k нечетно. Тогда на выходах всех элементов схемы либо будет всегда один и тот же сигнал, либо сигнал, совпадающий с тем, который подается на вход в данный момент времени. Доказательство проводится так же, как и в предыдущей задаче. Нужно заметить только, что при подстановке константы в какой-либо аргумент функции Шеффера мы получим либо константу, либо отрицание. В результате схема $\bar{S}$ реализует или константу (если на ее выходе всегда один и тот же сигнал), либо x, если ν четно, либо $\bar{x}$, если ν нечетно.

Если мы имеем функцию (например, $x\bar{y}$), у которой можно так двумя способами подставить константы вместо одних переменных и отождествить остальные, что получим и x и $\bar{y}$ (например, $x\bar{0}=x$, $1\bar{y}=\bar{y}$), то ее нельзя реализовать схемой из указанных в условии элементов (в силу доказанного такая схема не может иметь ни четную, ни нечетную задержку).

8.11. Необходимость. Необходимость условия а) очевидна (см., например, замечание 1 после определения 8.4).

Необходимость условия б) по существу доказана при решении задачи 8.9. Мы пользовались там лишь тем, что $x\bar{y}\in\mathbf{Q}$. Именно, мы показали, что если все элементы схемы реализуют функции из $\mathbf{Q}$, то реализуемая функция после отождествления переменных совпадает с x, если задержка четна, и с $\bar{x}$, если она нечетна, т. е. нельзя реализовать константы.

Аналогично при решении задачи 8.10 мы пользовались только тем, что $x\bar{y}\in\mathbf{R}$. Мы показали, что если все элементы схемы реализуют функции из $\mathbf{R}$, то реализуемая схемой функция после фиксации любой части переменных и отождествления остальных либо превращается в константу, либо в одну из функций x или $\bar{x}$ в зависимости от того, четна или нечетна задержка.

Достаточность. Отождествляя входы у элементов, реализующих функции $\varphi_1\notin\mathbf{P}_0$, $\varphi_2\notin\mathbf{P}_1$ (имеющиеся в силу а)), мы получим элементы, реализующие константы, или элемент (однотактный), реализующий отрицание. Отождествляя входы у элемента, реализующего функцию $\varphi_3\notin\mathbf{Q}$, мы получим либо однотактный элемент задержки (тогда система полна в силу задачи 8.7), либо элемент, реализующий какую-то константу. Если отбросить случай, когда мы получили однотактный элемент задержки, то можно считать, что мы можем реализовать обе константы, так как если мы их не получили на первом шаге, то при помощи отрицания (реализованного тогда на первом шаге) и одной из констант (полученной на втором шаге) можно получить другую константу. Напомним, что схемы, реализующие константы, имеют нулевую задержку.

Далее, вместо части аргументов функции $\varphi_4 \notin \mathbf{R}$ можно подставить константы и отождествить остальные аргументы так, что получится x. Проделывая соответствующую операцию с элементом, реализующим φ_4, мы получим однотактную задержку. Остается воспользоваться задачей 8.7.

З а м е ч а н и е 1. Поскольку мы показали, что из каждой полной системы функциональных элементов можно получить однотактную задержку, в этом случае всякую функцию алгебры логики можно реализовать с любой задержкой, не меньшей некоторой фиксированной (последовательно присоединяя к выходу схемы элементы задержки).

З а м е ч а н и е 2. Системы функций $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ не только не замкнуты относительно суперпозиции, но при помощи элементов, реализующих функции какой-то из этих систем, можно реализовать функции, в них не входящие (например, функцию x, правда, только с четной задержкой; см. замечание к решениям задач 8.9 и 8.10). Это связано с тем, что возможность реализовать некоторую функцию не позволяет в полной мере считать в дальнейшем, что мы имеем элемент, ее реализующий, так как элементарные функциональные элементы в наших рассмотрениях предполагались однотактными.

8.12. Замкнутость класса $\mathbf{T}$ относительно отождествления переменных очевидна. Рассмотрим теперь функцию $f(\varphi_1(\ldots), \varphi_2(\ldots), \ldots, \varphi_k(\ldots))$, где φ_i подставлены вместо всех аргументов f. Тогда, если $\varphi_i \in \mathbf{T}$, то, когда мы подставим в них нулевые или единичные наборы, вместо аргументов f будут подставлены одни и те же наборы и рассмотренная суперпозиция будет принадлежать $\mathbf{T}$. При этом мы не пользовались тем, что $f \in \mathbf{T}$. Остается заметить, что $x\bar{y} \in \mathbf{T}$, $1 \in \mathbf{T}$.

Класс $\mathbf{T}$ не замкнут относительно обычной суперпозиции ($x\bar{y} \in \mathbf{T}$, $1 \in \mathbf{T}$, но $1\bar{y} = \bar{y} \notin \mathbf{T}$).

8.13. Пусть имеется система функций, полная в обычном смысле и содержащая функцию ψ, не принадлежащую классу $\mathbf{T}$. Отождествляя переменные у ψ, получаем x или $\bar{x}$. Поскольку $\bar{\bar{x}}$ — глобальная суперпозиция, в обоих случаях мы имеем x, а тогда, как мы уже отмечали, достаточно иметь систему функций, полную в обычном смысле.

8.14. Пусть имеется система Φ, полная в обычном смысле. Отождествляя переменные у функций $\varphi_1 \notin \mathbf{P}_0$, $\varphi_2 \notin \mathbf{P}_1$, мы получим либо обе константы, либо $\bar{x}$. Во втором случае мы можем получить x, и обычная суперпозиция приводится к глобальной (см. решение предыдущей задачи). Если же у нас имеются константы, то возьмем любую функцию $\psi \in \Phi$, не являющуюся константой. Пусть x — ее существенная переменная. Подставим вместо остальных переменных набор, при котором значение ψ зависит от значения x (задача 1.9). Получим либо x, либо $\bar{x}$, а эти случаи уже рассмотрены.

8.15. Рассмотрим однотактный функциональный элемент, реализующий функцию F, и к входу, соответствующему аргументу x_j^i, последовательно присоединим $\mu - i - 1$ однотактных элементов задержки. Получим искомый автомат.

8.16. В одну сторону это утверждение очевидно, так как функциональные элементы являются частным случаем автоматов без обратных связей. Пусть теперь имеется полная система функциональных элементов Φ и некоторый автомат без обратных связей $\mathfrak{A}$. Построим схему S, реализующую его характеристическую функцию F. Пусть S реализует F с временем задержки ρ. Как следует из решения задачи 8.11, мы можем построить однотактные элементы задержки при помощи элементов из Φ. Присоединим к входам схемы S последовательно соединенные элементы задержки в том же числе, что и при решении предыдущей задачи. Получившаяся схема будет представлять автомат, отличающийся от $\mathfrak{A}$ лишь временем задержки (оно будет у него на $\rho-1$ тактов больше). Тем самым мы реализовали автомат $\mathfrak{A}$.

8.17. Пусть $\mathfrak{A}(\Omega, n)$ — конечный автомат и Ω состоит из некоторых наборов длины $k+1$. Мы составим схему из функциональных элементов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$, реализующих функции, совпадающие с соответствующими функциями $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k$ в области определения последних. Выходом схемы S будем считать выход элемента φ_0. Входы каждого элемента φ_i соединим (в соответствии с уравнением состояний автомата $\mathfrak{A}$) с выходами всех элементов φ_j; отождествим соответствующие из оставшихся входов у различных элементов φ_i так, чтобы получились выходы схемы S (рис. 29).

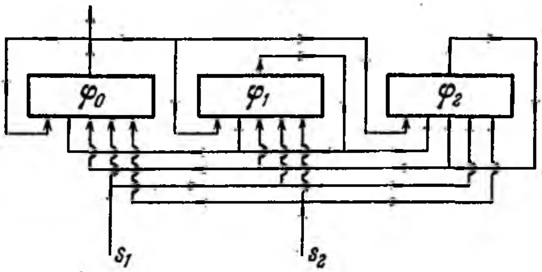


Рис. 29.

Таким образом, внешний вид построенной схемы определяется только числами k, n. Если предположить теперь, что при $t=0$ сигналы на выходах элементов φ_i образуют заданный начальный набор φ^0 и в каждый момент времени на входы S подаются соответствующие сигналы $s(t)$, то схема S будет представлять работу данного автомата $\mathfrak{A}$ при заданных условиях $(\varphi^0, \nu=1, s(t))$.

З а м е ч а н и е. Схему S можно упростить следующим образом. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — частично определенная функция алгебры логики с областью определения Ω. Будем говорить, что $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ — система существенных переменных, если на всяких наборах из Ω, у которых значения этих переменных совпадают, функции f принимают одинаковые значения (для всюду определенных функций это определение согласуется с понятием существенной переменной из §§ 1, 2). Легко заметить, что существует минимальная система существенных переменных. При построении схемы S в задаче 8.17 можно брать элементы φ_i, у которых входы соответствуют минимальной системе существенных переменных Φ_i. Соединение этих элементов и отождествление входов, как и выше, проводится в соответствии с уравнением состояний автомата.

8.18. Поскольку среди автоматов имеются функции алгебры логики, причем определение реализации функций, рассматриваемых как автоматы, не отличается от рассматривавшегося ранее, автоматно полная система функциональных элементов полна также относительно функций алгебры логики.

Пусть теперь мы имеем систему элементов, полную относительно функций алгебры логики, и пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый автомат. Рассмотрим построенную при решении задачи 8.17 представляющую его схему S. Заменим входящие в нее функциональные элементы схемами, реализующими те же функции с одинаковым временем задержки ν и составленными из элементов данной нам системы. Это можно сделать в силу полноты этой системы относительно функций алгебры логики, а также того, что из элементов такой системы можно получить однотактную задержку (замечание 1 к решению задачи 8.11). Искомая схема построена.

8.19. Покажем, например, что нельзя реализовать дизъюнкцию $x \vee y$. Пусть имеется схема, реализующая $x \vee y$ в двойных линиях. Берем выход, реализующий саму функцию $x \vee y$, и соответствующий выходной элемент. Этот элемент φ_1 должен реализовать конъюнкцию (так как других элементов нет). Рассмотрим элементы φ_2, φ_3, выходы которых соединены с входами φ_1. На выходе одного из них должна опять реализоваться $x \vee y$ (легко проверяется, что функции, реализующиеся на выходах φ_2 и φ_3, должны равняться 1 на наборах (1, 1), (1, 0), (0, 1) и, по крайней мере, одна из них должна быть равна 0 на наборе (0, 0)). Продолжая этот процесс дальше, мы придем к схеме из одного элемента, которая должна реализовать $x \vee y$, а тем самым, и к противоречию. Строгое доказательство проводится индукцией (например, по числу элементов схемы).

З а м е ч а н и е. Мы можем без помощи дополнительных элементов строить отрицание функции, которая уже представлена двойной линией. Однако это не равносильно тому, что имеется функциональный элемент, реализующий отрицание.

8.20. 1. Заметим, что все самодвойственно представимые через систему функций Ф функции f могут быть реализованы в двойных линиях при помощи элементов, реализующих Ф. Действительно, достаточно взять схемы из функциональных элементов, реализующие f и f^+, и на входы схемы для f подать сами аргументы, а на входы для f^+ — их отрицания. Если мы имеем систему элементов, реализующих самодвойственно полную систему функций, то мы можем реализовать в двойных линиях систему функций, добавление к которым отрицания делает эту систему полной. Но, как мы видели, отрицание в двойных линиях осуществляется без помощи функциональных элементов.

2. Если некоторая функция f представима схемой в двойных линиях, то легко заметить, что если рассмотрены части схемы, связанные с каждым из выходов, то они реализуют двойственные функции φ и φ^+ (каждая из них имеет n входов, причем если на соответствующие входы подавать противоположные сигналы, то на выходах также возникнут противоположные сигналы; это можно доказать по индукции).

При этом функция φ может отличаться от f лишь отрицаниями над аргументами или значением функции (последнее не существенно). Отсюда следует, что если в двойных линиях можно реализовать любую функцию алгебры логики f, то система соответствующих функций φ самодвойственно полна, а значит, исходная система элементов реализует самодвойственно полную систему функций.

§ 9. РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫЕ СХЕМЫ. ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ СХЕМ

1. Релейно-контактные схемы. В этом параграфе мы познакомимся еще с одним способом реализации функций алгебры логики — *релейно-контактными схемами.* Этот способ не может быть описан в рамках теории схем из функциональных элементов (см. ниже, конец п. 1). Мы обсудим конкретное устройство релейно-контактных схем (в то время как конкретной реализацией функциональных элементов мы не интересовались).

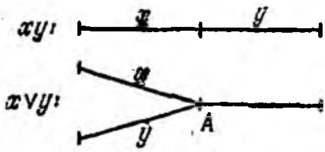


Рис. 30.

Исходное замечание состоит в том, что если логической переменной x поставить в соответствие проводник, по которому ток идет или нет в зависимости от того, $x=1$ или $x=0$, то последовательному соединению проводников отвечает конъюнкция переменных, а параллельному — дизъюнкция (рис. 30). Многократно используя параллельно-последовательные соединения, можно строить схемы. Однако ясно, что мы при этом сможем реализовать лишь монотонные функции. Для реализации произвольных функций достаточно было бы уметь реализовывать отрицание. Это можно сделать при помощи устройства, называемого *реле с размыкающим* (*отрицательным*) *контактом.* Изобразим его схематически на рис. 31. Если по обмотке катушки A ток не идет ($x=0$), то пружина оттягивает контакт B вверх и цепь замыкается. В результате на выходе C будет ток. Если же $x=1$ и по обмотке A идет ток, то контакт B притя-

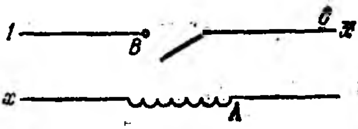


Рис. 31.

гивается вниз и на выходе C нет тока. В результате реализуется функция $\bar{x}$. Заметим, что если на контакт B подавать не 1, а какую-то переменную y, то мы реализуем функцию $\bar{x}y$ (рис. 32).

Можно рассматривать еще *реле с замыкающим* (*положительным*) *контактом* (рис. 33). В этом случае контакт замыкается, если по обмотке катушки идет ток. На выходе схемы реализуется xy *).

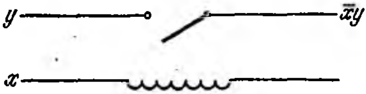


Рис. 32.

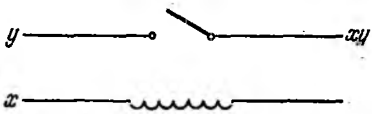


Рис. 33.

При соединениях проводников следует иметь в виду, что ток распространяется во всех направлениях. Поэтому, если реализовать $x \vee y$, как указано на рис. 30, то при $x=1$, $y=0$ ток от точки A будет распространяться по всем направлениям, в том числе и по проводнику, соответствующему переменной y (хотя $y=0$). Ясно, что в такой ситуации работа сложной схемы может исказиться. Этого можно избежать различными способами, например, применяя специальные устройства, пропускающие ток лишь в одном

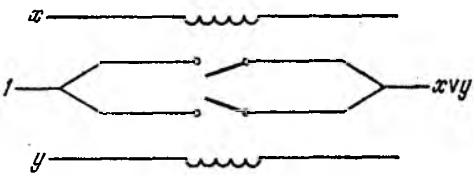


Рис. 34.

направлении. Мы же используем для этой цели реле. Например, используя реле с замыкающим контактом, дизъюнкцию можно реализовать схемой, указанной на рис. 34. При этом результат на выходе $x \vee y$ не может исказить значений аргументов x, y, так как носителями их значений являются обмотки катушек, не связанные непосредственно с выходом схемы. Мы ограничимся этим примером, не указывая, как исправлять положение в общем случае.

*) Мы не будем на рисунках изображать пружины, оттягивающие контакты. Признаком замыкающего (соответственно размыкающего) контакта будет расположение к обмотке ближе (соответственно дальше) проводника, на котором он находится.

Мы исходили пока из предположения, что сигналы находятся в проводниках сколь угодно долго. Теперь мы откажемся от этого предположения и в связи с этим обсудим вопрос о времени работы схемы, построенной из реле (релейно-контактной схемы). Будем считать, что ток распространяется мгновенно, в то время как на срабатывание реле (замыкание контакта) уходит один такт. Это значит, что на рис. 32 и 33 сигнал y должен поступать на один такт позднее сигнала x; сигнал на выходе ($\bar{x}y$ или xy) возникает одновременно с сигналом y. В связи с этим необходимо учитывать время, которое уходит на обработку сигналов в схеме, и иногда менять его, не меняя функции, реализуемой схемой. Это, как и в случае многотактной схемы из функциональных элементов, делается при помощи элементов задержки. Роль элемента задержки играет реле с замыкающим контактом (рис. 33), на контакт которого подается 1 ($y=1$). При этом происходит задержка на один такт.

Если после подачи на входы релейно-контактной схемы сигналов $x_1, \ldots, x_n$ через ν тактов независимо от сигналов на входах в другие моменты времени на выходе возникает сигнал $f(x_1, \ldots, x_n)$, то мы будем говорить, что *схема реализует функцию* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *с задержкой* ν. При этом предполагается, что если в два последовательных момента времени подаются два набора сигналов, то через ν тактов после каждого из них на выходе появляется сигнал, отвечающий значению f на соответствующем наборе. Короче говоря, последовательные наборы сигналов обрабатываются независимо.

Мы не будем давать здесь аккуратное определение того, что такое релейно-контактная схема (считая достаточными для наших целей данные выше пояснения).

9.1. 1) Доказать, что всякую функцию алгебры логики можно реализовать релейно-контактной схемой с некоторой задержкой.

2) Показать, что при этом нельзя ограничиться реле с размыкающими контактами. ▲

Заметим, что поскольку релейно-контактные схемы являются многотактными, в них возможны эффекты типа обратных связей (см. § 8, стр. 122). Например, схема на рис. 35 аналогична схеме звонка. Здесь у двух реле, одно из которых имеет замыкающий, а другое — размыкающий контакты, контакт каждого реле соединен с обмоткой другого. Тогда, если в начальный момент времени t в обеих обмотках есть ток, то в момент $t+1$ контакт A будет замкнут, а контакт B будет разомкнут, т. е. в катушке C тока не будет, а в D будет; в момент $t+2$ оба контакта будут разомкнуты и в катушках тока не будет; после этого в момент $t+3$ контакт A будет разомкнут, а B замкнут, соответственно в катушке C ток будет, а в D его не будет; в результате в момент $t+4$ оба контакта будут замкнуты и в обеих катушках будет ток, т. е. мы вернулись к исходному состоянию. Таким образом, независимо от начального состояния схема будет возвращаться к нему через четыре такта (период ее работы равен четырем тактам); через два такта состояние обоих контактов меняется на противоположное.

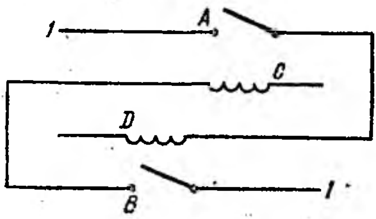


Рис. 35.

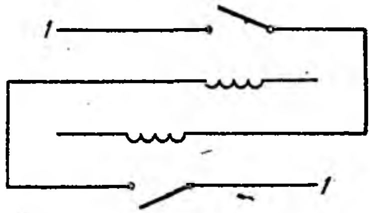


Рис. 36.

Если аналогичным образом соединены реле с одноименными контактами, например, замыкающими (рис. 36), то все будет зависеть от начального состояния. Если в начальный момент времени контакты были замкнуты, то они останутся замкнутыми навсегда; если же один из контактов был замкнут, а другой разомкнут, то в каждый момент времени состояние контактов будет меняться на противоположное. В случае соединенных таким образом реле с отрицательными контактами устойчивым является состояние, когда оба контакта разомкнуты.

9.2. Реализовать релейно-контактными схемами функции: а) $xy\vee\bar{z}$; б) $\overline{xy}\vee zt$; в) $xy\vee yz\vee xz$. ▲

Релейно-контактные схемы нельзя рассматривать просто как схемы из функциональных элементов, реализующих xy, $\bar{x}y$ и 1. Несущественное отличие состоит в том, что на входы реле y нужно подавать на один такт позже, чем x (а не одновременно, как в случае функционального элемента). От этого различия можно избавиться, соединив вход y с выходом реле, осуществляющего задержку на один такт (при этом важно, что сигнал $y\equiv 1$ нет необходимости задерживать). Существенное же различие состоит в том, что в схемах из функциональных элементов каждый имеющийся сигнал можно «размножить» без дополнительных устройств (выход элемента можно соединять с любым числом входов), в то время как для «размножения» сигнала в релейно-контактных схемах нужно подать его на обмотку катушки, снабженной соответствующим числом положительных контактов *). С другой стороны, в релейно-контактных схемах можно соединять проводники, реализуя дизъюнкцию, для чего в случае схем из функциональных элементов требуется специальный элемент.

---

*) Заметим, что к одной и той же катушке может быть подведено любое число контактов — как положительных, так и отрицательных.

2. Контактные схемы. Мы ограиичимся в дальнейшем схемами, в которых соединяются лишь контакты (нет соединений обмоток реле с контактами). Такие схемы называются просто *контактными* *). Введем некоторые правила, которыми мы будем пользоваться при изображении контактных схем. Контакт будем изображать отрезком, концы которого называются *полюсами*, а сам отрезок называется *двухполюсником*. Двухполюсник будем снабжать символом переменной x, если контакт замыкающий, и $\bar{x}$, если он размыкающий; x — переменная, которая реализуется на соответствующей катушке. Двухполюсники соединяются полюсами. Можно считать, что каждой переменной соответствует одна катушка, с которой связано любое число контактов (см. сноску в конце п. 1).

В результате контактная схема представляет из себя *граф*: совокупность точек (*вершин* графа), соединенных отрезками **) (*ребрами* графа). Ребрам графа приписаны символы логических переменных или их отрицаний. Ребра соответствуют контактам. Вершинам соответствуют соединения контактов, соответствующих отрезкам (двухполюсникам), которые в этих вершинах сходятся. Если по одному из контактов, идущему в вершину, идет ток, то он распространяется по всем замкнутым в данный момент коитактам, имеющим данную вершину в качестве полюса. Наконец, в графе нужно выделить две вершины: *вход* и *выход*. На вход всегда подается ток, т. е. ток подается на соответствующие полюсы контактов, идущих в эту вершину (можно было считать, что ток всегда подается на несколько вершин схемы, но тогда эти вершины, не меняя работы схемы, можно отождествить). На другие полюсы ток извне никогда ие поступает. Если на обмотки некоторых катушек подан ток, то через один такт замкнутся соответствующие им замыкающие контакты и разомкнутся размыкающие; на коитактах остальных катушек возникнет противоположная картина. Если при этом на выход схемы поступит ток, то мы говорим, что при данных значениях переменных (состояниях обмоток катушек) в схеме есть проводимость;

---

*) В контактиых схемах обмоткн ие соединяются, а потому ие могут искажаться значения переменных (ср. замечанне к рис. 34).

**) Две вершины могут быть соедииены несколькими различными отрезками (отрезки не предполагаются обязательно прямолинейными). Кроме того, отрезки могут «пересекаться» в точке, не являющейся вершиной (см. ниже рис. 37).

в противном — что проводимости нет. Итак, контактная схема работает в один такт.

На рис. 37 приведены примеры контактных схем.

Белым кружком здесь обозначен вход схемы, черным — выход.

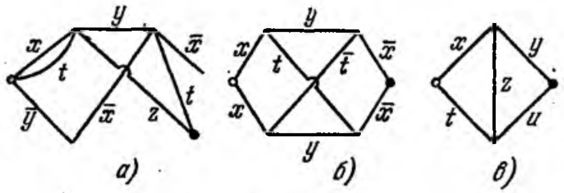


Рис. 37.

9.3. Какие из схем, полученных при решении задачи 9.2, являются контактными? Нарисуйте соответствующие им схемы в обозначениях, принятых в этом пункте. ▲

Обсудим теперь вопрос о том, какую функцию алгебры логики реализует контактная схема. Эта функция равна единице при тех значениях аргументов, при которых в схеме есть проводимость, и нулю, если проводимости нет. Функцию, реализуемую схемой, будем называть *функцией проводимости* схемы. Заметим, что функция проводимости не изменится, если вход и выход схемы поменять местами.

По схеме естественным образом строится ДНФ для функции проводимости. Назовем цепью любую последовательность контактов, в которой у каждого контакта можно так упорядочить полюсы (начало и конец), что у первого контакта началом является вход схемы, начало каждого следующего контакта совпадает с концом предыдущего и конец последнего контакта совпадает с выходом схемы. При этом один и тот же контакт может участвовать в цепи несколько раз, причем при разных его вхождениях в цепь полюсы могут быть упорядочены по-разному. Геометрически цепь представляет собой связную последовательность ребер графа, идущую от входа к выходу. Для того чтобы на выходе схемы был ток при некотором наборе значений переменных, необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, в одной цепи все контакты были замкнуты. Отсюда следует, что если поставить в соответствие каждой цепи Г конъюнкцию $\mathfrak{A}_\Gamma$ переменных или соответственно отрицаний переменных, приписанных входящим в Г контактам, то дизъюнкция этих конъюнкций по всем входящим в схему цепям будет совпадать с функцией проводимости схемы. Однако эти рассуждения требуют уточнения: ведь число всевозможных цепей бесконечно. Выход из положения заключается в том, что на самом деле для получения функции проводимости достаточно брать дизъюнкцию не по всем цепям, а лишь по некоторым.

Цепь Г называется *существенной*, если она ни через какую вершину графа не проходит дважды (точнее: для входа и выхода схемы имеется по одному, а для каждой другой вершины цепи по два контакта, имеющих эту вершину полюсом).

9.4. Доказать, что в каждой схеме имеется лишь конечное число существенных цепей *). ▲

9.5. Доказать, что дизъюнкция конъюнкций, соответствующих существенным цепям, равносильна функции проводимости схемы. ▲

Используя результат задачи 9.5, можно строить по схеме ее функцию проводимости.

9.6. Найти функции проводимости для схем, изображенных на рис. 37. ▲

Посмотрим теперь, как обстоит дело с обратной задачей: построением по функции реализующей ее схемы. Исходя из сказанного выше, можно поступить следующим образом:

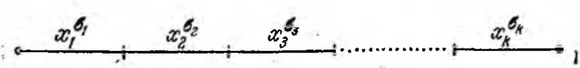


Рис. 38.

Представим функцию в виде ДНФ. Каждой входящей в ДНФ элементарной конъюнкции $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_k^{\sigma_k}$ поставим в соответствие схему, состоящую из последовательно соединенных контактов $x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_k^{\sigma_k}$ (рис. 38). Теперь отождествим между собой, с одной стороны, входы всех

*) Мы рассматриваем лишь схемы, содержащие конечное число контактов.

этих схем (для всех входящих в ДНФ элементарных конъюнкций), с другой стороны — выходы. Полученная схема будет реализовывать заданную функцию, так как существенными цепями будут лишь цепи, отвечающие исходным элементарным конъюнкциям.

9.7. При помощи указанного алгоритма реализовать контактными схемами функции: а) $(y\vee z)\to x\bar{y}$; б) $z\bar{y}\sim yx$; в) $x+y+z$. ▲

При решении задачи 9.7 мы старались упростить ДНФ при помощи формул (2.20) — (2.25). Эти же формулы иногда облегчают построение функций проводимости указанным выше способом.

9.8. На основании формул (2.20) — (2.25) сформулировать правила сокращения цепей при построении функции проводимости. ▲

При реализации функции при помощи контактных схем мы исходили из представления функции в ДНФ. Естественно ожидать, что можно реализовать функции также и исходя из КНФ.

9.9. Указать способ реализации функций при помощи КНФ, аналогичный приведенному выше способу реализации при помощи ДНФ. ▲

9.10. При помощи способа, полученного при решении задачи 9.9, реализовать функции из задачи 9.7. ▲

В процессе реализации функций алгебры логики, исходя из КНФ и ДНФ, мы использовали две операции над контактными схемами: параллельное и последовательное соединения схем. При последовательном соединении двух схем выход первой отождествляется с входом второй, а вход первой и выход второй схемы объявляются соответственно входом и выходом новой схемы. При параллельном соединении входы схем отождествляются и объявляются входом новой схемы; аналогично отождествляются выходы и получающийся полюс принимается за выход всей схемы. Ясно, что последовательному соединению схем отвечает конъюнкция функций проводимости, а параллельному соединению — дизъюнкция.

Опишем индуктивно класс схем, полученных параллельно-последовательным соединением. Схему, состоящую из одного контакта, назовем *элементарной*. Контактную схему назовем *параллельно-последовательной* схемой, или *П-схемой* *), если она может быть получена из элементарных за некоторое число шагов при помощи параллельных и последовательных соединений. Ясно, что каждому способу построения П-схемы из элементарных схем отвечает представление функции проводимости в виде формулы, содержащей только дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, причем отрицания стоят лишь над аргументами, и что, обратно, по каждой такой формуле можно построить некоторую вполне определенную П-схему.

9.11. Построить П-схемы по формулам: а) $(x \vee y\bar{z})(xy \vee zt)$; б) $(\bar{x}(y \vee \bar{z}) \vee \bar{t})x$. ▲

Возникает вопрос: всякая ли контактная схема является П-схемой? Оказывается, что нет.

9.12. Показать, что схема («мостик») на рис. 39 не является П-схемой. ▲

3. Проблема минимизации контактных схем. Одну и ту же функцию можно реализовать различными контактными схемами. При реализации функции естественно стремиться к построению схемы, число контактов в которой либо наименьшее возможное, либо, по крайней мере, не очень значительно превосходит это число. Схема называется *минимальной*, если она содержит наименьшее возможное число контактов среди всех схем, имеющих ту же функцию проводимости.

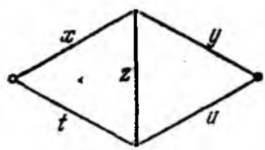


Рис. 39.

Вопрос о нахождении минимальной реализации, как и вопрос о доказательстве минимальности конкретных схем, удается решить лишь в немногих случаях. Приведем вначале простейшие примеры и соображения, позволяющие иногда устанавливать минимальность схем.

9.13. Доказать, что «мостик» (рис. 39) является минимальной схемой. Попытаться сформулировать достаточное условие минимальности схемы, которому удовлетворяет

*) Читается: «пи-схема».

рассматриваемый пример. Построить аналогичные примеры минимальных схем. ▲

Приведем несколько более сложный пример минимальной схемы.

9.14. Показать, что схема, изображенная на рис. 40, является минимальной. Сформулировать соответствующее достаточное условие минимальности схемы. ▲

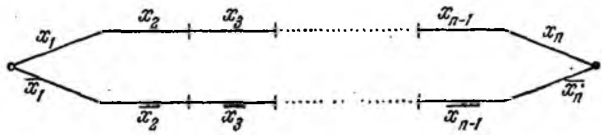


Рис. 40.

9.15. Построить для функции $x_1x_2\ldots x_n \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n$ минимальную схему, отличную от схемы *), изображенной на рис. 40. ▲

Из задачи 9.15 следует неединственность минимальной схемы.

Можно разыскивать минимальные схемы не только в классе всех схем, но и в каком-нибудь более узком классе схем, например, в классе П-схем. Возникает вопрос: всегда ли минимальная П-схема является минимальной в классе всех схем. Ответ на этот вопрос позволяет дать уже не раз выручавший нас «мостик».

9.16. Показать, что для функции, реализованной «мостиком» (рис. 39), не существует П-схемы с тем же числом контактов.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция алгебры логики. Обозначим через $L(f)$ число контактов в реализующей ее минимальной схеме; аналогично $L_{\Pi}(f)$ — число контактов в минимальной П-схеме, реализующей f. Очевидно, что

$$L(f) \leqslant L_{\Pi}(f),$$

---

*) Можно, конечно, на рис. 40 тривиальным образом, не меняя функции проводимости, переставить контакты. Но в задаче речь идет о существенно другой схеме. Мы не будем точно формулировать, какой смысл вкладывается в эти слова (в общем случае это сделать не очень просто).

причем в задаче 9.16 указана функция, для которой имеет место строгое неравенство.

Наибольшее значение $L(f)$ для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных называется *функцией Шеннона* $L(n)$ (аналогично: $L_{\Pi}(n) = \max L_{\Pi}(f)$, где максимум берется по тому же множеству функций).

Переходим к исследованию функций $L(n)$ и $L_{\Pi}(n)$. При этом от исследования реализаций индивидуальных функций мы переходим к вопросу об общей характеристике реализаций функций от n переменных. Речь идет об оценке максимального числа контактов, которое может потребоваться при реализации функций от n переменных.

Начнем с оценки функции $L(n)$ сверху. Для этого нужно рассмотреть какой-либо способ реализации функций контактными схемами и оценить (сверху), какое наибольшее число контактов при этом может потребоваться.

9.17. Найти верхнюю оценку для $L(n)$, исходя из реализации функций при помощи:

а) СДНФ;

б) СКНФ;

в) того из предыдущих двух способов, который требует меньшего числа контактов. ▲

Мы часто будем использовать индуктивный способ реализации функций. В простейшем виде он состоит в следующем. Мы считаем, что уже реализованы все функции от k переменных и реализуем функции от $k+1$ переменных, «раскладывая» их по одной из переменных.

9.18. Получить оценку для $L(n)$, исходя из указанного только что способа реализации функций. ▲

Рассмотренные пока способы реализации функций (задачи 9.17 и 9.18) приводили к П-схемам. Поэтому в этих задачах мы получили одновременно оценки для $L_{\Pi}(n)$.

Сейчас мы рассмотрим способ реализации, уже не приводящий к П-схемам. При построении схемы с помощью СДНФ нужно реализовать элементарные конъюнкции. Пока мы реализовывали каждую элементарную конъюнкцию в отдельности, а потом параллельно соединяли полученные схемы. Теперь же мы реализуем все элементарные конъюнкции одновременно. Назовем $(1, k)$-*полюсником* схему с одним входом и k выходами. Мы будем говорить, что на некотором из k выходов реализуется функция f, если эта функция будет функцией проводимости для нашей схемы в принятом выше смысле, когда за выход схемы принимается этот выделенный выход. В результате на выходах $(1, k)$-полюсника реализуется одновременно k функций алгебры логики. *Универсальным* $(1, 2^n)$*-полюсником* называется $(1, 2^n)$-полюсник, на выходах которого реализуются все полные правильные элементарные конъюнкции от n переменных. Такой универсальный многополюсник можно получить, отождествляя входы (но не выходы!) схем (рис. 38), реализующих элементарные конъюнкции. Однако мы построим схему более экономным способом (рис. 41). Мы

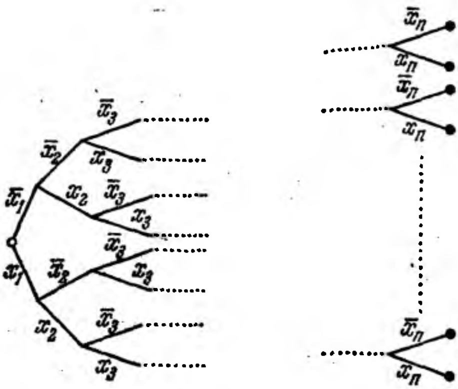


Рис. 41.

надеемся, что способ построения схемы ясен из рис. 41. Его строгое описание дается по индукции. Если уже построен универсальный $(1, 2^{k-1})$-полюсник, то универсальный $(1, 2^k)$-полюсник получится, если к каждому из 2^{k-1} выходов уже построенной схемы присоединить контакты x_k и $\bar{x}_k$, объявив их свободные полюсы выходами новой схемы (их будет 2^k).

9.19. Показать, что схема, изображенная на рис. 41, действительно является универсальным $(1, 2^n)$-полюсником. Указать способ построения схемы для функций алгебры логики, использующий универсальные многополюсники. Какая при этом получится оценка для $L(n)$? ▲

Будем говорить, что проводимость между двумя полюсами схемы равна нулю, если для схемы с тем же графом и наименованиями контактов, но с одним из выделенных полюсов в качестве входа, а другим в качестве выхода функция проводимости тождественно равна нулю. Короче говоря, любой цепи, соединяющей эти полюсы, отвечает конъюнкция, тождественно равная нулю. Если проводимость между любыми двумя выходами $(1, m)$-полюсника равна нулю, то будем называть его *разделительным*.

9.20. Доказать, что построенный универсальный $(1, 2^n)$-полюсник является разделительным. ▲

Мы будем реализовывать функции алгебры логики от n переменных, разлагая в СДНФ по последним $n-k$ переменным (см. (2.16)):

$$f(x_1, \ldots, x_k; x_{k+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n)} \varphi_{\sigma_{k+1} \ldots \sigma_n}(x_1, \ldots, x_k) x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \ldots x_n^{\sigma_n}.$$

Схема будет состоять из двух частей, одинаковых для всех функций f; схемы для различных функций будут различаться соединениями этих частей. Первая часть M_1 будет представлять собой универсальный $(1, 2^{n-k})$-полюсник для переменных $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Он схематически изображен на рис. 42. Вторая часть M_2 представляет собой совокупность схем для всех 2^{2^k} функций от k переменных $x_1, \ldots, x_k$, у которых отождествлены выходы. Таким образом, M_2 можно рассматривать как $(2^{2^k}, 1)$-полюсник (рис. 43).

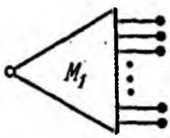


Рис. 42.

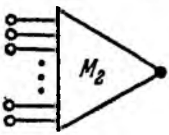


Рис. 43.

Нужно условиться о том, какими схемами реализуются функции в M_2. Из дальнейшего можно усмотреть, что нас устраивает любой из уже известных нам способов реализации функций, например, способ задачи 9.18. Каждый вход многополюсника M_2 отвечает какой-то функции от k переменных.

Из M_1 и M_2 следующим образом конструируется схема S_f для f. Каждый выход M_1 соответствует некоторой элементарной конъюнкции $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \ldots x_n^{\sigma_n}$; смотрим, какая функция от k переменных стоит коэффициентом при этой конъюнкции; отождествляем вход M_2, соответствующий этой функции, с рассматриваемым выходом M_1. Такое отождествление проведем для всех выходов M_1. При этом несколько выходов M_1 могут оказаться отождествленными с одним и тем же входом M_2.

9.21. Показать, что полученная таким образом схема S_f действительно реализует $f(x_1, \ldots, x_n)$. Оценить $L(n)$. ▲

Теперь нужно для каждого n выбрать k таким образом, чтобы построенная схема S_f содержала возможно меньшее число контактов.

Если обозначить число контактов в схеме через $T_{n,k}$, то нужно возможно точнее оценить сверху минимум $T_{n,k}$ по k при фиксированном n. Мы будем оценивать $\min\limits_k T_{n,k}$ при достаточно больших n, т. е. будем пренебрегать величинами, которые становятся малыми при больших n. Более точная постановка задачи будет дана ниже.

Напомним некоторые факты из анализа (их все можно найти в любом учебнике анализа). Пусть имеются две числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, стремящиеся к бесконечности при $n \to \infty$. Говорят, что a_n стремится к бесконечности *быстрее*, чем b_n, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty;$$

если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

то последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются *эквивалентными* ($a_n \sim b_n$); если существуют такие положительные константы c_1 и c_2 и такое натуральное N, что для всех $n > N$

$$c_1 \leqslant \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant c_2,$$

то последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют *один и тот же порядок*. Если a_n стремится к бесконечности быстрее, чем b_n, то последовательности a_n и $a_n + b_n$ эквивалентны.

Рассмотрим последовательности $\{a^{b^n}\}$ $(a > 1,\ b > 1)$, $\{c^n\}$ $(c > 1)$, $\{n^k\}$ $(k > 0)$ и $\{\log_p n\}$ $(p > 1)$. Последовательность $\{a^{b^n}\}$ растет быстрее всех остальных указанных последовательностей, $\{c^n\}$ растет быстрее $\{d^n\}$, если $c > d$; $\{c^n\}$ растет быстрее $\{n^k\}$ при любых c и k; $\{n^k\}$ растет быстрее $\{n^l\}$ при $k > l$; $\{n^k\}$ растет быстрее $\{\log_p n\}$ при любых k и p.

Заметим, что из полученных нами выше результатов (задача 9.18) следует, что $L(n)$ растет не быстрее, чем $\frac{3}{2}\cdot 2^{n-1}$.

9.22. Показать, что $k=k(n)$ при каждом n можно выбрать так, что $T_{n,\,k(n)}$ будет иметь при $n\to\infty$ тот же порядок, что $\frac{2^n}{n}$. Указать верхнюю оценку для $L(n)$ при достаточно больших n. ▲

Пока мы оценивали $L(n)$ сверху. Теперь мы обсудим вопрос об оценке $L(n)$ снизу.

9.23. Можно ли оценить $L(n)$ снизу, исходя из уже полученных результатов? ▲

Полученная пока нижняя оценка существенно отличается от верхней. Сейчас мы уточним нижнюю оценку. При этом мы будем исходить из следующей идеи. Пусть $R(k, n)$ — число различных схем, содержащих не более k контактов, связанных с n переменными. Если $k=L(n)$, то ясно, что $R(L(n), n)$ не может быть меньше числа функций от n переменных, т. е. 2^{2^n} (иначе нельзя было бы реализовать каждую функцию от n переменных схемой, содержащей не более $L(n)$ контактов):

$$2^{2^n} \leqslant R(L(n),\ n).$$

Из этого неравенства и можно получить нижнюю оценку для $L(n)$. При этом нам нужно иметь верхнюю оценку для $R(k, n)$. Мы будем получать ее в два этапа. Напомним, что схема представляет собой граф (совокупность вершин, соединенных ребрами; ребрам соответствуют контакты), ребрам которого поставлены в соответствие символы переменных или их отрицаний.

Два графа мы будем считать *эквивалентными*, если между их вершинами можно установить соответствие так, чтобы входы и выходы соответствовали друг другу и число ребер, соединяющих соответствующие пары вершин, в обоих графах было бы одинаково. Мы для удобства рассматриваем лишь графы с выделенными вершинами: входом и выходом. Ограничимся рассмотрением графов, не имеющих изолированных вершин. Ясно, что в минимальной схеме для функции, отличной от константы, можно считать, что нет ребер, соединяющих какую-нибудь вершину с самой собой.

Вначале мы оценим число $S(k)$ графов с не более чем k ребрами, а потом уже число $R(n, k)$.

9.24. Показать, что

$$S(k) < (2k)^{2k}. \text{ ▲}$$

9.25. Показать, что

$$R(k,\ n) < (2kn)^{2k}. \ \blacktriangle$$

Таким образом в силу сделанного выше замечания и задачи 9.25 должно выполняться неравенство

$$2^{2^n} < (2nL(n))^{2L(n)}.$$

Исходя из этого неравенства, мы и будем пытаться получить нижнюю оценку для $L(n)$. Сразу же заметим, что мы получим нижнюю оценку с тем же порядком роста, что и полученная ранее верхняя оценка. Исходя из этого, удобно представить $L(n)$ в виде

$$L(n) = \frac{2^n}{2n}\alpha(n).$$

Для $\alpha(n)$ мы получаем неравенство

$$2 < (2^n\alpha(n))^{\alpha(n)/n}.$$

9.26. Оценить снизу $\alpha(n)$. Выписать соответствующую оценку для $L(n)$. $\blacktriangle$

Итак, мы получили (задачи 9.22 и 9.26), что для всякого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n

$$\frac{2^n}{2n} < L(n) < (4+\varepsilon)\frac{2^n}{n}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $L(n)$ при $n\to\infty$ имеет тот же порядок, что и $\frac{2^n}{n}$. Эти неравенства были впервые получены Шенноном в несколько более точном виде (нижняя оценка имеет вид $(1-\varepsilon)\frac{2^n}{n}$). Окончательный результат в этом направлении был получен О. Б. Лупановым [1], который показал, что последовательность $L(n)$ эквивалентна $\frac{2^n}{n}$ при $n\to\infty$. При этом в верхней оценке Шеннона потребовалось заменить множитель $4+\varepsilon$ на $1+\varepsilon$.

Более точная нижняя оценка Шеннона получается на том же пути, что и полученная нами нижняя оценка, т. е. показывается, что при больших n и $k=(1-\varepsilon)\frac{2^n}{n}$ число $R(k,\ n)$ схем от n переменных с не более чем k контактами меньше числа функций от n переменных. Удивительно, что столь грубые соображения приводят к точной (в силу теоремы О. Б. Лупанова) нижней оценке. Следует более внимательно продумать, с чем связано это обстоятельство. Оно означает, что последовательности $R(L(n),\ n)$ и 2^{2^n} при $n\to\infty$ эквивалентны. Отсюда, в свою очередь, следует, что если $E(n)$ — число функций от n переменных, для которых имеется единственная реализация, содержащая не более $L(n)$ контактов, то $E(n) \sim 2^{2^n}$ (другими словами, при больших n для почти всех функций имеется единственная такая реализация). Если заметить теперь, что для всякой функции n переменных можно построить схему, содержащую в точности $L(n)$ контактов (например, добавляя к минимальной схеме фиктивные контакты, не имеющие общих полюсов с исходной схемой), то мы получаем, что для реализации большинства функций при больших n требуется в точности $L(n)$ контактов, причем минимальная реализация единственна. Точнее, число функций от n переменных, для реализации которых требуется $L(n)$ контактов, при $n \to \infty$ эквивалентно числу всех функций от n переменных.

Отметим существенную разницу между двумя способами получения нижних оценок для $L(n)$ (ср. задачи 9.23 и 9.26). В первом случае мы указали последовательность функций f_n, где f_n зависит от n переменных, причем для реализации f_n требуется $2n$ контактов. Казалось бы, что аналогичным образом можно попытаться доказывать и общую теорему. Однако лишь в последнее время удалось [2] указать последовательность функций f_n, необходимое для реализации которых число контактов растет нелинейным образом при $n \to \infty$ (быстрее любой линейной функции от n). Эффективно же построить последовательность функций, требующих для своей реализации $L(n)$ контактов (при $n \to \infty$), не удается.

Здесь следует уточнить, что подразумевается под словами «эффективно построить». Имеется в виду, что существует алгоритм, который для каждого n выдает нужную функцию f_n. Но поскольку для каждого n имеется конечное число функций и конечное число схем, содержащих не более k контактов, можно, перебирая все эти функции и схемы (при $k = L(n)$), найти в конечное число шагов нужную функцию. Эту возможность желательно исключить с тем, чтобы алгоритм был отличен от «алгоритма перебора». При этом нужно точно определить, в каком случае мы считаем алгоритм отличным от алгоритма перебора. Необходимость в таком определении возникает в целом ряде задач, однако удовлетворительного ответа на этот вопрос пока не получено. Существует гипотеза о том, что в задаче о построении последовательности функций, требующих для реализации $L(n)$ контактов, нет алгоритма, отличного от «алгоритма перебора». Имеются косвенные аргументы в пользу этой гипотезы [3]. На первый взгляд, сформулированное предположение кажется парадоксальным, если учесть, что при больших n большая часть функций требует при реализации $L(n)$ контактов. Вероятно, это связано с тем, что почти все функции от n переменных при больших n допускают лишь одинаково сложные описания, сравнимые с перебором всех функций от n переменных. Функций же, допускающих короткое описание по сравнению с большинством, мало и они обладают сравнительно простой реализацией. Отметим, что последовательности функций, требующих для реализации мало контактов, хотя их при больших n меньшинство, строятся легко.

В заключение этого пункта заметим, что близкими методами можно оценить необходимое число контактов для различных классов схем, например (см. [4]),

$$L_{\text{П}}(n) \sim \frac{2^n}{\ln n}.$$

Аналогичные оценки можно привести и для схем из функциональных элементов.

4. Реализация линейных функций контактными схемами. В этом пункте на примере линейных функций мы покажем, что для некоторых специальных классов функций общие оценки можно значительно улучшить [5]. Итак, для каждого n рассматриваются две функции:

$$P_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n;$$
$$Q_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 1.$$

Первую из этих функций иногда называют «счетчиком нечетности», а вторую — «счетчиком четности». Эти названия связаны с тем, что P_n равна 1 тогда и только тогда, когда нечетное число переменных равно 1, а Q_n равна 1, когда четное число переменных равно 1. Нам предстоит построить контактные схемы для P_n и Q_n.

Отступление о переключательных схемах. Рассмотрение контактных схем эквивалентно рассмотрению так называемых *переключательных схем*. Каждый контакт можно при этом интерпретировать как переключатель, который может находиться в двух состояниях: например, если он замкнут, то ток по цепи в этом месте может проходить, если разомкнут, то нет. Каждому переключателю ставится в соответствие переменная x или ее отрицание $\bar{x}$; в зависимости от этого значениям $x=1$ и $x=0$ соответствует то или иное состояние переключателя. К входу схемы всегда подается ток; на выходе будет ток, если функция проводимости равна единице. В осветительной цепи, как правило, мы имеем дело с одним переключателем (точнее, каждый переключатель управляет своей частью цепи). Но иногда приходится прибегать к переключательным схемам. Например, пусть имеется несколько переключателей (в разных концах комнаты), и мы хотим, чтобы изменение положения любого из них меняло проводимость в цепи (свет должен зажигаться, если ранее он не горел, или гаснуть, если он горел). Ясно, что соответствующая схема будет реализовывать P_n или Q_n (в зависимости от состояния схемы при выключенных переключателях), так как именно у этих функций изменение значения любой одной переменной на противоположное меняет значение функции (см. задачу 4.9). Читатель без труда придумает другие ситуации, когда естественно прибегнуть к переключательным схемам. Можно разобрать, например, случай, когда свет должен гореть, если включено большинство переключателей («машина голосования»); когда должно быть включено, по крайней мере, два переключателя и т. д. Переключение лампочек в люстре по секциям происходит благодаря тому, что они разбиты на две группы, каждая из которых связана с одним переключателем; вместо двух переключателей иногда используется секционный переключатель, четыре возможных положения которого отвечают возможным состояниям пары переключателей. (Знаете ли вы, как он устроен? Обратите внимание на то, что к нему подходят три привода.)

Возвратимся вновь к реализации P_n и Q_n.

9.27. Найти минимальные схемы, реализующие P_2 и Q_2. ▲

Схемы для P_n и Q_n мы будем строить по индукции.

9.28. Построить контактные схемы для P_n и Q_n. Получить верхние оценки для $L(P_n)$ и $L(Q_n)$. Оценить их снизу. ▲

Итак, мы получили, что линейные функции можно реализовать контактными схемамн, имеющими линейную сложность (т. е. число необходимых контактов линейно завнсит от числа переменных).

Рассмотрим вопрос о реализации линейных функций П-схемами. Прежде всего убедимся, что пока мы такими реализациями не обладаем.

9.29. Показать, что схемы, построенные при решении задачи 9.28, не являются П-схемами при $n>2$. ▲

Итак, мы умеем строить П-схемы лишь для P_2 и Q_2.

9.30. Реализовать П-схемами функции P_{2^k} и Q_{2^k}. Оценить число контактов.

9.31. Реализовать П-схемами P_n и Q_n для любых n. Оценить сверху $L(P_n)$ и $L(Q_n)$. ▲

Итак, в классе П-схем нам удалось реализовать линейные функции лишь схемами, сложность которых растет как n^2. Известно [6], что $L_{\text{П}}(P_n)$ растет нелинейно; именно, для некоторого $c>0$

$$L_{\text{П}}(P_n) \geqslant cn^{3/2};$$

однако неизвестно, каков именно порядок $L_{\text{П}}(P_n)$.

Мы построим теперь схему для арифметического сложения двоичных чисел. Если заданы два n-значных двоичных числа, то их сумма является не более чем $(n+1)$-значным числом. Назовем *n-значным сумматором* $(1, n+1)$-полюсник, в который входят контакты, связанные с переменными $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$, причем выходы упорядочены так, что на i-м выходе реализуется i-й справа знак $s_i(x, y)$ суммы двоичных чисел $(x_n x_{n-1} \ldots x_1)$ и $(y_n y_{n-1} \ldots y_1)$.

Схему будем строить индуктивно в соответствии с обычным способом сложения чисел в позиционной (в частности, в двоичной) системе счисления. Разряды мы считаем справа налево. Для того чтобы провестн сложение в i-м разряде, нужно знать i-е разряды слагаемых x_i и y_i и перенос p_i на этот разряд. При этом нужно вычислить не только

i-й знак суммы s_i, но и перенос на следующий разряд p_{i+1}. Поскольку мы имеем дело со знаками 0 и 1, речь идет об определении двух функций алгебры логики, задающих s_i и p_{i+1}.

9.32. Найти функции $s_i(x_i, y_i, p_i)$ и $p_{i+1}(x_i, y_i, p_i)$. ▲

9.33. Построить схему n-разрядного сумматора. Оценить необходимое число элементов. ▲

5. Схемы из функциональных элементов для арифметических операций. Для схем из функциональных элементов можно получить близкими методами [4], [7] *) оценки, аналогичные полученным в этом параграфе оценкам для контактных схем. При этом порядок роста $L(n)$ — тот же самый $(2^n/n)$; от базиса зависит только константа. Мы не будем останавливаться на этих вопросах, а лишь построим схемы из функциональных элементов, реализующие арифметические операции: сложение и умножение. При этом процедура построения таких схем из функциональных элементов в некотором смысле более естественна, чем для аналогичных контактных схем (это особенно видно при сравнении схем для умножения).

Заметим, что не известно никакой эффективной последовательности функций, требующих для своей реализации схем из функциональных элементов с нелинейно растущей сложностью (ср. замечание на стр. 167).

Мы будем рассматривать схемы из нультактных функциональных элементов. При оценке числа элементов будем интересоваться лишь порядком и не будем стремиться к нахождению точных констант. Как мы увидим, при этом порядок роста числа элементов часто не зависит от используемого базиса функциональных элементов (от базиса зависит лишь константа).

9.34. Построить схему из функциональных элементов для n-разрядного двоичного сумматора. Оценить сверху число необходимых элементов. ▲

9.35. Построить схему из функциональных элементов для n-разрядного вычитания. Оценить число элементов. ▲

---

*) Советуем читателю, заинтересованному в дальнейшей информации об оценке сложности минимальных схем, ознакомиться с обзором [4].

Построим теперь схему для умножения n-разрядных двоичных чисел. Вначале мы, как и в предыдущих случаях, будем исходить из обычного способа умножения двоичных чисел. Напомним, что для умножения чисел $x=(x_n x_{n-1}\ldots x_1)$, $y=(y_n y_{n-1}\ldots y_1)$ нужно умножить x на каждое y_i (xy_i), сдвинуть xy_i на $i-1$ единиц влево (или приписать справа столько нулей) и полученные числа сложить. Поскольку в двоичной системе $y_i=0$ или 1, достаточно для всех $y_i=1$ приписать $i-1$ нулей к x справа (т. е. взять $2^{i-1}x$) и эти числа сложить.

9.36. Построить схему из функциональных элементов для n-разрядного умножения. ▲

Сейчас мы получим [8] более экономный (при больших n) способ умножения. Способ построения в некотором смысле аналогичен способу, которым мы строили П-схемы для линейных функций.

Заметим, что задача о построении схемы для произведения сводится к построению схемы для возведения в квадрат.

9.37. Доказать, что если для возведения в квадрат n-значных чисел можно построить схему, содержащую не более $f(n)$ элементов, то для умножения n-значных чисел можно построить схему из менее чем $af(n+1)+cn$ элементов (a и c не зависят от n).

В частности, если $f(n)$ растет быстрее n при $n\to\infty$ (например, $f(n)=cn^{\alpha}$, $\alpha>1$), то для числа элементов в схеме для умножения получается та же (по порядку) оценка (но с другой константой).

В связи с этим мы начнем со схемы для возведения двоичных чисел в квадрат.

9.38. Построить схему для возведения в квадрат 2^k-значного двоичного числа, содержащую не более $c\cdot 3^k$ элемеитов (c не зависит от k). ▲

9.39. Исходя из задачи 9.38, построить схему для возведения в квадрат n-значного двоичного числа (для любого n). Оценить число элементов. Сделать вывод относительио схемы для умножения. ▲

Мы построили схему для умножения, содержащую не более $cn^{\log_2 3}$ элементов. Оказывается, этот результат можно усилить [9]: для любого $\alpha > 1$ существует схема для умножения, содержащая не более cn^{α} элементов (c не зависит от n). Таким образом, существуют способы для умножения чисел в позиционной системе счисления, содержащие не cn^2 элементарных актов (сложений и умножений однозначных чисел, как при обычном способе), а cn^{α} $(1 < \alpha < 2)$. Однако не следует забывать, что в этих оценках константы c различны, а потому эти новые способы могут оказаться более экономичными лишь при больших n.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 9

9.1. 1) Доказать по индукции, воспользовавшись полнотой системы функций $\{xy, \bar{x}\}$ и элементами задержки.

2) Нельзя реализовать, например, $\bar{x}y$ (и вообще $f \notin \mathbf{R}$; см. указание к задаче 8.11). Аналогично решению задачи 8.10.

9.3. Схемы а) и в), приведенные при решении задачи 9.2, являются контактными.

9.4. Для каждой цепи рассмотреть последовательность вершин, через которые она проходит, и доказать конечность числа таких последовательностей.

9.5. Показать, что если в какой-то цепи все контакты замкнуты, то найдется существенная цепь, в которой также все контакты замкнуты.

9.7. Алгоритм преобразования формулы к ДНФ см. в п. 6 § 2. Полученную ДНФ можно упростить при помощи формул (2.20) — (2.25).

9.8. Воспользоваться формулами (2.20), (2.22) и (2.23).

9.9. Построить вначале схемы, реализующие элементарные дизъюнкции.

9.11. Формула указывает некоторый способ построения функции из переменных и их отрицаний при помощи конъюнкций и дизъюнкций. Схему следует строить индуктивно, исходя из этой конструкции.

9.12. Показать, что схему нельзя разбить ни на две схемы, соединенные последовательно, ни на две схемы, соединенные параллельно.

9.13. Учесть, что все переменные в функции проводимости существенны.

9.14. Показать, что во всякой схеме, реализующей данную функцию, каждой переменной должен соответствовать, по крайней мере, один положительный и один отрицательный контакты.

9.15. Схема на рис. 40 соответствует СДНФ. Искомую схему можно получить, исходя из некоторой КНФ.

9.16. Показать, что рассматриваемую функцию нельзя представить формулой при помощи конъюнкций и дизъюнкций, в которой каждая из переменных встречается по одному разу. Точнее ее нельзя представить в виде конъюнкции или дизъюнкции функций, не имеющих общих переменных.

9.17. а), б) $L(n) \leqslant n2^n$; в) $L(n) \leqslant n2^{n-1}$.

9.18. $L(n) \leqslant 3 \cdot 2^{n-1} - 2$; показать, что если c_k — число контактов, которое может потребоваться при указанном способе реализации функций от k переменных, то $c_{k+1} \leqslant 2c_k + 2$.

9.19. Универсальность $(1, 2^n)$-полюсника можно доказать по индукции. Для реализации функции достаточно отождествить выходы многополюсника, сопоставленные соответствующим элементарным конъюнкциям. Получается оценка:

$$L(n) \leqslant 2^{n+1}-2.$$

9.20. В любой цепи, соединяющей выходы, для некоторой переменной имеется один положительный и один отрицательный контакты. Доказательство удобно проводить по индукции.

9.21. Для доказательства того, что нет лишних цепей с ненулевой проводимостью, воспользоваться разделительностью универсального многополюсника M_1.

Имеем для любого $k \leqslant n$

$$L(n) \leqslant T_{n,\,k} = 2 \cdot 2^{n-k} + 2 \cdot 2^k \cdot 2^{2^k}.$$

9.22. Нужно выбрать $k(n)$ так, чтобы второй член в $T_{n,k}$ (см. указание к задаче 9.21) рос медленнее первого. При этом первый член нужно сделать возможно меньшим. Чтобы удовлетворить этим двум требованиям, достаточно для любого $\beta > 0$ выбрать в качестве $k(n)$ наибольшее целое число, не превосходящее $\log_2 n - \beta$.

В результате получается, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$L(n) < (4+\varepsilon)\frac{2^n}{n}.$$

9.23. Воспользоваться результатом задачи 9.14.

9.24. Оценить сверху число вершин в графе с k ребрами; перенумеровать вершины в графе и заметить, что граф определяется указанием того, каким числом ребер соединена каждая пара вершин.

9.25. Найти число схем для n переменных, имеющих один и тот же граф с k контактами. После этого воспользоваться оценкой предыдущей задачи.

9.26. $\alpha(n) > 1$; $L(n) > \dfrac{2^n}{2n}$.

9.27. Воспользоваться СДНФ или СКНФ. См. задачу 9.14.

9.28. Имеем:

$$P_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = P_2(P_n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1});$$
$$Q_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = Q_2(P_n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}).$$

Далее, $P_n = \overline{Q_n}$.

Построить (по индукции) (1, 2)-полюсник, реализующий P_n и Q_n; воспользоваться схемами предыдущей задачи. Имеем при $n > 1$:

$$2n \leqslant L(P_n) \leqslant 4(n-1);$$
$$2n \leqslant L(Q_n) \leqslant 4(n-1).$$

Для получения нижней оценки воспользоваться задачей 9.14.

9.29. Рассмотреть для простоты, например, схему для $P_3(x, y, z)$. Показать, что схема непредставима в виде параллельного или последовательного соединения двух (непустых) схем. Этот факт доказывается аналогично решению задачи 9.12. Соответствующее свойство схем для P_n и Q_n можно доказать по индукции.

9.30. Имеем:

$$P_{2m}(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m) = P_2(P_m(x_1, \ldots, x_m), P_m(y_1, \ldots, y_m));$$
$$Q_{2m}(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m) = Q_2(P_m(x_1, \ldots, x_m), P_m(y_1, \ldots, y_m)).$$

При помощи этих формул можно реализовать П-схемами P_{2m} и Q_{2m}, если P_m и Q_m уже реализованы.

Исходя из этого, для реализации P_{2^k} и Q_{2^k} достаточно 4^k контактов.

9.31. Пусть $2^k < n < 2^{k+1}$ (случай $n = 2^k$ уже разобран); $n - 2^k = m$.

Первый способ. Построить схему для $P_{2^{k+1}}$ и преобразовать ее, исходя из того, что $x_p = 0$ при $p > n$. Получается очевидная оценка:

$$L_{\Pi}(P_n) \leqslant 4n^2$$

или более точная оценка:

$$L_{\Pi}(P_n) \leqslant 2n^2.$$

Второй способ. Имеем:

$$P_n(x_1, \ldots, x_{2^k}; y_1, \ldots, y_m) =$$
$$= P_{2^k}(P_2(x_1, y_1); \ldots; P_2(x_m, y_m); x_{m+1}, \ldots, x_{2^k}).$$

Найти число контактов в такой схеме $k(n)$ и оценить сверху

$$\frac{k(n) - n^2}{n^2}.$$

При этом можно заменить n непрерывной переменной и искать наибольшее значение возникающей функции средствами дифференциального исчисления.

Окончательный ответ:

$$L_{\Pi}(P_n) \leqslant \frac{9}{8} n^2.$$

9.32. $s_i(x_i, y_i, p_i) = x_i + y_i + p_i$; $p_{i+1}(x_i, y_i, p_i) = x_i y_i \vee x_i p_i \vee y_i p_i$.

9.33. Построение проводить по индукции. При этом строить $(1, i+2)$-полюсник T_i, на выходах которого реализуются разряды суммы $s_1, \ldots, s_i$, перенос на $(i+1)$-й разряд p_{i+1} и $q_{i+1} = \overline{p_{i+1}}$. Число контактов в сумматоре растет линейно.

9.34. Для каждого разряда построить схемы, реализующие s_i и p_{i+1}, и соединить эти схемы соответствующим образом. Число элементов в этой схеме меньше cn для некоторой константы c (не зависящей от n).

9.35. Пусть нам нужно вычесть из двоичного числа $s = (s_n s_{n-1}, \ldots, s_1)$ двоичное число $x = (x_n x_{n-1} \ldots x_1)$; будем считать, что $s_n = 1$. Схему будем строить, исходя из обычного способа поразрядного вычитания (справа налево). Напомним, что в двоичной системе «десяток» — это число два; поэтому если мы занимаем при вычитании единицу в $(i+1)$-м разряде, то к i-му разряду прибавляются две единицы. При этом ясно, что не может возникнуть необходимости занимать более одной единицы *). (Конечно, это замечание относится лишь к случаю, когда мы вычитаем одно число, а не несколько.) При построении схемы технически удобнее (в отличие от обычного способа вычитания), если требуется занять единицу в $(i+1)$-м разряде, запомнить это, выполнить действие в i-м разряде независимо от значения s_{i+1} (т. е. можно ли отнять от s_{i+1} единицу или нужно двигаться дальше налево, пока не дойдем до разряда, от которого действительно можно отнять единицу), далее перейти к рассмотрению $(i+1)$-го разряда, опять-таки не рассматривая более левых разрядов. Итак, когда мы рассматриваем i-й разряд, то

*) Строго говоря, это надо еще доказать индукцией по n.

нам известны s_i, x_i, а также то, нужно ли отнять от i-го разряда единицу для предыдущих разрядов. Введем величину q_i, равную единице, если единицу нужно занимать, и равную нулю, если не нужно.

Из s_i надо вычесть x_i и q_i. Если $s_i<x_i+q_i$, то мы занимаем единицу в $(i+1)$-м разряде; тогда s_i увеличивается на 2 и вычитание можно произвести, причем получится величина y_i, равная 1 или 0. Таким образом, нам нужно определить две функции: $y_i(s_i, x_i, q_i)$ и $q_{i+1}(s_i, x_i, q_i)$, т. е. i-й знак разности y_i и величину q_{i+1}, заимствуемую из $(i+1)$-го разряда. Имеем:

$$y_i(s_i, x_i, q_i)=s_i+x_i+q_i;$$

$$q_{i+1}(s_i, x_i, q_i)=q_ix_i \vee \bar{s}_i(x_i \vee q_i).$$

Построение схемы аналогично построению схемы сумматора. Число контактов не превосходит cn. Если $q_{n+1}=1$, то $s<x$.

Можно также свести вычитание к сложению, используя следующее свойство двоичных чисел. Пусть $\bar{x}=(\bar{x}_n\bar{x}_{n-1}\ldots\bar{x}_1)$; тогда $x+\bar{x}=(\underbrace{1\ 1\ \ldots\ 1}_{n})=10^{n+1}-1$.

9.36. Произведение двух n-значных чисел содержит не более $2n$ разрядов ($x<2^n$, $y<2^n \Rightarrow xy<2^{2n}$). Обозначим произведение xy через $p=(p_{2n}p_{2n-1}\ldots p_2p_1)$. Итак,

$$p=y_1x+y_2x\cdot 2+\ldots+y_ix\cdot 2^{i-1}+\ldots+y_nx\cdot 2^{n-1}.$$

Напомним, что 2^k в двоичной системе записывается как единица с k нулями. Обозначим через $p^{(j)}$ сумму первых j слагаемых в выражении для p. Поскольку число разрядов в каждом последующем слагаемом не более чем на единицу превосходит число разрядов в предыдущих слагаемых, то $p^{(j)}$ содержит не более $n+j$ разрядов. Все последующие слагаемые в сумме для p имеют нули в последних разрядах, поэтому последние j разрядов у $p^{(j)}$ совпадают с этими же разрядами у p, т. е. $p^{(j)}$ имеет вид $p^{(j)}=(t_n^{(j)}\ldots t_1^{(j)}p_jp_{j-1}\ldots p_1)$. Имеем:

$$p^{(j+1)}=p^{(j)}+y_{j+1}x\cdot 2^j=(t_n^{(j+1)}\ldots t_1^{(j+1)}p_{j+1}p_j\ldots p_1).$$

Сопоставляя эти формулы, мы видим, что

$$t^{(j)}+y_{j+1}x=(t_n^{(j+1)}\ldots t_1^{(j+1)}p_{j+1})$$

(здесь мы положили $t^{(j)}=(t_n^{(j)}t_{n-1}^{(j)}\ldots t_1^{(j)})$). В результате мы получили возможность для индуктивного построения схемы: на $(j+1)$-м шаге мы, исходя из n-значных чисел $t^{(j)}$, x и однозначного числа y_{j+1}, находим $(j+1)$-й разряд произведения p_{j+1} и число $t^{(j+1)}$.

Число элементов в схеме не превосходит cn^2.

9.37. Воспользоваться формулой $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ и задачей 9.35.

9.38. Показать, что если для возведения в квадрат m-значного числа достаточно $d(m)$ элементов, то для возведения в квадрат $2m$-значного числа достаточно

$$3d(m)+cm$$

элементов, где c не зависит от m. Для доказательства представить $2m$-значное число в виде $x\cdot 2^m+y$, где x и y — m-значные числа. Нужная формула доказывается индукцией по k.

9.39. Воспользоваться схемой для возведения в квадрат 2^k-значного числа, где $n \leqslant 2^k$. Для числа элементов получится оценка:

$$d(n) \leqslant cn^{\log_2 3}.$$

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 9

9.1. 1) Всякую функцию можно представить в виде суперпозиции конъюнкций и отрицания. Роль основания индукции играет рассмотрение функции, совпадающей с аргументом (x). Ее реализуемость очевидна.

Индуктивный переход состоит из двух частей. Пусть последняя операция при представлении f в виде указанной суперпозиции — отрицание: $f=\bar{\varphi}$. Функция φ представляется в виде суперпозиции за меньшее число шагов, чем f. Предположим, что функция φ уже реализована в виде схемы с задержкой ν. Тогда, соединяя выход этой схемы с обмоткой реле, изображенного на рис. 31, мы получим в результате схему, реализующую f с задержкой $\nu+1$.

Пусть теперь последняя операция в суперпозиции — конъюнкция: $f=\varphi_1\varphi_2$, а функции φ_1 и φ_2 реализованы с задержками ν_1 и ν_2 соответственно. Соединяя выход одной из них последовательно с элементами задержки, добьемся того, чтобы схема, реализующая φ_2, имела задержку ν, на один такт бо́льшую, чем схема, реализующая φ_1. Подавая теперь выход схемы для φ_1 на обмотку, а выход схемы φ_2 на контакт реле с замыкающим контактом, мы получим схему, реализующую $\varphi_1\varphi_2$ с задержкой $\nu+1$. Доказательство закончено.

2) Пусть имеется схема S, реализующая $x\bar{y}$ с задержкой ν, где ν четно. Подадим в момент t сигналы $\{x=x_0,\ y=1\}$. На выходе в момент $t+\nu$ мы должны получить $\bar{x}_0$ независимо от сигналов на входах S в моменты времени, отличные от t. В момент $t+k$, где k — любое целое число, будем подавать сигналы $\{x=x_0,\ y=1\}$, если k четно, и $\{x=\bar{x}_0,\ y=1\}$, если k нечетно. По индукции показывается, что в любом проводнике будет либо сигнал, не зависящий от x_0, либо тот же сигнал, что в данный момент на входе x. (Исходя из предположения, что сигналы на входах реле обладают указанным свойством, проверить, что сигнал на его выходе им обладает.) Поэтому на выходе S либо сигнал не зависит от x_0, либо это есть x_0 (ν четно). Мы пришли к противоречию. Аналогично, если ν нечетно, то, подавая $x=0$, мы получим, что S не может реализовать y. Таким образом, имея только реле с размыкающими контактами, нельзя реализовать даже $x\bar{y}$.

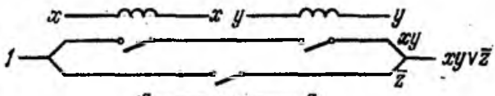
9.2. Например, см. схемы на рис. 44.

9.3. См. рис. 45. Мы видим, насколько более компактными являются принятые в п. 2 обозначения.

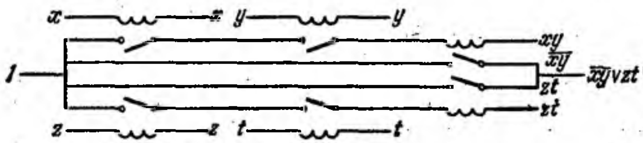
9.4. Выпишем подряд вершины, через которые проходит существенная цепь. Среди этих вершин не может быть повторяющихся. Ясно, что число последовательностей неповторяющихся вершин конечно. Хотя, вообще говоря, последовательность вершин неоднозначно определяет цепь (может быть несколько контактов с одинаковыми полюсами), имеется лишь конечное число цепей с совпадающей последовательностью вершин.

З а м е ч а н и е. Можно было бы по-иному определить существенные цепи — как цепи с неповторяющимися контактами. Это определение не эквивалентно данному выше. Доказательство конечности числа существенных цепей было бы несколько проще.

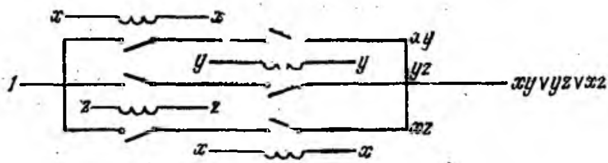
9.5. Пусть имеется некоторая цепь, в которой некоторая вершина встретилась дважды. Отбросим все контакты, которые встречаются между двумя прохождениями через эту вершину. Ясно, что при этом мы вновь получим цепь, причем если все контакты исходной цепи были замкнуты, то будут замкнуты и все контакты вновь полученной цепи. На другом языке: конъюнкция, соответствующая исходной цепи, поглощает конъюнкцию для полученной цепи (см. в) определения 5.3).



а) Схема однотактна

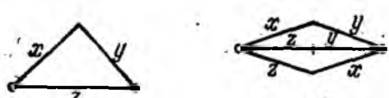


б) Схема двухтактна



в) Схема однотактна

Рис. 44.



а) б)

Рис. 45.

Таким образом, последовательно сокращая цепь, можно получить существенную цепь, в которой будет проводимость, если была проводимость в исходной цепи. Итак, на выходе будет ток, если хотя бы в одной существенной цепи все контакты замкнуты, а это равносильно доказываемому утверждению. Можно было бы исходить из определения существенной цепи, приведенного в замечании к решению предыдущей задачи.

9.6. а) $xyt \vee tyt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t \vee \bar{y}\bar{x}yz = yt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t$.
б) $xy\bar{x} \vee xt\bar{x} \vee xy\bar{t}y\bar{x} \vee xty\bar{t}\bar{x} \vee xy\bar{x} \vee xt\bar{x} \vee x\bar{t}yt\bar{x} \vee xyty\bar{x} = 0$.
в) $xy \vee tu \vee xzu \vee tzy$.

9.7. а) $y \vee z \longrightarrow x\bar{y} = \overline{y \vee z} \vee x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}$ (см. рис. 46, *а*)). б) $\bar{z}y \sim yx = (\bar{\bar{z}}y \vee yx)(\overline{\bar{z}y} \vee \overline{yx}) = (\bar{\bar{z}} \vee y \vee yx)(\bar{z}y \vee \bar{y} \vee \bar{x}) = (\bar{z} \vee y)(\bar{y} \vee \bar{x}) = \bar{z}\bar{y} \vee \bar{z}\bar{x} \vee y\bar{x}$ (см. рис. 46, *б*)). в) $x + y + z = xyz \vee xy\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz$ (см. рис. 46, *в*)).

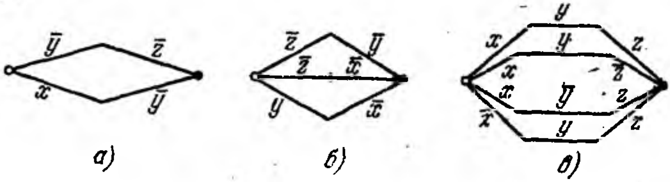


Рис. 46.

9.8. 1) Формула (2.20): при построении функции проводимости можно не учитывать цепи, содержащие другие цепи (мы фактически уже пользовались этим правилом при выделении существенных цепей; существенные цепи не могут поглощаться друг другом);

2) Формулы (2.22), (2.23): если некоторый контакт представляет собой цепь, то противоположный ему контакт можно не учитывать во всех других цепях.

Можно на основании этих формул сформулировать и более сложные правила. Формулы (2.20) — (2.25) позволяют часто упрощать схемы, не меняя функции проводимости. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

9.9. Каждой элементарной дизъюнкции $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_k^{\sigma_k}$ поставим в соответствие схему, изображенную на рис. 47. Затем последовательно соединяем эти схемы для всех элементарных дизъюнкций, входящих

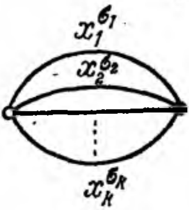


Рис. 47.

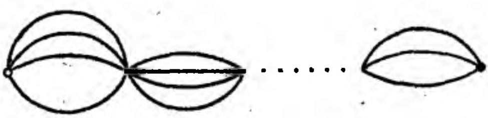


Рис. 48.

в КНФ (рис. 48). Мы соединяем схемы так, чтобы вход последующей схемы совпадал с выходом предыдущей. Вход первой и выход последней из рассматриваемых схем являются соответственно входом и выходом полученной схемы.

9.10. а) $(y \vee z) \longrightarrow x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} = \bar{y}(\bar{z} \vee x)$ (рис. 49, *а*)). б) $\bar{z}y \sim yx = (\bar{z} \vee y)(\bar{y} \vee \bar{x})$ (рис. 49, *б*)). в) $x + y + z = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\ \&\ (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$ (рис. 49, *в*).

9.11. а) Начинаем с элементарных схем (рис. 50). Первые два контакта нужно иметь в двух экземплярах. Теперь при помощи последовательных соединений реализуем конъюнкции $\bar{y}z$, xy, zt (рис. 51).

Теперь, используя параллельные соединения, реализуем функции $x\vee y\bar{z}$ и $xy\vee zt$ (рис. 52). Наконец, последовательно соединяем эти схемы (рис. 53).

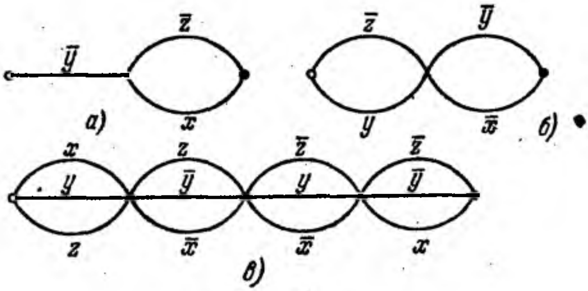


Рис. 49.

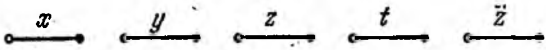


Рис. 50.

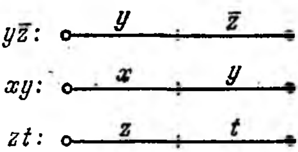


Рис. 51.

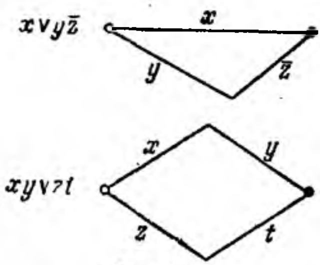


Рис. 52.

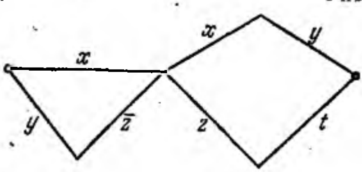


Рис. 53.

б) См. рис. 54.

9.12. Поскольку данная схема не является элементарной, то для того, чтобы она была П-схемой, необходимо, чтобы ее можно было разбить на две подсхемы, соединенные либо последовательно, либо параллельно. Если две схемы соединены последовательно, то у полученной схемы все полюсы, исключая полюс, по которому происходит соединение, могут либо не иметь общих контактов ни с входом, ни с выходом всей схемы, либо иметь общий контакт или только с входом, или только с выходом. Ясно, что какой бы из внутренних полюсов на рис. 39 мы ни приняли за соединяющий подсхемы, оставшийся полюс будет иметь общий контакт как с входом, так и с выходом схемы. Поэтому нашу схему нельзя получить последовательным соединением двух схем.

Если схема является параллельным соединением двух схем, то это означает, в частности, что ее контакты и полюсы можно разбить на две части так, чтобы либо в одной из частей содержались лишь контакты, непосредственно соединяющие вход с выходом (и тогда в ней не будет полюсов, отличных от входа и выхода), либо полюсы, входящие в различные части схемы и отличные от входа н выхода, не имели общих контактов. Первая возможность в нашей схеме не может реализоваться,

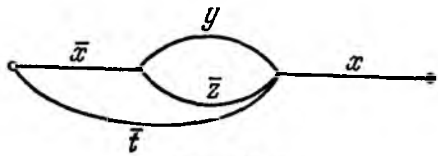


Рис. 54.

так как в ней нет контактов, непосредственно соединяющих вход и выход. Вторая возможность не может реализоваться, так как в схеме имеется всего два внутренних полюса, причем они имеют общий контакт. Итак, схему нельзя получить также и параллельным соединением двух непустых схем. Значит, она не является П-схемой.

9.13. Если некоторая переменная входит в функцию существенно, то в реализующей эту функцию схеме должен быть хотя бы один контакт, связанный с этой переменной (это очевидно). Функцию проводимости для мостика мы нашли в задаче 9.6 в): $xy \vee tu \vee xzu \vee tzy$. В ней все переменные существенны: при $t=z=u=0$, $y=1$ значение функции зависит от значения x (аналогично доказывается существенность переменных y, t, u); при $x=u=1$ все зависит от значения z. Поскольку в данной схеме каждой переменной соответствует по одному контакту, она минимальна.

Общий принцип: если в схеме все контакты относятся к разным переменным, причем все эти переменные входят в функцию проводимости существенно, то схема минимальна.

9.14. Пусть в некоторой схеме имеются лишь положительные контакты, связанные с переменной x_1. Тогда для функции проводимости $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеем для всех $x_2, \ldots, x_n$:

$$f(1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant f(0, x_2, \ldots, x_n)$$

(если в схеме замкнуты некоторые контакты, то проводимость в схеме не может исчезнуть). Аналогично, если с x_1 связаны лишь размыкающие контакты, то

$$f(1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Пусть теперь существует такой набор $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, что

$$f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) < f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Тогда будем говорить, что f не возрастает по x_1; во всякой схеме, реализующей f, обязательно есть отрицательный контакт, связанный с переменной x_1. Аналогично, если существует набор $(\beta_2, \ldots, \beta_n)$, для которого

$$f(1, \beta_2, \ldots, \beta_n) > f(0, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

(в таких случаях мы будем говорить, что f не убывает по x_1), то во всякой схеме, реализующей f, должен быть положительный контакт, связанный с x_1. Если же f по переменной x_1 не возрастает и не убывает, то во всякой схеме для f должны быть как положительные, так и отрицательные контакты, связанные с x_1.

Рассмотрим теперь функцию $x_1x_2\dots x_n \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_n$, являющуюся функцией проводимости для схемы, изображенной на рис. 40. Полагая $\alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_n=0$, мы видим, что эта функция не возрастает по переменной x_1, а полагая $\beta_2=\beta_3=\dots=\beta_n=1$, мы видим, что она не убывает по этой переменной. Поскольку рассматриваемая функция симметрична относительно всех своих переменных, этим же свойством обладают и остальные переменные. Учитывая, что в нашей схеме с каждой переменной связано лишь по одному положительному и одному отрицательиому контакту, получаем, что эта схема минимальна.

Достаточное условие минимальности схемы: если с каждой перемеиной в схеме связано не более одного положительного и одного отрицательного контакта, все эти переменные являются существенными для функция проводимости, причем по тем переменным, для которых имеются оба указанных контакта, функция не возрастает и не убывает, то схема минимальиа.

9.15. Указанную функцию можно следующим образом представить в виде КНФ:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee \bar{x}_4)\ \dots\ (x_{n-1} \vee \bar{x}_n)(x_n \vee \bar{x}_1).$$

Исходя из этого представления, получим минимальную схему (рис. 55).

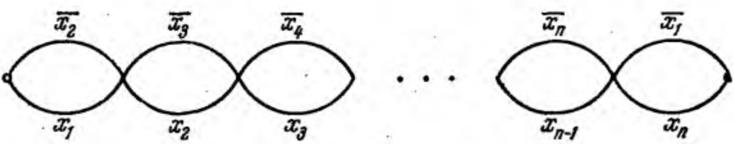


Рис. 55.

9.16. Если бы такая П-схема существовала, то в ней каждой переменной соответствовал бы один контакт, причем — в силу решения задачи 9.14 — положительный. Тогда по П-схеме можно было бы построить формулу, в которую каждая переменная входит по одному разу, а из операций используются лишь конъюнкции и дизъюнкции. Пусть последняя операция — дизъюнкция. Тогда функция $f(x, y, z, t, u)=$ $=xy\vee tu\vee xzu\vee tzy$ представляется в виде $f=f_1\vee f_2$, где f_1 и f_2 не имеют общих переменных и не являются константами. Пусть переменная z входит в f_1. Положим $y=t=0$. Тогда f превращается в $\varphi(x, z, u)=xzu$. Далее, функция f_2 при этом превратится в тождественный нуль, так как нет значений x, u, для которых φ равна 1 вне зависимости от значения z, а f_2 от z не зависит. Итак, f_1 после указанной подстановки переходит в xzu, а значит, в f_1 входили (существенно) переменные x и u. Аналогично, полагая $x=u=0$, получаем, что f_1 должна существенно зависеть от y и t. В результате в f_1 существенно входят все пять переменных, и мы пришли к противоречию.

Мы предоставляем читателю исключить аналогичным образом возможность представления f в виде f_1f_2, где f_1 и f_2 не имеют общих переменных и не являются константами.

9.17. а) Для реализации элементарной конъюнкции требуется n контактов. Число элементарных конъюнкций в СДНФ не превосходят 2^n. Значит, общее число контактов не превосходит $n2^n$ *).

б) Рассматривается аналогично.

в) Число членов в СДНФ равно числу наборов, на которых функция равна 1, а число членов в СКНФ — числу наборов, на которых она равна 0. Одно из этих чисел не превосходит 2^{n-1}. Применяя соответственно способ а) или б), мы получим схему, в которой не более $n2^{n-1}$ контактов.

9.18. Разложим функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ по переменной x_{k+1} (см. (2.16)): $f = x_{k+1}\varphi(x_1, \ldots, x_k) \vee \bar{x}_{k+1}\psi(x_1, \ldots, x_k)$. Если функции φ и ψ уже реализованы, то функция f реализуется, как показано на рис. 56. Здесь через $-\boxed{\varphi}-$ и $-\boxed{\psi}-$ обозначены схемы, реализующие φ и ψ; их выходы отождествлены. Если для реализации функций от k переменных (в частности, φ и ψ) требуется не более c_k контактов, то для реализации f требуется не более $2c_k + 2$ контактов, т. е. $c_{k+1} \leqslant 2c_k + 2$. Если учесть теперь, что $c_1 = 1$ (для функций от одной переменной хватает одного контакта), то получаем, что $c_k \leqslant 2^{k-1} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 2^2 + 2 = 3 \cdot 2^{k-1} - 2$. Таким образом, $L(n) \leqslant 3 \cdot 2^{n-1} - 2$.

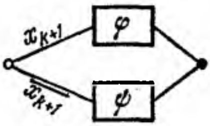


Рис. 56.

9.19. 1. На рис. 41 мы видели, что контакты в схеме естественным образом распадаются на «этажи», причем в каждом этаже находятся контакты, связанные с какой-то одной переменной. Из рисунка видно также, что к каждому выходу идет лишь одна существенная цепь; она содержит по одному контакту из каждого этажа; каждой такой цепи соответствует некоторая полная правильная элементарная конъюнкция, причем разным выходам соответствуют разные конъюнкции. Таким образом, каждой элементарной конъюнкции соответствует некоторый выход.

Строгое доказательство проводится по индукции. Пусть уже доказана универсальность $(1, 2^k)$-полюсника; докажем универсальность $(1, 2^{k+1})$-полюсника. Из предположения индукции следует, что каждому выходу $(1, 2^k)$-полюсника соответствует единственная существенная цепь, представляющая некоторую полную элементарную конъюнкцию от k переменных, причем разным выходам отвечают разные конъюнкции. Каждый выход $(1, 2^{k+1})$-полюсника связан с единственным выходом $(1, 2^k)$-полюсника, причем с одним выходом $(1, 2^k)$-полюсника связаны два выхода $(1, 2^{k+1})$-полюсника: один — контактом x_{k+1}, другой — контактом $\bar{x}_{k+1}$. Отсюда следует, что на каждом выходе $(1, 2^{k+1})$-полюсника реализуется своя полная элементарная конъюнкция.

2. Пусть нам нужно реализовать функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Представим ее в виде СДНФ. Отождествим у универсального $(1, 2^n)$-полюсника выходы, на которых реализуются элементарные конъюнкции, входящие

---

*) Часто бывает удобно исключить случай констант, так как, например, при реализации 0 уквзанным способом приходится рассматривать схему, вовсе не содержащую контактов: ○ ●

в СДНФ. Объявим получившийся в результате полюс выходом схемы. Ясно, что полученная схема реализует $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Число контактов в этой схеме равно числу контактов в универсальном $(1, 2^n)$-полюснике, т. е.

$$2+4+8+\ldots+2^n=2^{n+1}-2.$$

Мы получаем оценку

$$L(n)\leqslant 2^{n+1}-2.$$

Таким образом, мы получили оценку, более грубую, чем в задаче 9.18, хотя и пользовались схемами, отличными от П-схем. Однако в дальнейшем при помощи универсального многополюсника нам удастся существенно улучшить оценку для $L(n)$.

9.20. Интуитивно ясно, что если двигаться по цепи, соединяющей выходы от одного из них к другому, то в любом месте, где меняется направление движения, мы встретим два противоположных контакта. Строгое доказательство проводится по индукции. Пусть доказываемое утверждение справедливо для $(1, 2^k)$-полюсника. Рассмотрим цепь, соединяющую выходы $(1, 2^{k+1})$-полюсника. Ясно, что первый и последний контакты в этой цепи соединяют эти выходы с выходами $(1, 2^k)$-полюсника. Отбрасывая эти контакты, получаем цепь, соединяющую выходы $(1, 2^k)$-полюсника. По предположению индукции проводимость между этими выходами равна нулю, если они различны (случай, когда они совпадают, очевиден); поэтому сокращенной цепи, а значит и исходной, соответствуют элементарные конъюнкции, тождественно равные нулю.

9.21. Многополюсники M_1 и M_2 соединены так, что каждый выход M_1 отождествлен с единственным входом M_2, а с одним входом M_2 может быть отождествлено несколько выходов M_1, причём с некоторыми из входов M_2 может быть не отождествлено ни одного выхода M_1. Назовем полюсы, которые получаются после отождествления соответствующих выходов M_1 и входов M_2, *соединительными* полюсами схемы S_f.

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, которая реализуется построенной схемой. Нам нужно доказать, что $F(x_1, \ldots, x_n)=f(x_1, \ldots, x_n)$. Заметим прежде всего, что $F(x_1, \ldots, x_n)\geqslant f(x_1, \ldots, x_n)$. Этот почти очевидный факт можно доказать так. Представим каждую из функций $\varphi_{\sigma_{k+1}\ldots\sigma_n}(x_1, \ldots, x_k)$ в ДНФ, исходя из их реализации в многополюснике M_2 (т. е. в виде дизъюнкции конъюнкций, соответствующих существенным цепям). В результате возникает представление f в виде ДНФ. Каждой входящей в нее элементарной конъюнкции $x_{m_1}^{\sigma_1}\ldots$ $\ldots x_{m_l}^{\sigma_l}x_{k+1}^{\sigma_{k+1}}\ldots x_n^{\sigma_n}$ $(m_l\leqslant k)$ соответствует некоторая цепь в нашей схеме S_f; эта цепь является последовательным соединением цепи, соответствующей конъюнкции $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}}\ldots x_n^{\sigma_n}$ в $(1, 2^{n-k})$-полюснике M_1, и цепи в M_2, соответствующей $x_{m_1}^{\sigma_1}\ldots x_{m_l}^{\sigma_l}$ (ее существование следует из выбора ДНФ для f). Таким образом, если $f=1$ на некотором наборе, то на этом наборе $F=1$.

Рассмотренные цепи выделяются среди всех существенных цепей схемы S_f тем, что они проходят лишь один раз через соединительный полюс. Действительно, каждая цепь, обладающая этим свойством, распадается на существенную цепь в M_1, т. е. на цепь, реализующую некоторую конъюнкцию $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}}\ldots x_n^{\sigma_n}$ (см. решение задачи 9.19), и на существенную цепь в M_2, начинающуюся на входе M_2, отвечающем функции $\varphi_{\sigma_{k+1} \dots \sigma_n}$ (по построению S_f); соответствующая второй цепи конъюнкция $x_{m_1}^{\sigma_1} \dots x_{m_l}^{\sigma_l} (m_j \leqslant k)$ входит в построенную нами ДНФ для $\varphi_{\sigma_{k+1} \dots \sigma_n}$.

Остается показать, что все остальные существенные цепи в S_f имеют нулевую проводимость. Пусть некоторая цепь в S_f проходит, по крайней мере, дважды через соединительные полюсы. В силу существенности цепи эти полюсы различны. Рассмотрим отрезок цепи между двумя последовательными прохождениями через соединительные полюсы. Этот отрезок будет целиком лежать либо в M_1, либо в M_2. В первом случае проводимость в нем (а значит, и во всей цепи) равна нулю в силу разделительности M_1. Во втором — по построению M_2, существенная цепь, соединяющая входы M_2, обязательно проходит через выход M_2, совпадающий с выходом S_f. Но тогда исходная цепь должна была бы содержать выход S_f в качестве внутреннего полюса, что противоречило бы ее существенности (через выход S_f она проходила бы дважды).

Оценим число контактов в схеме. В силу задачи 9.19 в M_1 контактов меньше, чем $2 \cdot 2^{n-k}$ (мы несколько огрубили оценку); в силу задачи 9.18 в M_2 не более $2 \cdot 2^k \cdot 2^{2^k}$ контактов. Итак, для любого $k \leqslant n$ имеем:

$$L(n) \leqslant T_{n,k} = 2 \cdot 2^{n-k} + 2 \cdot 2^k \cdot 2^{2^k}.$$

9.22. Укажем вначале соображения, позволяющие найти $k(n)$ и угадать порядок $T_{n,k(n)}$. Имеем:

$$T_{n,k} = 2 \cdot 2^{n-k} + 2 \cdot 2^k \cdot 2^{2^k}.$$

Пусть $k(n) \geqslant \log_2 n$. Тогда второй член больше $2n \cdot 2^n$, т. е. $T_{n,k(n)}$ дает при больших n оценку для $L(n)$, которая хуже, чем в задачах 9.18 и 9.19. Пусть теперь $k = k(n) = \log_2 n - \alpha(n)$, $\alpha(n) \geqslant \beta > 0$. Тогда

$$2^k \leqslant \frac{n}{2^\beta} = \delta n, \quad \delta = 2^{-\beta} < 1.$$

Ясно, что теперь второй член растет медленнее первого, так как 2^n растет быстрее, чем $2^{2^k} \leqslant (2^\delta)^n$. Итак, все определяется первым слагаемым. Теперь мы заинтересованы, чтобы k было возможно больше, так как 2^k стоит в знаменателе. В качестве k можно взять наибольшее целое число, не превосходящее $\log_2 n - \beta$. Тогда

$$\log_2 n - \beta - 1 < k(n) \leqslant \log_2 n - \beta,$$

т. е.

$$\frac{n}{2^{1+\beta}} < 2^k; \quad 2 \cdot 2^{n-k} = \frac{2 \cdot 2^n}{2^k} < 4 \cdot 2^\beta \cdot \frac{2^n}{n} = (4 + \varepsilon) \frac{2^n}{n}; \quad \varepsilon = 4(2^\beta - 1).$$

Поскольку второй член $T_{n,k(n)}$ растет медленнее первого, мы получили, что $T_{n,k(n)}$ при таком выборе имеет тот же порядок, что и $\frac{2^n}{n}$. Что касается $L(n)$, то мы получаем (поскольку $\beta > 0$ можно выбирать сколь угодно малым), что для любого $\varepsilon > 0$

$$L(n) \lesssim (4 + \varepsilon) \frac{2^n}{n},$$

где символ $\lesssim$ означает, что неравенство выполняется для достаточно больших n ($n > N$, где N зависит от ε).

Ясно, что полученная оценка при больших n лучше тех, которые нам до сих пор удавалось получать.

9.23. В силу задачи 9.14 имеется функция от n переменных, для реализации которой требуется $2n$ контактов. Поэтому

$$L(n) \geqslant 2n.$$

9.24. В графе с k ребрами число вершин не может превышать $2k$, так как у каждого ребра имеется две вершины, а изолированных вершин нет. Перенумеруем вершины в графе. Условимся считать, что вход имеет номер 1, а выход — номер 2. Теперь граф однозначно определяется, если мы укажем, какие вершины соединяют каждое из ребер. Каждому ребру соответствует пара натуральных чисел (p, q) — номеров вершин, которые соединяет это ребро; $p, q \leqslant 2k$ (порядок p и q не существен). Таких пар меньше, чем $(2k)^2$. В графе имеется не более k ребер, т. е. он определяется заданием не более k таких пар; среди них могут быть совпадающие, так как различные ребра могут соединять одинаковые вершины. Эти пары можно выбрать менее чем $((2k)^2)^k = (2k)^{2k}$ способами (размещения с повторениями; ср. § 2; на самом деле порядок ребер не существен, и поэтому можно было использовать сочетания с повторениями, но для оценки этого достаточно *)). Мы могли бы получить более точную оценку, но в этом нет необходимости.

9.25. Чтобы получить из графа схему, нужно поставить каждому ребру в соответствие либо символ какой-то переменной, либо символ отрицания переменной. Если в графе k ребер, а число переменных равно n, то из одного графа можно получить $(2n)^k$ схем, так как при выборе символа для одного ребра имеется $2n$ возможностей (мы опять используем размещения с повторениями). Учитывая теперь результат предыдущей задачи (число графов с k ребрами), мы получаем, что число схем с k контактами для n переменных меньше, чем $R(k, n) < (2n)^k (2^k)^{2k} \leqslant (2kn)^{2k}$ при $n > 1$. Случай $n = 1$ можно было бы рассмотреть отдельно, но он не представляет интереса.

9.26. Имеем:

$$2 < 2^{\alpha(n)} \cdot \alpha(n)^{\alpha(n)/n}.$$

Если $\alpha(n) \leqslant 1$, то первый множитель в правой части не превосходит 2, а второй единицы. Поэтому $\alpha(n) > 1$, а значит,

$$L(n) > \frac{2^n}{n}.$$

Заметим, что эта оценка, в отличие от полученной ранее верхней оценки, справедлива для всех $n > 1$ (при $n = 1$ неравенство переходит в равенство), а не только для достаточно больших n.

9.27. Имеем $Q_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$. Соответствующая схема изображена на рис. 57. Далее, $P_2(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$; P_2 реализуется схемой,

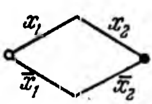


Рис. 57.

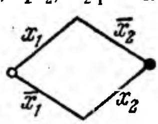


Рис. 58.

указанной на рис. 58. Минимальность первой из этих схем доказана в задаче 9.14; минимальность второй доказывается аналогично (а также

*) Если ребер меньше k, то набор пар можно сделать содержащим k элементов; формально добавим, например, пару (1, 1), которой не может соответствовать никакого ребра.

может быть выведена из минимальности первой). СКНФ для этих функций также приводит (рис. 59) к минимальным схемам (см. задачу 9.15).

9.28. Пусть мы имеем (1, 2)-полюсник T_n (рис. 60), на выходах которого реализуются функции $P_n(x_1, \ldots, x_n)$ и $Q_n(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда в силу приведенных в указаниях индуктивных формул для P_n и Q_n,

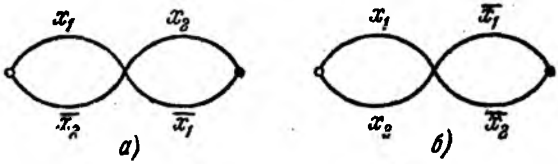


Рис. 59.

а также используя схемы, построенные в предыдущей задаче (рис. 57 и 58), и учитывая, что $P_n = \overline{Q}_n$, получаем, что $P_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ реализуется схемой, изображенной на рис. 61, а Q_{n+1} — схемой, изображенной на рис. 62. Комбинируя эти схемы, получаем, что в качестве T_{n+1} можно взять (1, 2)-полюсник, указанный на рис. 63. Из схемы

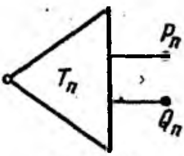


Рис. 60.

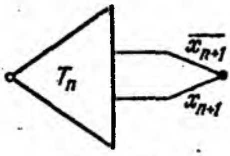


Рис. 61.

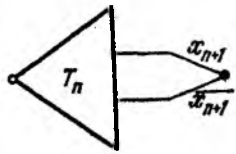


Рис. 62.

видно, что можно построить (1, 2)-полюсник T_{n+1}, число контактов в котором на 4 больше, чем в T_n. Если учесть теперь, что в качестве (1, 2)-полюсника T_1 можно взять схему из двух контактов (рис. 64), то мы получаем по индукции, что для построения T_n достаточно $2+4(n-1)$

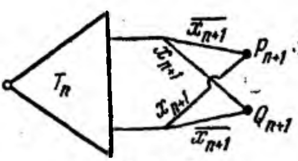


Рис. 63.

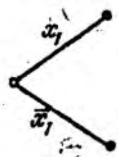


Рис. 64.

контактов. Далее, как P_n, так и Q_n можно получить из T_{n-1} добавлением двух контактов (рис. 61, 62). Поэтому для их реализации достаточно $4(n-1)$ контактов:

$$L(P_n) \leqslant 4(n-1);$$
$$L(Q_n) \leqslant 4(n-1).$$

Для получения нижней оценки достаточно учесть (см. решение задачи 9.14), что линейная функция по каждой из своих (существенных) переменных не возрастает и не убывает, т. е. в реализующей ее схеме каждой переменной должны соответствовать по крайней мере два контакта (x_i и $\overline{x}_i$):

$$2n \leqslant L(P_n); \quad 2n \leqslant L(Q_n).$$

9.29. Итак, рассмотрим схему (рис. 65), реализующую $P_3(x, y, z)$. Если эта схема является последовательным соединением двух подсхем, то вершины первой подсхемы (содержащей вход схемы) не могут быть соединены с выходом схемы цепью, не проходящей через соединительный полюс (аналогично вершины второй подсхемы нельзя соединить с входом схемы, минуя соединительный полюс). Ясно, что какой бы полюс в нашей схеме мы ни предположили соединительным, оставшиеся полюсы можно соединить между собой цепями, не проходящими через этот полюс. Таким образом, наша схема не представима в виде последовательного соединения двух схем.

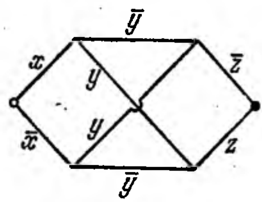


Рис. 65.

Исходя из сказанного выше, можно сформулировать следующий необходимый признак схемы, являющейся последовательным соединением двух схем: должна существовать вершина, через которую проходит любая цепь, соединяющая вход схемы с выходом (эта вершина является соединительным полюсом). Отсутствие такой вершины легко доказать по индукции для всех построенных в задаче 9.28 схем.

Из сказанного при решении задачи 9.12 следует, что если схема является параллельным соединением двух схем, то либо имеется контакт, соединяющий вход с выходом, либо вершины (за исключением входа и выхода) можно разбить на две группы так, что вершины из разных групп нельзя соединить цепью, не проходящей через вход или выход. На рис. 65 вход и выход не соединены контактом, а все остальные вершины можно соединить цепью, не проходящей ни через вход, ни через выход. Этот факт легко доказывается по индукции для всех построенных в задаче 9.28 схем при $n > 2$, т. е. ни одна из этих схем не может быть представлена в виде параллельного соединения двух непустых схем.

Приведем для удобства схему для P_n (рис. 66).

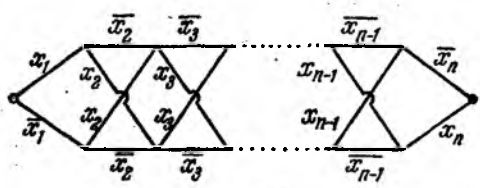


Рис. 66.

9.30. Пусть мы имеем П-схемы, реализующие P_m и Q_m (рис. 67). Тогда в силу формул, приведенных в указаниях к данной задаче, и задачи 9.27 схема, изображенная на рис. 68, где в схемах $P_m(x)$, $Q_m(x)$ участвуют контакты $x_1, \ldots, x_m$, а в $P_m(y)$, $Q_m(y)$ — контакты $y_1, \ldots, y_m$, реализует функцию $P_{2m}(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m)$. Аналогично схема на рис. 69 реализует $Q_{2m}(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m)$.

Таким образом можно индуктивно построить П-схемы для P_{2^k} и Q_{2^k}, удваивая на каждом шаге число переменных. При этом на каж-

Рис. 67.

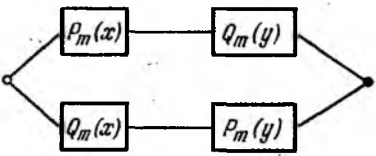


Рис. 68.

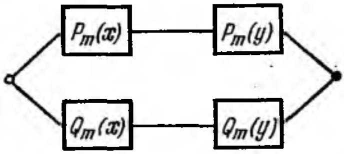


Рис. 69.

дом шаге число контактов увеличивается в четыре раза. Итак, общее число контактов равно 4^k. Другими словами,

$$L_{\Pi}(P_n) \leqslant n^2, \quad L_{\Pi}(Q_n) \leqslant n^2 \quad \text{при} \quad n = 2^k.$$

9.31. Итак, пусть $2^k < n < 2^{k+1}$; $n = 2^k + m$, $0 < m < 2^k$.

Первый способ. Построим способом, указанным в решении задачи 9.30, схему для $P_{2^{k+1}}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2^{k+1}})$. Теперь сделаем общее замечание. Если мы в функцию f вместо некоторой переменной подставляем тождественный нуль, то в схеме, реализующей f, следует удалить все положительные контакты, связанные с y (не меняя их полюсов), а отрицательные контакты удалить, отождествляя вершины, которые они соединяли. Например, из схемы, изображенной на рис. 70, мы получаем схему, изображенную на рис. 71. Нетрудно доказать ин-

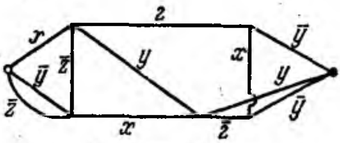


Рис. 70.

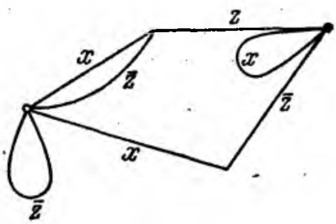


Рис. 71.

дукцией по построению П-схемы, что П-схема при таком преобразовании переходит в П-схему; при этом приходится включить в рассмотрение схемы, у которых вход и выход совпадают (функция проводимости для таких схем тождественно равна единице). Это отвечает тому, что в формулу, содержащую лишь дизъюнкции, конъюнкции и отрицания лишь над аргументами, вместо некоторой переменной подставляется 0 (см. связь таких формул с П-схемами в п. 2 этого параграфа).

В нашем случае мы подставляем $x_p = 0$ при $p > n$. В результате из схемы для $P_{2^{k+1}}$ мы получим схему для P_n. Оценим число контактов в получившейся схеме. Прежде всего оно меньше, чем в схеме для $P_{2^{k+1}}$, т. е. меньше 4^{k+1}, а так как $n > 2^k$, то $4^{k+1} < 4n^2$, т. е.

$$L_{\Pi}(P_n) < 4n^2.$$

Проведем теперь более точную оценку. В схеме для $P_{2^{k+1}}$ всем переменным соответствует одно и то же число контактов (это можно показать, например, по индукции), т. е. каждой переменной отвечает $\frac{4^{k+1}}{2^{k+1}}=2^{k+1}$ контактов. После преобразования схемы в ней останутся лишь контакты, связанные с переменными $x_1, \ldots, x_n$, т. е. в получившейся схеме будет $n2^{k+1}$ контактов. Учитывая, что $2^k<n$, получаем:

$$L_{\Pi}(P_n) < 2n^2.$$

Функции Q_n рассматриваются аналогично.

Второй способ. Для удобства обозначим переменные в P_n так:

$$x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2^k}, y_1, \ldots, y_m.$$

Исходя из формулы, приведенной в указаниях к этой задаче, и схем для P_2 и P_{2^k}, реализуем P_n. При этом в силу соображений, указанных при изложении предыдущего способа, нам потребуется по $\frac{1}{2}\cdot 2^k$ экземпляров схем $P_2(x_p, y_p)$ и $Q_2(x_p, y_p)$ $(p \leqslant m)$ и по 2^k контактов (половина положительных, половина отрицательных), связанных с каждой из переменных $x_p (p > m)$. В результирующей схеме будет по 2^{k+1} контактов, связанных с переменными x_p и y_p $(p \leqslant m)$, и по 2^k контактов для x_p $(p > m)$. Общее число контактов

$$R(n)=2m\cdot 2^{k+1}+(2^k-m)\,2^k=4^k+3m\cdot 2^k.$$

Естественно сравнить $R(n)$ с $n^2=4^k+2m\cdot 2^k+m^2$. Рассмотрим:

$$\frac{R(n)-n^2}{n^2}=\frac{m\cdot 2^k-m^2}{4^k+2m\cdot 2^k+m^2} \qquad (0<m<2^k).$$

Рассмотрим функцию

$$f_a(x)=\frac{ax-x^2}{(a+x)^2} \qquad (0\leqslant x\leqslant a).$$

Имеем:

$$\frac{R(n)-n^2}{n^2}=f_{2^k}(m).$$

Функция $f_a(x)>0$ на отрезке $[0, a]$ и обращается в нуль на концах этого отрезка. Найдем наибольшее значение $f_a(x)$ на $[0, a]$. Имеем:

$$f'_a(x)=\frac{(a-2x)(a+x)+2(x^2-ax)}{a+x}=\frac{-3ax+a^2}{a+x}.$$

Наибольшее значение достигается при $x=\frac{a}{3}$; оно не зависит от a и равно $\frac{1}{8}$, т. е.

$$f_a(x)\leqslant\frac{1}{8} \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant a,$$

а значит,

$$\frac{R(n)-n^2}{n^2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$R(n) \leqslant \frac{9}{8} n^2,$$

а также

$$L_{\Pi}(P_n) \leqslant \frac{9}{8} n^2.$$

9.32. а) Поскольку мы имеем дело с двоичными числами, для получения s_i нужно сложить x_i, y_i и p_i по модулю 2, т. е.

$$s_i(x_i, y_i, p_i) = x_i + y_i + p_i \quad (i \leqslant n); \qquad s_{n+1} = p_{n+1}.$$

б) Перенос на следующий разряд при сложении в одном разряде трех слагаемых в двоичной системе возникает, если единицы стоят, по крайней мере, в двух слагаемых. При этом перенос может возникать лишь на следующий разряд. Итак,

$$p_{i+1}(x_i, y_i, p_i) = x_i y_i \vee x_i p_i \vee y_i p_i, \quad p_1 = 0.$$

9.33. Укажем вначале схемы для s_i, p_{i+1} в предположении, что p_i реализуется одним контактом (рис. 72). Значит, наряду с p_i нам нужно иметь $\bar{p}_i$. Поскольку $x_i y_i \vee x_i p_i \vee y_i p_i$ — самодвойственная функция (см. § 3, задача 3.3), то для реализации $\overline{p_{i+1}(x_i, y_i, p_i)}$ достаточно в схеме для p_{i+1} (рис. 72) заменить все контакты отрицательными (рис. 73). Из этих трех схем мы и будем исходить. Пусть уже

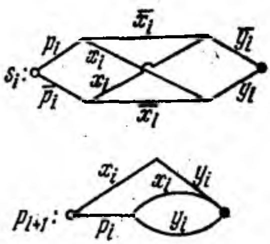


Рис. 72.

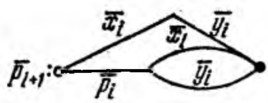


Рис. 73.

построен $(1, i+1)$-полюсник T_{i-1}, на выходах которого реализуются $s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, p_i, \bar{p}_i$. Построим аналогичный $(1, i+2)$-полюсник T_i. Выходы T_{i-1}, соответствующие $s_1, \ldots, s_{i-1}$, будут служить также выходами T_i и не используются в дальнейших построениях; поэтому мы не будем их отмечать на чертеже. Нам нужно дополнить схему так, чтобы получились еще три выхода: s_i, p_{i+1}, $\bar{p}_{i+1}$. Использовать при этом мы будем выходы T_{i-1}, на которых реализуются p_i, $\bar{p}_i$. Получаем схему, приведенную на рис. 74. Схема построена (еще раз напоминаем, что выходы для $s_1, \ldots$ $\ldots, s_{i-1}$ переносятся из T_{i-1}; они не изображены на чертеже). При получении T_n из T_{n-1} можно не строить часть, реализующую $\bar{p}_{n+1}$, а выход p_{n+1} следует обозначить через s_{n+1}. На этом построение схемы заканчивается.

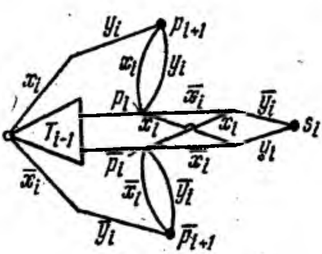


Рис. 74.

Оценим число контактов. На каждом шаге при получении T_i из T_{i-1} добавляется 14 контактов. Поэтому необходимое число контактов не превосходит $14n$. Оно на самом деле несколько меньше, так как $p_0=0$ и на первом шаге хватает 8 контактов; на последнем шаге хватает 10 контактов, так как не нужно реализовывать $\overline{p_{n+1}}$, т. е. хватает $14n-10$ контактов, но это не существенная разница при больших n. Главное, что мы построили схему, имеющую линейную сложность при $n\to\infty$.

Замечание. В процессе построения n-разрядного сумматора мы построили сумматоры с меньшим числом разрядов. При увеличении числа разрядов построенная схема достраивается без изменения уже построенной части.

9.34. Построим схемы, реализующие s_i и p_{i+1} как функции от p_i, x_i, y_i (задача 9.32). Можно считать, что мы имеем схему R_i с тремя входами и двумя выходами (рис. 75). Конструкция этой схемы не зависит от i. Теперь возьмем n экземпляров этих схем и соединим их, как указано на рис. 76. Заметим, что $p_1=0$, $s_{n+1}=p_{n+1}$ (см. решение задачи 9.33). В результате получаем схему с $2n$ входами ($x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$) и $n+1$ выходами (s_{n+1}, $s_n, \ldots, s_1$). Если для построения одной схемы R_i требуется c контактов (c, конечно, зависит от используемого базиса функциональных элементов), то общее число элементов равно cn. Итак, n-разрядные сумматоры можно реализовать схемами, имеющими линейную сложность относительно n. Заметим, что, как и в случае контактных схем, увеличение числа разрядов не требует перестройки схемы, а лишь ее расширения. Отметим также, что схема сумматора из функциональных элементов проще, чем контактная схема.

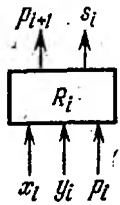


Рис. 75.

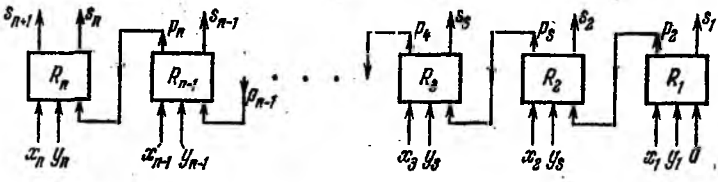


Рис. 76.

9.35. Первый способ. Начало решения содержится в указаниях к этой задаче. Отметим, что, поскольку при переносе из $(i+1)$-го разряда в i-й разряд добавляется 2, а действия осуществляются по модулю 2, то $1\equiv -1 \pmod 2$, и для получения y_i достаточно сложить s_i, x_i и q_i по модулю 2, т. е.

$$y_i = s_i + x_i + q_i.$$

Далее, из $(i+1)$-го разряда придется занимать, либо если $x_i=q_i=1$ (так как даже если $s_i=1$, то нам придется вычитать 2), либо если $s_i=0$, а $x_i=1$ или $q_i=1$ (из 0 придется вычитать 1); в остальных случаях вычитание возможно. Поэтому

$$q_{i+1} = x_i q_i \vee \bar{s}_i (x_i \vee q_i).$$

Построим схему, реализующую y_i и q_{i+1} (рис. 77). Конструкция схемы

Q_i не зависит от i. Эти схемы соединяются так же, как и при построении сумматора в задаче 9.34 (рис. 78). Здесь $q_1=0$; $q_{n+1}=0$, если $s \geqslant x$, и $q_{n+1}=1$, если $s<x$, т. е. выход q_{n+1} указывает, было ли уменьшаемое меньше вычитаемого.

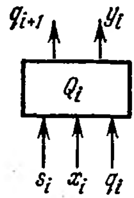


Рис. 77.

Общее число элементов не превосходит cn, где c — число элементов в Q_i (не следует думать, что константы для сумматора и построенной схемы совпадают; вообще мы часто будем различные константы обозначать одной и той же буквой).

Второй способ. Нужно к s прибавить $\bar{x}$, затем 1. Обозначим полученную схему через $y=(y_{n+2}y_{n+1}\ldots y_1)$. При этом, если $s \geqslant x$, то $y_{n+2}=1$ или $y_{n+1}=1$. Далее, из y нужно вычесть 10^{n+1}. Пусть $s \geqslant x$. Для этого нужно, если $y_{n+1}=1$, заменить y_{n+1} на 0, не меняя других разрядов, а если $y_{n+1}=0$, то положить $y'_{n+2}=0$, $y'_{n+1}=1$, не меняя других разрядов. Мы не будем рисовать соответствующую схему. Она также будет иметь линейную сложность.

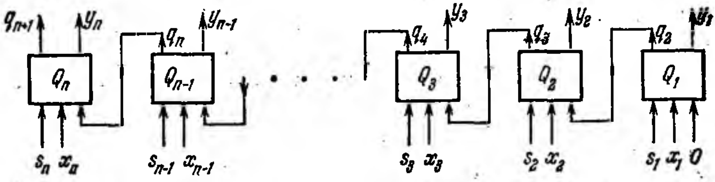


Рис. 78.

9.36. Построим схему P_{i+1} с $2n+1$ входами $t_1^{(i)}, \ldots, t_n^{(i)}$; $x_1, \ldots, x_n$; y_{i+1}, на выходе которой реализуются последовательные знаки суммы $t^{(i)}+y_{i+1}x=(t_n^{(i+1)} \ldots t_1^{(i+1)} p_{i+1})$ (рис. 79). Эта схема легко получается из n-разрядного сумматора: нужно на входы, соответствующие разрядам первого слагаемого, подать конъюнкции $y_{i+1}x_1, y_{i+1}x_2, \ldots, y_{i+1}x_n$ (а на остальные входы — разряды $t^{(i)}$). Число элементов в этой схеме по-прежнему допускает линейную оценку, так как к сумматору нужно добавить n схем для конъюнкций от двух переменных (если в одной такой схеме a элементов, то потребуется еще na элементов).

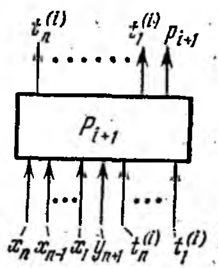


Рис. 79.

Соединим теперь схемы P_i, как указано на рис. 80. Здесь учтено, что $t^{(0)}=(0, 0, \ldots, 0)$, $t^{(n)}=(p_{2n}, p_{2n-1}, \ldots, p_{n+1})$. Чтобы не усложнять чертеж, входы $x_1, \ldots, x_n$ у различных P_i не отождествлены. В результате построена схема с $2n$ выходами $(p_{2n}, \ldots, p_i, \ldots, p_1)$ и $2n$ входами $(x_n, \ldots, x_1; y_n, \ldots, y_1)$, реализующая произведение xy.

Поскольку все схемы P_i одинаковы и для их реализации достаточно cn элементов, общее число контактов не превышает cn^2. Итак, мы умеем строить схему для умножения с квадратичной сложностью.

Замечание. Читатель без труда убедится, что построение контактной схемы для умножения по тому же плану требует существенно большего числа контактов (по порядку при $n \to \infty$).

9.37. Итак, $ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2]$. Как мы уже отмечали, в числе $a+b$ не более $n+1$ знаков. Поэтому, строя схемы для $(a+b)^2$, a^2, b^2, нам потребуется не более $f(n+1)+2f(n) \leqslant 3f(n+1)$ элементов; на предварительное вычисление суммы (в силу задачи 9.34) уйдет еще $c_1 n$ элементов. Далее, чтобы вычислить $2ab$, нужно дважды воспользоваться схемой задачи 9.35 для чисел, содержащих не более

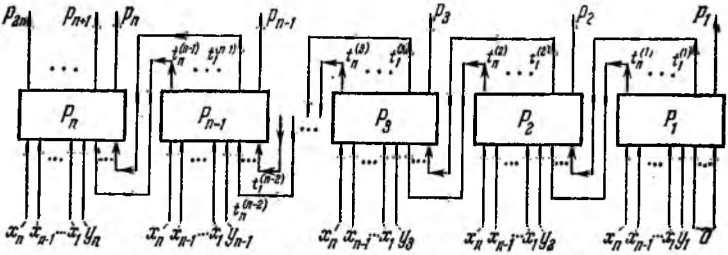


Рис. 80.

$2(n+1)$ разрядов (столько разрядов может быть в квадрате $(n+1)$-значного числа). На это уйдет опять-таки не более $c_2 n$ элементов. Деление на 2 четного числа осуществляется в двоичной системе отбрасыванием последнего знака (0). В результате общее число элементов не превосходит

$$3f(n+1) + c_3 n.$$

Если $f(n) = cn^\alpha$ $(\alpha > 1)$, то, увеличивая константу c, можно заменить $n+1$ на n и отбросить линейный член.

Замечание. При решении следующей задачи мы покажем, что $f(n+1) \leqslant f(n) + cn$.

9.38. Итак, пусть мы умеем строить схему из $d(m)$ элементов для возведения m-значного числа в квадрат. Возведем теперь в квадрат число $x \cdot 2^m + y$, где x и y — m-значные числа:

$$(x \cdot 2^m + y)^2 = x^2 \cdot 2^{2m} + 2xy \cdot 2^m + y^2.$$

В правой части стоит произведение xy, для которого мы еще не умеем строить нужной схемы. Заменим, как и при решении предыдущей задачи, $2xy$ на $(x+y)^2 - x^2 - y^2$:

$$(x \cdot 2^m + y)^2 = x^2 \cdot 2^{2m} + (x+y)^2 \cdot 2^m - x^2 \cdot 2^m - y^2 \cdot 2^m + y^2.$$

На вычисление x^2 и y^2 уйдет $2d(m)$ элементов. Число $x+y$ может содержать $m+1$ разрядов, но в силу формулы $(2z+u)^2 = z^2 \cdot 2^2 + zu \cdot 2^2 + u^2$, где u — однозначное число (0 или 1), $d(m+1) \leqslant d(m) + c_1 m$. Итак, на вычисление трех нужных квадратов уйдет

$$3d(m) + c_2 m$$

элементов. Далее нужно провести сложение и вычитание чисел, содержащих не более $4m$ разрядов. Поскольку общее число нужных операций не зависит от m, для этого (в силу задач 9.34, 9.35) достаточно $c_2 m$

элементов. В результате получаем, что

$$d(2m) \leqslant 3d(m) + c_3 m$$

где c_3 не зависит от m.

Исходя из этой формулы, получаем для $d(2^k)$ оценку:

$$d(2^k) \leqslant 3d(2^{k-1}) + c_3 2^{k-1}.$$

Считая, что $d(1) = 1$ ($x^2 = x$), получаем по индукции

$$d(2^k) \leqslant 3^k + c_3(3^{k-1} + 3^{k-2}\cdot 2 + \ldots + 3^{k-i-1}2^i + \ldots + 2^{k-1}).$$

Вынесем в правой части 3^k:

$$d(2^k) \leqslant 3^k\left(1 + \frac{c_3}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^i + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right]\right).$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{2}{3}$; оно не превосходит суммы соответствующей бесконечной прогрессии $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$. Итак,

$$d(2^k) \leqslant c\cdot 3^k.$$

9.39. Пусть $n \neq 2^m$ и k — наименьшее число, для которого $n \leqslant 2^k$, $k = [\log_2 n] + 1$. Воспользуемся построенной в задаче 9.38 схемой для возведения в квадрат 2^k-значного числа. Это можно сделать, считаи первые слева разряды нулями (при этом может потребоваться еще лишь конечное число элементов для реализации тождественного нуля). Число элементов в схеме меньше

$$c3^k \leqslant 3c\cdot 3^{[\log_2 n]} \leqslant c_1\, 3^{\log_2 n} = c_1\cdot 2^{\log_2 3\cdot \log_2 n} = c_1 n^{\log_2 3}.$$

Итак, можно построить схему не более чем из $cn^{\log_2 3}$ элементов. Эта оценка лучше имеющейся у нас, так как $\log_2 3 < 2$. Эта же (по порядку) оценка в силу задачи 9.37 имеет место для умножения.

§ 10. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЛОГИКИ

1. Вероятностная булева алгебра. Мы будем придерживаться здесь формального подхода к *теории вероятностей*, лишь в небольшой мере поясняя, какое отношение имеет рассматриваемая аксиоматическая теория к реальным «вероятностным» задачам. Мы не используем никаких сведений из теории вероятности, заранее предполагая их известными. Тем не менее некоторое знакомство с элементами теории вероятностей было бы здесь полезным (см., например, [1] — [4]).

Пусть $\mathfrak{A}$ — регулярная *) булева алгебра (§ 2, пп. 3, 4, определения 2.5 и 2.7); будем называть ее элементы *событиями*.

Определение 10.1. Функция $P(x)$, заданная на $\mathfrak{A}$, называется *вероятностной мерой* (или просто *вероятностью*), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $0 \leqslant P(x)$ для всех $x \in \mathfrak{A}$;
2) $P(\mathbf{1})=1$ **);
3) если $xy=\mathbf{0}$ **), то $P(x \vee y)=P(x)+P(y)$.

Регулярная булева алгебра $\mathfrak{A}$ вместе с вероятностной мерой P называется *вероятностной булевой алгеброй* $\{\mathfrak{A}, P\}$.

Регулярность алгебр, рассмотренных в примерах, будет следовать из того, что их можно рассматривать (с точностью до изоморфизма) как (булевы) алгебры множеств (см. задачу 2.23).

Мы не интересуемся, каким именно способом элементам алгебры $\mathfrak{A}$ (событиям) поставлены в соответствие значения P; позднее мы приведем

---

*) Можно было бы ограничиться дополнительными аксиомами: $x \vee \bar{x}=\mathbf{1}$, $x\bar{x}=\mathbf{0}$, которые выполняются в регулярных булевых алгебрах (см. решение задачи 2.22). (Одна из этих аксиом является следствием другой и остальных аксиом булевой алгебры.)

**) В этом параграфе $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$ — выделенные элементы в булевой алгебре; 1 и 0 — действительные числа.

некоторые конкретные примеры. В теории вероятностей рассматривается вопрос о вероятности сложных событий, т. е. событий, которые получаются из некоторых исходных (вероятности которых уже известны) многократным применением операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Благодаря регулярности вероятностных булевых алгебр сложные события получаются из исходных путем применения булевых операций (определение 2.8). Оказывается, что, уже исходя из простейших свойств вероятности, заключенных в ее аксиомах, можно сказать довольно много о вероятностях сложных событий, не имея никакой информации о способе определения вероятностей простых событий.

Определение 10.2. События x и y, конъюнкция которых совпадает с $\mathbf{0}$, называются *несовместимыми*.

Содержательный смысл этого определения состоит в том, что x и y не могут произойти одновременно; это согласуется с тем, что $\mathbf{0}$ — никогда не происходящее событие, аналогично $\mathbf{1}$ — событие, которое всегда происходит.

10.1. Показать, что

а) $P(\bar{x})=1-P(x)$ для всех $x \in \mathfrak{A}$;

б) $P(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathfrak{A}$;

в) $P(\mathbf{0})=0$;

г) если $x \to y=\mathbf{1}$ (событие x влечет событие y), то $P(x) \leqslant P(y)$;

д) $P(x \vee y) \leqslant P(x)+P(y)$ для любых $x, y \in \mathfrak{A}$ (ср. с аксиомой 3));

е) $P(x \vee y)=P(x)+P(y)-P(xy)$;

ж) $P(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k) \leqslant P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_k)$ для всех $x_1, \ldots, x_k$;

з) $P(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k)=P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_k)$, если $x_i x_j=\mathbf{0}$ для всех $i \neq j$;

и) $P(xy) \leqslant P(x)$ для любых x, y;

к) $P(xy) \geqslant P(x)+P(y)-1$ для любых x, y. ▲

Все перечисленные формулы допускают простую содержательную интерпретацию: например, если одно событие x влечет другое событие y, то вероятность x не может быть больше вероятности y (формула г)); вероятность того, что произойдет по крайней мере одно из двух событий x или y, не превосходит суммы их вероятностей и равна ей лишь в том случае, когда вероятность совместного наступления x и y равна нулю, в частности, когда x и y несовместимы (формулы д), е)); вероятность совместного наступления событий не превосходит вероятности наступления каждого из них (формула и)) и т. д.

Как будет видно из дальнейшего, вероятности сложных событий, вообще говоря, не определяются однозначно вероятностями простых событий.

2. Условная вероятность.

Определение 10.3. Пусть a — фиксированный элемент $\mathfrak{A}$, причем $P(a)\neq 0$. Функция

$$P_a(x)=\frac{P(ax)}{P(a)} \qquad (x\in\mathfrak{A})$$

называется *условной вероятностью* события x *относительно* события a (или *при условии* a)).

10.2. Показать, что функция $P_a(x)$ является вероятностной мерой на $\mathfrak{A}$, т. е. что она удовлетворяет аксиомам 1)—3). ▲

10.3. Выразить $P_y(x)$ через $P(x)$, $P(y)$, $P_x(y)$. ▲

Определение 10.4. Система событий $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется *полной системой несовместимых событий*, если эти события попарно несовместимы и

$$a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_n=1.$$

10.4. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — полная система несовместимых событий.

а) Доказать, что

$$P(x)=P(a_1)P_{a_1}(x)+P(a_2)P_{a_2}(x)+\ldots+P(a_n)P_{a_n}(x).$$

б) Выразить $P_x(a_i)$ через $P_{a_j}(x)$ и $P(a_j)$ $(1\leqslant j\leqslant n)$. ▲

Формулы задачи 10.4 очень известны. Формула а) носит название *формулы полной вероятности*; она применяется для вычисления безусловной вероятиости, если известны условные вероятности относительно полной системы несовместимых событий с известными вероятностями. Формула б) называется *формулой Байеса* (формулой «вероятностей гипотез»). Она отвечает следующей содержательной задаче. Пусть относительно некоторой ситуации имеется n «гипотез», взаимно исключающих друг друга и исчерпывающих все имеющиеся возможности. Пусть известны вероятности этих гипотез и вероятности наступления некоторого события x в зависимости от того, какая из гипотез справедлива. Что можно сказать о вероятностях гипотез a_i, когда событие x уже произошло? За более подробной информацией о содержательном смысле и возможных применениях формулы Байеса мы отсылаем читателя к книге [2].

Определение 10.5. Если $P_y(x)=P(x)$, то говорят, что событие x *не зависит* от y.

Поскольку равенство $P_y(x)=P(x)$, очевидно, равносильно равенству

$$P(xy)=P(x)P(y),$$

которое также можно рассматривать как **определение** независимости событий x и y *), то отношение независимости событий симметрично. Если x не зависит от y, то y не зависит от x (в этом случае говорят также, что события x и y (взаимно) *независимы*).

10.5. Если события x и y независимы, то x и $\bar{y}$ также независимы. ▲

3. Вероятности на конечных свободных булевых алгебрах. Пусть $\mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ — **свободная булева алгебра**, порожденная конечным числом элементов $a_1, \ldots, a_n$. Термин «свободная булева» означает, что между элементами алгебры $\mathfrak{A}_n$ нет соотношений, которые не являются следствиями аксиом булевой алгебры. Тогда $\mathfrak{A}_n$ состоит из 2^n элементов, каждый из которых имеет вид $f(a_1, \ldots, a_n)$, где f — функция алгебры логики от n переменных (например, представленная СДНФ), причем элементы, которые отвечают неравносильным функциям, не совпадают **). В частности, $f=0$ соответствует 0, $f=1$ соответствует 1. Теперь обсудим вопрос о том, каким образом можно задавать вероятностную меру на $\mathfrak{A}_n$. Зададим значение P на a_i: $P(a_i)=p_i$.

10.6. Показать, что если все p_i принимают значения 0 или 1, то вероятность на $\mathfrak{A}_n$ определена однозначно, причем P принимает также только значения 0 или 1. ▲

Замечание. Вообще, гомоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\{0, 1\}$ вводит на ней вероятностную меру P, принимающую значения 0, 1 (аксиомы 1) — 3) выполняются). Если $\mathfrak{A}$ — алгебра высказываний, то введение вероятностной меры P можно интерпретировать как приписывание высказываниям чисел, указывающих вероятности их истинности. Как мы увидим, в некоторых вопросах эта точка зрения осмыслена, хотя, конечно, вряд ли можно приписывать разумным образом любым реальным высказываниям вероятности их истинности (см. по этому поводу [5]).

---

*) При этом определении уже можно не исключать событий с нулевой вероятностью.

**) Гомоморфизмы $\mathfrak{A}_n$ в $\{0, 1\}$ однозначно определяются заданием образов элементов $a_1, \ldots, a_n$, которые могут быть произвольными. Число таких гомоморфизмов равно 2^n, и они разделяют любые пары элементов $\mathfrak{A}_n$, т. е. $\mathfrak{A}_n$ — регулярная булева алгебра.

Посмотрим, как можно определить вероятность на $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ в общем случае. Каждую функцию f будем считать представленной СДНФ. События, отвечающие элементарным конъюнкциям $a_1^{\sigma_1} \ldots a_n^{\sigma_n}$, являются несовместимыми и образуют полную систему несовместимых событий. Каждый элемент $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ является объединением некоторого числа таких событий. Тогда в силу аксиомы 3) вероятность $P(x)$ на $\mathfrak{A}_n$ однозначно определяется заданием вероятностей

$$p_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} = P(a_1^{\sigma_1} \ldots a_n^{\sigma_n}).$$

Теперь посмотрим, каким условиям (кроме неотрицательности) должны удовлетворять числа $p_{\sigma_1 \ldots \sigma_n}$. Во-первых, ясно, что их сумма должна равняться 1 (аксиома 2)); во-вторых, поскольку заранее заданы вероятности событий a_i, должны выполняться условия

$$\sum_{\sigma_i = 1} p_{\sigma_1 \ldots \sigma_i \ldots \sigma_n} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Слева стоит выражение вероятности события a_i через $p_{\sigma_1 \ldots \sigma_n}$ $\left(a_i = \bigvee_{\sigma_i = 1} a_1^{\sigma_1} \ldots a_n^{\sigma_n}\right)$. Ясно, что теперь все условия удовлетворены. Итак, кроме условия положительности, на 2^n чисел $p_{\sigma_1 \ldots \sigma_n}$ накладываются $n+1$ линейных условий.

Если бы не было условия неотрицательности $p_{\sigma_1 \ldots \sigma_n}$, то, очевидно, существовало бы бесконечно много решений возникающей системы линейных уравнений при $n > 2$ (плоскость размерности $2^n - n - 1$ в 2^n-мерном пространстве). Однако, учитывая, что коэффициенты и правые части возникающих линейных уравнений неотрицательны, также нетрудно убедиться, что аналогичный факт имеет место и для неотрицательных решений.

Если предположить, что события $a_1, \ldots, a_n$ являются независимыми, то оказывается, что задание вероятностей p_i однозначно определяет вероятность на $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$. При этом нужно уточнить, что именно понимается под независимостью нескольких событий (пока это понятие определено лишь для двух событий).

Определение 10.6. События $a_1, \ldots, a_n$ называются *независимыми*, если для любых различных $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n$

$$P(a_{i_1} \ldots a_{i_k}) = P(a_{i_1}) \ldots P(a_{i_k}).$$

В противном случае $a_1, \ldots, a_n$ называют *зависимыми*. Следует отметить, что это условие нельзя заменить условием попарной независимости событий:

$$P(a_i a_j) = P(a_i) P(a_j) \qquad (1 \leqslant i \neq j \leqslant n).$$

10.7. Привести пример попарно независимых, но зависимых событий. ▲

10.8. Показать, что вероятностная мера на $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ однозначно определяется вероятностями p_i, если события $a_1, \ldots, a_n$ независимы. ▲

4. Системы элементарных событий. Теперь мы можем рассмотреть более частные примеры. Исходя из сказанного выше, естественно, по крайней мере в случае булевой алгебры $\mathfrak{A}$, состоящей из конечного числа элементов, для задания вероятности выделить полную систему таких несовместимых событий, что каждое событие из $\mathfrak{A}$ является дизъюнкцией некоторых из них.

Определение 10.7. Полная система E несовместимых событий из конечной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *системой элементарных событий*, если всякое событие из $\mathfrak{A}$ является дизъюнкцией событий из $\mathfrak{A}$.

Для задания вероятности на $\mathfrak{A}$ достаточно задать ее на элементарных событиях. Задаваемые вероятности должны быть неотрицательны, и их сумма должна равняться 1. Других условий нет. Вероятности же элементарных событий задаются, исходя из реальной ситуации.

Пусть, например, кидается игральная кость, имеющая форму куба, на гранях которого выписаны цифры от 1 до 6. Мы интересуемся, какая цифра написана на верхней грани. У этого опыта имеется шесть исходов: через e_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ обозначим событие, состоящее в том, что на верхней грани написана цифра i. Ясно, что эти события образуют полную систему несовместимых событий, так как по крайней мере одно из них происходит, а два одновременно произойти не могут. Далее, если кость имеет правильную форму и «бросается честно», то естественно считать все события e_i *равновероятными*, т. е. положить $P(e_i) = \frac{1}{6}$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$.

Теперь можно рассмотреть различные неэлементарные события:

a: выпало четное число;
b: выпало нечетное число;
c: выпало число, делящееся на три;
d: выпало число, не превышающее четырех.

10.9. Найти вероятности перечисленных событий a, b, c, d. Имеются ли среди них независимые? ▲

Итак, мы видим, что если делается некоторый опыт, то в качестве элементарных событий можно брать его исходы. Если, отправляясь от условий опыта, всем исходам естественно приписать равные вероятности, то вероятность некоторого события равна отношению числа исходов, в которых оно имеет место, к общему числу исходов. На этом простейшем примере (равновероятных исходов) естественно посмотреть, что означает независимость каких-то двух событий a и b. Она означает, что доля исходов, для которых имеет место событие a, среди всех исходов и среди тех исходов, для которых имеет место событие b, одна и та же.

Множество элементарных событий вводится, вообще говоря, неоднозначно. Например, в рассмотренной задаче можно попробовать взять за элементарные события a и b (они несовместимы и образуют полную систему); однако тогда события c и d не представляются в виде их дизъюнкции. Другими словами, «элементарность» выбираемых событий должна состоять в том, что любое из интересующих нас событий должно представляться в виде их дизъюнкции. Если мы из урны, в которой находится 6 белых и 4 черных шара, вынимаем один шар, то можно мысленно занумеровать шары и объявить элементарными события, состоящие в том, что мы вынули какой-то определенный шар. Тогда все эти события естественно считать равновероятными (их вероятности равны $\frac{1}{10}$). Если же нас интересуют лишь события, связанные с цветами шаров, то можно элементарными считать события, состоящие в том, что вынули соответственно белый или черный шары, приписывая им вероятности соответственно $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$.

Рассмотрим еще несколько примеров.

10.10. Независимым образом бросаются две игральные кости. Какова вероятность следующих событий:

a: выпали одинаковые числа;

b: сумма выпавших чисел четна;

c: выпавшие числа взаимно просты (не имеют общих положительных делителей, отличных от 1)? ▲

Заметим, что примеру, приведенному в решении задачи 10.7, можно придать следующую интерпретацию. Имеется тетраэдр, на гранях которого написаны числа 2, 3, 5 и 30. Случайным образом выбирается грань, на которую он ставится (бросается кость, имеющая форму тетраэдра). События a_1, a_2, a_3 соответственно состоят в том, что на основании написано число, делящееся на 2, 3 и 5 соответственно.

10.7′. Проверить, что события a_1, a_2, a_3 зависимы, хотя и попарно независимы. ▲

В приведенных ниже примерах удобно пользоваться понятием условной вероятности.

10.11. Пусть имеется три кружка, причем у одного из них обе стороны выкрашены в красный цвет, у другого — обе в синий, у третьего — одна в красный, а другая в синий. После перемешивания выбирается один из кружков и показывается одна из его сторон. Нужно угадать, в какой цвет окрашена другая сторона. Какой тактики следует придерживаться в этой игре? ▲

10.12. На отдельных карточках выписаны буквы, входящие в слово «алгебра». После перемешиваиия выбираются подряд три карточки. Какова вероятность того, что при этом получится

a: слово «бег»;

b: слово «бал». ▲

Мы привели несколько более или менее традиционных примеров, которые обычно приводятся в книгах по теории вероятностей. В цитированных выше книгах читатель найдет много других примеров. (Впрочем, их можно придумать и самому!) Подведем некоторые итоги.

Мы рассмотрели ситуацию, характеризующуюся возможностью выделить конечное число элементарных событий $E=\{e_1, \ldots, e_k\}$, на которых задана вероятность $0 \leqslant P(e_i) \leqslant 1$, $P(e_1)+\ldots+P(e_k)=1$. Событие a тогда можно интерпретировать как подмножество множества E (совокупность элементарных событий, дизъюнкцией которых является a). При этом отрицанию события отвечает дополнение соответствующего множества до всего E; конъюнкции событий — пересечение множеств; дизъюнкции — их объединение. Таким образом, в этом случае булева алгебра событий изоморфна *булевой* алгебре подмножеств множества элементарных событий. Вероятность события равна сумме вероятностей элементарных событий. Тем самым мы переходим к другому возможному аксиоматическому подходу к теории вероятностей. Его отличие от принятого ранее состоит в том, что мы имеем дело не с абстрактными булевыми алгебрами, а с булевыми алгебрами подмножеств некоторого множества. Впрочем, как мы знаем, всякая регулярная булева алгебра изоморфна некоторой такой алгебре (задача 2.25).

Пока мы имеем дело с **к о н е ч н ы м** множеством элементарных событий E, можно говорить о **в с е х** подмножествах E. Если же множество E бесконечно, то функцию P нельзя определить на всех подмножествах с соблюдением аксиом 1) — 3); в частности, P лишь на конечном числе элементов E (одноэлементных подмножеств) может быть отлична от нуля. Поэтому, если множество элементарных событий бесконечно, то рассматривается некоторая булева алгебра его подмножеств $\mathfrak{A}(E)$, на котором определена функция $P(x)$, $x \in \mathfrak{A}(E)$ (x — не точка E, а п о д м н о ж е с т в о в E!), удовлетворяющая аксиомам 1) — 3); иногда P называется *вероятностной мерой* на E (точнее — на $\mathfrak{A}(E)$).

Например, если E — совокупность точек квадрата площади 1, то в качестве $\mathfrak{A}(E)$ можно взять совокупность фигур, для которых определена площадь (мы не будем здесь уточнять, что это означает; важно, что $\mathfrak{A}(E)$ — булева алгебра), в качестве $P(x)$ — площадь x. Нетрудно убедиться, что $P(x)$ при этом удовлетворяет аксиомам 1) — 3). В качестве вероятностной задачи можно рассмотреть следующую. На квадрат случайно бросается предмет, размерами которого можно пренебречь («точка»!). Можно считать, что мишень имеет форму квадрата и по ней ведется неприцельный огонь. Тогда естественно считать, что вероятность попадания в какую-то область пропорциональна ее площади *).

В случае конечных множеств E задание меры P на **э л е м е н т а х** E имело существенное преимущество по сравнению с заданием P непосредственно на булевой алгебре. Именно P как функция на E должна удовлетворять простым легко проверяемым требованиям, в то время как проверка аксиом значительно сложнее. Как мы уже отмечали, в случае бесконечных множеств E нельзя задавать P на элементах E. В связи с этим возникает вопрос о таких совокупностях подмножеств $\mathfrak{B}(E) \subset \mathfrak{A}(E)$, на которых $P(x)$ можно задавать без особых ограничений, с тем чтобы она однозначно продолжалась на $\mathfrak{A}(E)$. Этот вопрос обстоятельно исследуется в теории меры.

5. Случайные величины. О п р е д е л е н и е 10.8. Пусть на булевой алгебре $\mathfrak{A}$ задана вероятность P. Если имеется некоторая конечная полная система несовместимых событий $a_1, \ldots, a_k$, $a_i \neq 0$ и каждому a_i поставлено в соответствие число $\xi(a_i)$, то будем говорить, что на $\mathfrak{A}$ задана *случайная величина* ξ. Система событий $\{a_i\}$ называется *характеристической системой* событий для ξ.

Пусть имеется некоторая другая полная система несовместимых событий $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_l$, $\tilde{a}_j \neq 0$, причем для каждого $\tilde{a}_j$ существует такое a_i, что $\tilde{a}_j \to a_i = 1$ (тогда каждое a_i

---

*) Заметим, что это соображение используется в современной вычислительной математике для вычисления площадей криволинейных фигур; это так называемый метод Монте-Карло.

является дизъюнкцией некоторого числа $\tilde{a}_j$). Систему событий $\{\tilde{a}_j\}$ будем называть *подчиненной* системе $\{a_i\}$. Заметим, что не может быть, чтобы для различных i, k было $\tilde{a}_j \to a_i = \mathbf{1}$, $\tilde{a}_j \to a_k = \mathbf{1}$, так как тогда $\tilde{a}_j \to a_i a_k = \mathbf{1}$, $\tilde{a}_j \to \mathbf{0} = \mathbf{1}$ (в силу несовместимости a_i, a_k), т. е. $\tilde{a}_j$ должно совпадать с $\mathbf{0}$, что противоречит предположению. Тогда случайную величину можно перенести на систему событий $\{\tilde{a}_j\}$: $\tilde{\xi}(\tilde{a}_j) = \xi(a_i)$, если $\tilde{a}_j \to a_i = \mathbf{1}$ (в силу сделанного замечания это определение непротиворечиво). Величину $\tilde{\xi}$ будем называть *индуцированной* величиной ξ на $\{\tilde{a}_j\}$. На языке теории множеств мы имеем разбиение пространства элементарных событий на непустые непересекающиеся множества $a_1, \ldots, a_k$. Каждому a_i ставится в соответствие число $\xi(a_i)$. Если имеется более мелкое разбиение $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_l$, то каждому $\tilde{a}_j$ ставим в соответствие значение ξ на множестве a_i, содержащем $\tilde{a}_j$. Если E — конечное множество, то можно, в частности, определить ξ для разбиения E на элементарные события. С другой стороны, для ξ можно рассмотреть максимальное разбиение, т. е. разбиение на такие множества (события), что на разных a_i функция ξ принимает различные значения (нужно взять дизъюнкцию всех событий, для которых ξ принимает одно и то же значение).

В случае бесконечного множества E случайную величину ξ можно интерпретировать как функцию на E, принимающую конечное число значений, причем для каждого значения ξ множество точек E, в которых это значение принимается, принадлежит булевой алгебре $\mathfrak{A}(E)$ *).

Определение 10.9. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — характеристическая система событий случайной величины ξ. *Математическим ожиданием*, или *средним значением*, случайной величины ξ называется число

$$M\xi = \xi(a_1) P(a_1) + \ldots + \xi(a_k) P(a_k).$$

Если бы все события a_i были равновероятны, то $M\xi$ совпадало бы со средним арифметическим значением случайной величины ξ. В общем же случае каждое значение входит с весом, равным вероятности, с которой оно принимается.

Докажем некоторые свойства математического ожидания.

---

*) В теории вероятностей важную роль играют случайные величины, принимающие бесконечное число значений, но здесь мы их рассматривать не будем.

10.13. Математическое ожидание $M\tilde{\xi}$ индуцированной случайной величины $\tilde{\xi}$ для системы событий $\{\tilde{a}_j\}$, подчиненной системе $\{a_i\}$, совпадает с $M\xi$. ▲

Мы не будем в дальнейшем различать случайные величины, получающиеся переходом к подчиненной системе событий. В силу задачи 10.13 $M\xi$ не зависит от выбора характеристической системы событий. В частности, всегда можно вычислять $M\xi$, исходя из максимальной характеристической системы событий.

Определение 10.10. Пусть имеются две случайные величины ξ и η; первая из них связана с системой событий $\{a_1, \ldots, a_k\}$, вторая — с системой $\{b_1, \ldots, b_l\}$. Рассмотрим систему событий $\{a_i b_j\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant l)$; эти события несовместимы и образуют полную систему. (Доказать!) *Суммой* случайных величин ξ и η назовем случайную величину

$$(\xi+\eta)(a_i b_j) = \xi(a_i b_j) + \eta(a_i b_j) = \xi(a_i) + \eta(b_j).$$

Мы воспользовались здесь тем, что система событий $\{a_i b_j\}$ подчинена каждой из систем $\{a_i\}$, $\{b_j\}$.

10.14. Доказать, что $M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$. ▲

Случайную величину можно умножить на скалярный множитель. Очевидно, что

$$M(c\xi) = cM\xi,$$

где c — число.

Если система событий $\{a_i\}$ состоит из одного события $\mathbf{1}$ и $\xi(\mathbf{1})=c$, то случайную величину ξ будем называть постоянной и обозначать ее через c (ей отвечает постоянная функция на E). Ясно, что

$$Mc = c,$$

где c — постоянная случайная величина.

10.15. Показать, что $M(\xi - M\xi)=0$. ▲

Здесь из случайной величины ξ мы вычли постоянную случайную величину, равную константе $M\xi$.

Приведем примеры случайных величин. В случае конечной булевой алгебры, как уже отмечалось, случайную величину можно всегда рассматривать как функцию на множестве элементарных событий.

Рассмотрим, например, события, связанные с бросанием игральной кости (задача 10.9). В качестве случайной величины можно взять выпавшее число, т. е. элементарному событию e_i ставится в соответствие число $\xi(e_i)=i$ $(1\leqslant i\leqslant 6)$. Поскольку значения ξ на всех e_i различны, $\{e_i\}$ — максимальная характеристическая система.

10.16. Найти математическое ожидание указанной случайной величины. ▲

10.17. Рассмотреть для пространства событий задачи 10.10 следующие случайные величины: ξ — число четных чисел среди выпавших чисел i и j; η — сумма выпавших чисел. Найти $M\xi$ и $M\eta$. ▲

10.18. Имеется n ячеек с номерами от 1 до n и n жетонов с теми же номерами. Жетоны перемешиваются, после чего в каждую ячейку опускается по одному жетону. Найти математическое ожидание случайной величины ξ, равной числу жетонов, номера которых совпадают с номерами ячеек, в которые они попали. ▲

В следующей задаче приводится важный факт теории вероятностей, который носит название неравенства Чебышева.

10.19. Доказать, что для всякого положительного δ имеет место неравенство

$$P(|\xi|\geqslant\delta)\leqslant\frac{M(\xi^2)}{\delta^2}.$$

Слева стоит вероятность того, что значение случайной величины ξ по модулю не меньше δ; квадрат случайной величины определяется очевидным образом: значение ξ на каждом событии возводится в квадрат. ▲

Введем еще одну характеристику случайной величины:

Определение 10.11. *Дисперсией* случайной величины ξ называется число

$$D\xi=M[(\xi-M\xi)^2].$$

Дисперсия характеризует, насколько могут отклоняться значения случайной величины от ее математического ожидания.

Используя дисперсию, можно следующим образом переписать неравенство Чебышева:

$$P(|\xi-M\xi|\geqslant\delta)\leqslant\frac{D\xi}{\delta^2}.$$

Чтобы получить это неравенство, достаточно в имеющейся у нас форме неравенства Чебышева заменить ξ на $\xi - M\xi$. Таким образом, при помощи дисперсии можно оценить вероятность того, что отклонение случайной величины от математического ожидания превысит некоторое фиксированное число.

Остановимся на свойствах дисперсии. Из ее определения следует непосредственно, что

$$D(c\xi)=c^2D\xi$$

для любого числа c. Прежде чем переходить к вопросу о дисперсии суммы случайных величин, обсудим вопрос о математическом ожидании произведения случайных величин (связь этих двух вопросов выяснится в дальнейшем).

Определение 10.12. *Произведением* случайных величин ξ и η с характеристическими системами событий $\{a_1, \ldots, a_k\}$ и $\{b_1, \ldots, b_l\}$ соответственно называется случайная величина с характеристической системой событий $\{a_ib_j\}$ $(1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant l)$, определяемая условием

$$\xi\eta(a_ib_j)=\xi(a_i)\,\eta(b_j).$$

Легко проверить, что переход к подчиненным системам событий $\{\tilde{a}_i\}$, $\{\tilde{b}_j\}$ приводит к подчиненной системе событий $\{\tilde{a}_i\tilde{b}_j\}$ для $\{a_ib_j\}$. Это обеспечивает корректность определения.

Оказывается, что, вообще говоря, $M(\xi\eta)\neq M\xi\cdot M\eta$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример. Если имеется некоторое событие a, то можно построить случайную величину I_a с характеристической системой событий $\{a, \bar{a}\}$:

$$I_a(a)=1,\qquad I_a(\bar{a})=0.$$

Величина I_a называется *индикатором* события a. Имеем:

$$MI_a=P(a).$$

Если мы имеем два события a и b, то произведение их индикаторов равно индикатору их конъюнкции:

$$I_aI_b=I_{ab}.$$

Мы получаем, что математическое ожидание произведения $I_a I_b$ равно произведению математических ожиданий I_a и I_b лишь в том случае, когда события a и b независимы.

Аналогичная ситуация имеет место для произвольных случайных величин.

Определение 10.13. Случайные величины ξ и η с характеристическими системами событий $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ называются *независимыми*, если события a_i и b_j независимы для любых i, j.

10.20. Показать, что для независимых случайных величин ξ и η

$$M(\xi\eta) = M\xi\, M\eta. \ \blacktriangle$$

Отметим, что независимость является только достаточным, но не необходимым условием справедливости этой формулы.

10.21. Показать, что для независимых случайных величин ξ и η

$$D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta. \ \blacktriangle$$

При вычислении дисперсии часто удобно пользоваться формулой, приводимой в задаче 10.22.

10.22. Доказать, что

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2. \ \blacktriangle$$

10.23. Вычислить дисперсии для случайных величин, рассмотренных в задачах 10.16—10.18. ▲

6. Испытания Бернулли. Рассмотрим более внимательно случай, когда вероятностная булева алгебра $\{\mathfrak{A}_n, p\}$ (свободная) порождается n независимыми событиями $a_1, \ldots, a_n$, имеющими одинаковые вероятности ($P(a_i)=p$). Можно считать, что n раз независимым образом проводится опыт с двумя исходами, причем вероятность одного исхода (будем его называть положительным) равна p, а вероятность другого (отрицательного) равна $q=1-p$. Эта серия опытов называется *испытаниями Бернулли* (или *схемой Бернулли*). Событие a_i состоит в том, что при i-м испытании произошел положительный исход. Мы имеем, например, испытания Бернулли, если независимым образом бросаем монету и следим за тем, выпал ли герб (положительный исход) или решетка (отрицательный исход); здесь $p=q=\frac{1}{2}$. Если мы кидаем игральную кость и считаем положительным исходом выпадение шестерки, то мы имеем схему Бернулли с $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$. Если при изготовлении партии однотипной продукции не было систематических причин для брака, то последовательные испытания изделий на наличие брака должны быть испытаниями Бернулли.

Будем называть алгебру $\{\mathfrak{A}_n, p\}$ *алгеброй Бернулли*. Ее элементы являются функциями алгебры логики $f(a_1, \ldots, a_n)$ от $a_1, \ldots, a_n$; элементарными событиями будут $a_1^{\sigma_1} \ldots a_n^{\sigma_n}$. В силу задачи 10.8 их вероятности равны

$$p_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} = p^m q^{n-m} = p^m (1-p)^{n-m},$$

где m — число единиц в наборе $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Тогда

$$P(f(a_1, \ldots, a_n)) = h_f(p) = \sum_{m=0}^{n} c_m(f)\, p^m (1-p)^{n-m}, \quad (10.1)$$

где $c_m(f)$ — число наборов, содержащих m единиц, на которых f равна единице. Ясно, что

$$0 \leqslant c_m(f) \leqslant C_n^m,$$

где C_n^m — общее число наборов, содержащих m единиц; оно равно числу сочетаний из n элементов по m (известно, что $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$). Рассмотрим на $\mathfrak{A}_n$ случайную величину ξ_n — число положительных исходов. Мы определим ее на элементарных событиях:

$$\xi_n(a_1^{\sigma_1} \ldots a_n^{\sigma_n}) = m(\sigma),$$

где $m(\sigma)$ — число единиц в наборе σ.

10.24. Найти $M\xi_n$ и $D\xi_n$. ▲

Наряду с величиной ξ_n мы будем рассматривать случайную величину ζ_n — *среднее число*, или *частоту положительных исходов*

$$\zeta_n = \frac{\xi_n}{n} = \frac{m(\sigma)}{n}.$$

В силу задачи 10.24 имеем:

$$M\zeta_n = p; \quad D\zeta_n = \frac{pq}{n}.$$

Применим к случайной величине ζ_n неравенство Чебышева:

$$P(|\zeta_n - p| \geqslant \delta) \leqslant \frac{pq}{n\delta}.$$

Итак, мы имеем оценку для вероятности отклонения среднего числа положительных исходов от вероятности такого исхода p на величину, бо́льшую δ. Учитывая, что $q = 1-p$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$, имеем $pq \leqslant \frac{1}{4}$, и можно написать оценку, не зависящую от p:

$$P(|\zeta_n - p| \geqslant \delta) \leqslant \frac{1}{4n\delta}. \tag{10.2}$$

Исследуем алгебраический смысл неравенства (10.2). Для этого нужно вычислить $P(|\zeta_n - p| \geqslant \delta)$.

10.25. Найти $P(|\zeta_n - p| \geqslant \delta)$. ▲

Перейдем в неравенстве (10.2) к пределу при $n \to \infty$; получаем:

$$\lim_{n \to \infty} P(|\zeta_n - p| \geqslant \delta) = 0 \tag{10.3}$$

или, что эквивалентно,

$$\lim_{n \to \infty} P(|\zeta_n - p| < \delta) = 1.$$

Другими словами, для достаточно больших n частота положительных исходов сколь угодно мало отличается от p с вероятностью, сколь угодно мало отличающейся от единицы. Чтобы придать точный смысл этим словам, введем следующее

Определение 10.14. Последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *стремится по вероятности* при $n \to \infty$ к случайной величине ξ ($\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{pr}\, \xi_n = \xi$), если для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ существует такое N, что при всех $n > N$

$$P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon_1) > 1 - \varepsilon_2.$$

Мы показали, что $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{pr}\, \zeta_n = p$, где p — постоянная случайная величина. Это — простейшая форма так называемого *закона больших чисел.*

В соответствии с этим законом исходам опыта, который можно воспроизводить независимым образом бесконечное число раз, можно приписывать вероятности в соответствии с их частотой. Полученное утверждение имеет характерную особенность некоторых теорем теории вероятностей: в них с вероятностью, близкой к единице, делается утверждение, которое может быть сформулировано в невероятностных терминах. На такого ряда фактах основаны применения теории вероятностей к практическим задачам.

7. Полиномы С. Н. Бернштейна. Мы воспользуемся полученными результатами об испытаниях Бернулли для доказательства теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении функций полиномами (доказательство С. Н. Бернштейна).

Определение 10.15. Пусть $\varphi(p)$ — функция, непрерывная на отрезке $[0, 1]$. Назовем полином

$$B_n(\varphi; p) = \sum_{m=0}^{n} \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

n-м *полиномом Бернштейна* функции $\varphi(p)$. Это — полином n-й степени (относительно p).

10.26. Доказать, что последовательность $B_n(\varphi; p)$ при $n \to \infty$ равномерно сходится к $\varphi(p)$. ▲

Мы доказали, что всякую непрерывную функцию $\varphi(p)$ на отрезке $[0, 1]$ можно равномерно приблизить полиномами с любой степенью точности, причем указан конкретный способ построения приближающей последовательности полиномов $(B_n(\varphi; p))$.

Сделаем одно дополнение к этому утверждению. Пусть функция $\varphi(p)$ принимает целочисленные значения на концах отрезка $[0, 1]$. Для этого случая мы покажем, что $\varphi(p)$ можно равномерно приблизить на $[0, 1]$ полиномами с целочисленными коэффициентами.

Построим по $\varphi(p)$ последовательность полиномов

$$C_n(\varphi; p) = \sum_{m=0}^{n} \left[\varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m\right] p^m (1-p)^{n-m},$$

где $[x]$ — целая часть числа x. В нашем случае $[\varphi(0)C_n^0] = \varphi(0)$ и $[\varphi(1)C_n^n] = \varphi(1)$, так как $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ — целые числа.

10.27. Показать, что последовательность полиномов $C_n(\varphi; p)$ равномерно сходится к $\varphi(p)$. ▲

Пусть функция $\varphi(p)$ удовлетворяет условию: $0 \leqslant \varphi(p) \leqslant 1$; $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ равны 0 или 1. Тогда $C_n(\varphi; p)$ имеет вид

$$\sum_{m=0}^{n} a_m p^m (1-p)^{n-m}, \tag{10.4}$$

где a_m — целые числа; $0 \leqslant a_m \leqslant C_n^m$. Как мы видели (см. (10.1)), полином такого вида можно интерпретировать как вероятность $h_f(p)$ события $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (f — функция алгебры логики) в алгебре Бернулли $(\mathfrak{A}_n, p)$ (вероятности a_i равны p). Напомним, что a_m — число наборов, содержащих m единиц, на которых f равна 1. Будем называть такой полином *полиномом Бернштейна, соответствующим функции алгебры логики* f *). (Функция f выбирается неоднозначно.) Итак, доказано, что всякая функция $0 \leqslant \varphi(p) \leqslant 1$ на отрезке $[0, 1]$, равная на концах отрезка 0 или 1, может быть равномерно приближена полиномами Бернштейна, соответствующими функциям алгебры логики.

10.28. Показать, что всякая функция $\varphi(p)$ на $[0, 1]$, удовлетворяющая, кроме перечисленных выше условий, еще соотношению

$$\varphi(1-p) = 1 - \varphi(p) \quad (0 \leqslant p \leqslant 1), \tag{10.5}$$

может быть равномерно приближена полиномами Бернштейна, соответствующими самодвойственным функциям алгебры логики. ▲

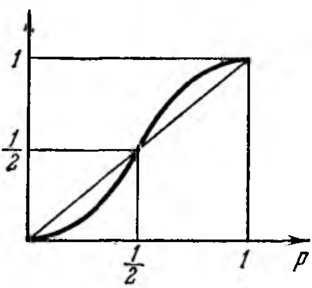


Рис. 81.

Отметим геометрический смысл соотношения (10.5), состоящий в том, что график $\varphi(p)$ симметричен относительно точки $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (рис. 81).

8. Полиномы Бернштейна, связанные с функциями алгебры логики. Обсудим теперь вопрос о полиномах Бернштейна, связанных с функциями алгебры логики, и о при-

---

*) Полиномы Бернштейна, соответствующие функциям алгебры логики (в частности, результат задачи 10.28), рассматривались в неопубликованных лекциях П. С. Новикова.

ближении этими полиномами непрерывных функций в связи с реализацией функций алгебры логики схемами из функциональных элементов и контактными схемами.

Определение 10.16. Назовем *каналом Бернулли с параметром* p устройство, на выходе которого с вероятностью p возникает сигнал 1, с вероятностью $1-p$ — сигнал 0, причем сигналы в различные моменты времени независимы.

Возьмем какую-нибудь схему S из нультактных функциональных элементов, реализующую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Если мы подадим на входы схемы независимые каналы Бернулли с одинаковыми параметрами p, то можно считать, что на входы схемы будут независимо подаваться единицы с вероятностью p. Тогда на выходе схемы будет возникать единица с вероятностью $h_f(p)$, где $h_f(p)$ — полином Бернштейна, соответствующий функции f (см. (10.1)). Таким образом, схему из нультактных функциональных элементов можно использовать как устройство для преобразования каналов Бернулли (из каналов с параметрами p мы получаем канал с параметром $h_f(p)$). Полином h_f называется *законом преобразования* каналов Бернулли в схеме S. Из доказанного следует, что если нам задана любая функция φ, непрерывная на отрезке $[0, 1]$ и принимающая значения 0 и 1 на его концах, то можно построить схемы из функциональных элементов, преобразующие каналы Бернулли по закону $h_f(p)$, сколь угодно мало отличающемуся (равномерно по p) от $\varphi(p)$. Аналогично рассматриваются правильные многотактные схемы из функциональных элементов.

Некоторым недостатком в использовании правильных схем из функциональных элементов для преобразования каналов Бернулли является необходимость иметь несколько независимых каналов с параметрами p для получения канала с параметром $h_f(p)$ *). Более удобной является несколько иная точка знания, основанная на рассмотрении автоматов без обратных связей. Пусть мы имеем такой автомат, например, реализованный (неправильной) схемой из однотактных функциональных элементов с одним входом (рис. 82). Пусть состояние выхода автомата $\mathfrak{A}_\nu$ в момент t зависит от состояния входа в ν предыдущих моментов времени $s^1 = s(t-1), \ldots, s^\nu = s(t-\nu)$ и сигнал на выходе равен

---

*) Можно было бы считать, что каналы, связанные с различными входами схемы, характеризуются различными параметрами.

$f(s^1, \ldots, s^\nu)$ (т. е. у $\mathfrak{A}_\nu$ задержка равна 1, а индекс ν). В § 8 (задача 8.15) показано, что любой такой автомат может быть представлен схемой нз однотактных функциональных элементов (вообще говоря, неправильной). Если соединить вход схемы (автомата) $\mathfrak{A}_\nu$ с каналом Бернулли, то в каждый момент времени на его выходе будет появляться 1 с вероятностью $h_f(p)$ и 0 с вероятностью $1-h_f(p)$. Если следить за сигналами на выходе $\mathfrak{A}_\nu$ через ν тактов, то они будут независимы. Таким образом, можно считать, что автомат $\mathfrak{A}_\nu$ преобразует канал Бернулли с параметром p в канал Бериулли с параметром $h_f(p)$ (с изменением масштаба времени новая единица времени равняется ν старым).

Рис. 82.

Опять-таки любой закон преобразования, задаваемый непрерывной функцней $\varphi(p)$ ($\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ равны 0 или 1), можно с любой степенью точности приблизить при помощи подходящим образом построенного автомата.

В частности, возьмем функцию $\chi(p)$, равную 0 при $p<\frac{1}{2}$ и 1 прн $p \geqslant \frac{1}{2}$ (рис. 83), и приблизим ее непрерывной

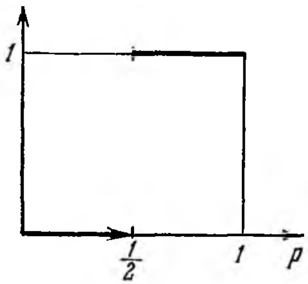


Рис. 83.

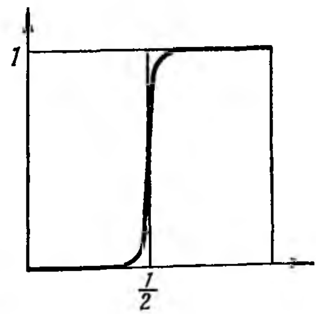


Рис. 84.

функцией $\varphi(p)$ (рис. 84), т. е. φ всюду, кроме малой окрестности $\frac{1}{2}$, слева от $\frac{1}{2}$ близка к 0, справа — к 1. Если рассмотреть автомат, преобразующий каналы Бернулли по закону $h_f(p)$, где $h_f(p)$ достаточно хорошо приближает $\varphi(p)$ *), то $h_f(p)$ будет обладать указанными выше свойствами $\varphi(p)$, и мы получаем устройство, работающее следующим

*) Нетрудно показать, что в качестве f можно для достаточно большого k взять функцию от $2k+1$ аргументов, равную 1, если большинство аргументов равно 1.

образом. Если на вход подается **0** (соответственно **1**) с вероятностью $p<\frac{1}{2}$ и достаточно отличающейся от $\frac{1}{2}$, то на выходе будет появляться **0** (соответственно **1**) с вероятностью, мало отличающейся от единицы. Другими словами, это своего рода уснлитель: если на его вход поступает сигнал с вероятностью ошибки p, достаточно меньшей $\frac{1}{2}$, то на выходе вероятность ошибки мало отличается от нуля. Причнна такого уменьшения вероятности ошибки, грубо говоря, заключается в том, что выходной сигнал зависит не от одного сигнала на входе, а от некоторого числа ν предыдущих (как говорят, «набирается статистика по ν сигналам»), при этом с уменьшением границы отклонения вероятностн от нуля необходимое число сигналов ν растет. Ясно, что, выбнрая соответствующий автомат $\mathfrak{A}_\nu$, можно сделать интервал около $\frac{1}{2}$ и отклонение вероятности ошибки от нуля сколь угодно малыми. Близкие соображения мы будем использовать ниже в других задачах.

Сейчас мы рассмотрим одну задачу из теории автоматов, уже упоминавшуюся в § 8. Это задача о поведении автомата в случайной среде, рассмотренная М. Л. Цетлиным [6]. Имеется следующая ситуация. Если на выходе автомата появляется **0**, то в следующий момент времени на его вход с вероятностью p поступает **0**, с вероятностью $1-p$ поступает **1** (с вероятностью p среда, в которой находится автомат, «штрафует» его, с вероятностью $1-p$ «поощряет»). Если выходной сигнал есть **1**, то картина противоположная: с вероятностью p на его вход поступит **1**, а с вероятностью $1-p$ поступит **0**. Число p фиксировано, но заранее не известно. Нужно построить автомат, который бы с возможно меньшей вероятностью штрафовался. Ясно, что для этого он с вероятностью, близкой к единице, должен выдавать **0**, если $p<\frac{1}{2}$, и **1**, если $p>\frac{1}{2}$.

Рис. 85.

Начнем с рассмотрения простейшего однотактного автомата (рис. 85), где элемент φ реализует функцию $\varphi(x, y)=$ $=x+y=x\bar{y}\vee\bar{x}y$. Поместим этот автомат в случайную среду и на вход y подадим сигнал, свидетельствующий о штрафе или поощрении. Пусть P — вероятность того, что на выходе автомата появится 0. Ясно, что

$$P(1-p)+(1-P)p=P,$$

так как нуль на выходе возникает, либо если он был на выходе в предыдущем такте и автомат не был оштрафован (условная вероятность этого равна $1-p$), либо если на предыдущем такте автомат выдавал единицу и был оштрафован. Другими словами, тактика поведения автомата следующая: менять действие при штрафе и не менять его при поощрении. Из приведенного равенства следует, что

$$P=1-p,$$

т. е. тактика автомата оказывается целесообразной; именно, он с большей вероятностью выдает тот сигнал, за который его штрафуют с меньшей вероятностью (при $p<\frac{1}{2}$ это нуль, при $p>\frac{1}{2}$ — единица).

Рис. 86.

Однако нам хотелось бы иметь автомат, который с вероятностью, близкой к единице, выдавал тот сигнал, за который штрафуют с меньшей вероятностью. Для этого рассмотрим, с одной стороны, описанный выше автомат без обратных связей $\mathfrak{A}_\nu$, преобразующий канал Бернулли по закону $h_f(p)$, где f — функция от ν переменных; график $h_f(p)$ имеет вид, указанный на рис. 84; $h_f(p)$ аппроксимирует $\chi(p)$ (рис. 83) вне малой окрестности $\frac{1}{2}$. Рассмотрим еще автомат без обратных связей $\mathfrak{B}_\nu$ (рис. 86), у которого выходной сигнал в момент времени t имеет вид $\overline{s_1(t-1)}\vee\vee\overline{s_1(t-2)}\vee\ldots\vee\overline{s_1(t-\nu-3)}\vee s_2(t-1)$, где $s_1(t)$, $s_2(t)$ — сигналы на входах s_1, s_2 в соответствующие моменты времени. Таким образом, на выходе $\mathfrak{B}_\nu$ нулевой сигнал будет только в том случае, когда на первый вход в $\nu+3$ предыдущих моментов времени поступал единичный сигнал, а на второй вход в предыдущий момент поступил нулевой сигнал. Рассмотрим автомат (уже с обратными связями), изображенный на рис. 87. Здесь однотактный элемент φ реализует функцию $x+y$; на вход $\mathfrak{A}_\nu$ подается сигнал о штрафе или поощрении. Сравнение с автоматом, изображенным на

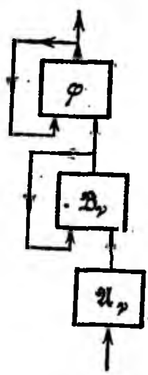


Рис. 87.

рис. 85, показывает следующее. Выходной сигнал автомата (элемента φ) изменится, если в предыдущий момент (пусть это был момент времени t) на выходе $\mathfrak{B}_\nu$ был нулевой сигнал, т. е. если в моменты от $(t-\nu-3)$-го до $(t-1)$-го на выходе $\mathfrak{B}_\nu$ был единичный сигнал (а значит, на выходе φ в моменты от $(t-\nu-2)$-го до t-го сигнал не менялся), и в $(t-1)$-й момент на выходе $\mathfrak{A}_\nu$ был нулевой сигнал. Указанный сигнал на выходе $\mathfrak{A}_\nu$ соответствует сигналам штрафа — поощрения, полученным в ответ на выходные сигналы автомата в моменты времени от $(t-\nu-2)$-го до $(t-2)$-го. Но, как мы заметили, в эти моменты выходной сигнал автомата должен быть тем же, что и в момент t, т. е. в этих условиях вероятность нулевого выходного сигнала у $\mathfrak{A}_\nu$ равна $h_f(p)$ или $h_f(1-p)$ в зависимости от того, равен нулю или единице выходной сигнал автомата в момент t. В результате, если $h_f(p)$ достаточно хорошо аппроксимирует $\chi(p)$, то автомат будет с вероятностью, близкой к единице, менять выходной сигнал, если за него штрафуют с вероятностью, большей $\frac{1}{2}$, и не менять, если эта вероятность меньше $\frac{1}{2}$. Автомат $\mathfrak{B}_\nu$ в течение достаточно долгого времени не будет менять выходного сигнала. В течение этого времени автомат $\mathfrak{A}_\nu$ выясняет, насколько часто за этот сигнал штрафуют. Можно выбрать $\mathfrak{A}_\nu$ так, что этот вопрос будет выяснен достаточно надежно (при этом ν будет большим). Мы ограничимся этими качественными рассмотрениями, не проводя подробных выкладок.

Мы построили пример последовательности автоматов, асимптотически оптимально ведущей себя в случайной среде. Известны и другие конструкции таких последовательностей автоматов [6]. При этом обычно не ограничиваются рассмотренным нами случаем симметричной среды (вероятности штрафов при выходных сигналах **0** и **1** в сумме равны единице).

9. Ненадежные реле. Рассмотрим некоторые близкие задачи, связанные с контактными схемами.

Определение 10.17. Будем говорить, что у нас имеется *вероятностное реле с параметрами* (a, b), если его контакт с вероятностью a замкнут при наличии тока в обмотке и с вероятностью b при его отсутствии.

В случае параметров (1, 0) мы получаем реле с замыкающим контактом, в случае (0, 1) — с размыкающим контактом. В остальных случаях можно считать, что мы имеем ненадежное реле, которое в каждом состоянии с некоторой вероятностью не срабатывает. Строя схемы из таких контактов, мы можем — в предположении, что все составляющие эту схему реле работают независимо,— вычислять вероятности замыкания схемы при различных наборах состояний обмоток входящих в нее реле. Ограничимся случаем, когда все контакты относятся к одной обмотке и параметры (a, b) являются характеристиками только контакта, т. е. предполагается, что ошибки в контактах происходят независимо: они не связаны с обмоткой. Для того чтобы иметь дело с полиномами от одной переменной, предположим, что у нас имеются только контакты двух типов: с параметрами $(1-p, p)$, $p < \frac{1}{2}$ — «замыкающие» и $(p, 1-p)$ — «размыкающие» (p у всех контактов одно и то же). Тогда контактную схему, составленную из таких контактов и реализующую некоторую самодвойственную функцию алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ *), можно рассматривать как сложный контакт с параметрами $(h_f(1-p) = 1-h_f(p),\ h_f(p))$, где $h_f(p)$ — полином Бернштейна, связанный с функцией f; использованное тождество для h_f имеет место в силу самодвойственности f.

По аналогии с преобразованием каналов Бернулли можно говорить о преобразовании вероятностных реле (контактов). При этом опять-таки при помощи контактных (самодвойственных) схем можно равномерно приблизить любой непрерывный закон преобразования.

Если же закон преобразования задается разрывной функцией, изображенной на рис. 83, то ее можно равномерно приблизить всюду вне любого интервала, содержащего точку $\frac{1}{2}$ (рис. 84). При этом, если p интерпретировать как вероятность несрабатывания контакта, то у сложного контакта вероятность ошибки $h_f(p) < p$, причем при подходящем выборе f эта вероятность может быть сделана сколь угодно малой. Таким образом, из ненадежных контактов можно получать сколь угодно надежные контакты.

Пока при имеющемся способе построения, скажем, надежных замыкающих контактов приходилось использовать как замыкающие, так и размыкающие (недостаточно на-

*) Мы формально приписываем всем контактам символы различных переменных $x_1, \ldots, x_n$ или их отрицаний $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, хотя все контакты связаны с одной и той же обмоткой.

дежные) контакты. Естественно обсудить вопрос о том, можно ли получить сколь угодно надежные замыкающие контакты только при помощи замыкающих ненадежных контактов. Поскольку схемы из замыкающих контактов представляют монотонные функции, этот вопрос естественно связан с изучением полиномов Бернштейна, связанных с монотонными функциями.

10.29. Доказать, что для полинома Бернштейна $h_f(p)$, связанного с монотонной функцией алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, при $0 < p < 1$ имеет место неравенство

$$h_f'(p) \geqslant \frac{h_f(p)(1-h_f(p))}{p(1-p)}, \qquad (10.6)$$

причем знак равенства возможен, лишь если $h_f(p) \equiv 0$, $h_f(p) \equiv 1$ или $h_f(p) = p$. ▲

Этот результат был получен Муром и Шенноном [7].

Из задачи 10.29 следует, в частности, монотонность функции $h_f(p)$ (действительной переменной) для монотонной функции алгебры логики f, так как $h_f' \geqslant 0$, т. е. h_f не убывает. Этот факт легко устанавливается непосредственно.

10.30. Показать, что если $h_f(p) = 0$, 1 или p, то соответственно $f = 0$, $f = 1$ или $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. ▲

10.31. График полинома Бернштейна $h_f(p)$, соответствующего монотонной функции алгебры логики, может пересекать прямую $h(p) = p$ при $0 < p < 1$ не более чем в одной точке. ▲

Из задачи 10.30 следует очень важная информация о полиноме $h_f(p)$. Если $f \neq \text{const}$, то $h_f(0) = 0$, $h_f(1) = 1$. Кроме того, мы интересуемся самодвойственными функциями, и пусть $f \neq x_i$. Поскольку график $h_f(p)$ для каждой самодвойственной функции f пересекает прямую $h(p) = p$ в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, для монотонной самодвойственной функции $f \neq x_i$ эта точка пересечения является единственной, т. е. график $h_f(p)$ в этом случае имеет вид, указанный на рис. 88. Существенно, что при $p < \frac{1}{2}$ график $h_f(p)$ лежит ниже прямой $h(p) = p$; это следует из того, что $h_f'\left(\frac{1}{2}\right) > 1$ в силу (10.6) (в нашем случае неравенство строгое).

Вернемся к вопросу, с которого мы начинали. Ясно, что если собрать из замыкающих контактов с параметрами $(1-p, p)$ схему, отвечающую функции f, то мы получим сложный контакт с параметрами $(1-h_f(p), h_f(p))$. Поскольку $h_f(p) < p$ при $0 < p < \frac{1}{2}$, мы получаем более надежный контакт. Чтобы показать возможность построения сколь угодно надежного контакта, достаточно показать, что вне интервала около $\frac{1}{2}$ функцию χ (рис. 83) можно сколь угодно точно

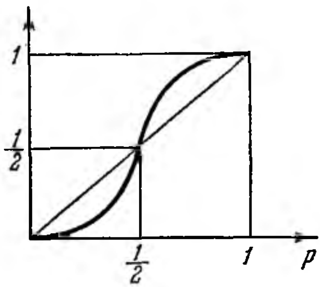


Рис. 88.

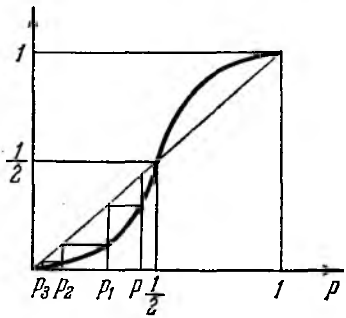


Рис. 89.

приблизить функциями $h_f(p)$, соответствующими монотонным самодвойственным функциям f. Вместо этого можно, рассматривая при $0 < p < \frac{1}{2}$ сложный контакт с параметрами $(1-h_f(p), h_f(p))$ как элементарный, образовать из них схему для f. В результате получится контакт, для которого вероятность ошибки равна $h_f(h_f(p))$. Продолжая этот процесс дальше, мы получим последовательность контактов с вероятностями ошибок

$$p_k = h_f(h_f(\ldots(h_f(h_f(p)))\ldots)).$$

Процедура последовательного получения p_k — это обычный итерационный процесс (рис. 89). Ясно, что $p_{k+1} < p_k$, т. е. это монотонно убывающая последовательность положительных чисел. Для ее предела a должно выполняться равенство $h_f(a) = a$, откуда следует, что $a = 0$. Итак, при каждом $0 < p < \frac{1}{2}$ можно построить сколь угодно надежный сложный контакт. Мы использовали здесь лишь, что $h_f(p) < p$ при $0 < p < \frac{1}{2}$ (а не монотонность $h_f(p)$). Из монотонности h_f

следует, что всюду p можно считать не точной вероятностью ошибки контакта, а верхней границей вероятности его ошибки.

Сделаем еще одно замечание о неравенстве (10.6). Оно является необходимым условием того, что среди функций алгебры логикя, отвечающих полиномам Бернштейна $h_f(p)$, имеется монотонная функция. Нетрудно показать, что это условие не является достаточным. В [8] формулируется результат о том, что существует такая функция от двух переменных $F(x, y)$ $(0 \leqslant x,\ y \leqslant 1)$ (которую можно явно построять), что полиному $h_f(p)$ соответствует монотонная функция алгебры логики тогда и только тогда, когда

$$h_f'(p) \geqslant F(p,\ h_f(p)) \qquad (0 < p < 1).$$

При этом $F(x, y) \geqslant \frac{y(1-y)}{x(1-x)}$, откуда следует неравенство Мура — Шеннона (10.6).

10. Проблема полноты ненадежных функциональных элементов. Рассмотрим вопрос о надежности схем из функциональных элементов (нультактных) [9]. Будем считать, что входящие в схему функциональные элементы могут (независимо друг от друга) ошибаться с некоторой вероятностью. Более точно, мы имеем некоторый набор функций алгебры логики $\Phi=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *) и для каждой из этих функций имеется неограниченное число функциональных элементов **), ее реализующих, причем вероятность ошибки этих элементов не превосходит ε_i $\left(0 \leqslant \varepsilon_i < \frac{1}{2}\right)$ (при любом наборе входных сигналов). Таким образом, мы не фиксируем вероятность ошибки функционального элемента, а лишь ограничиваем ее сверху. Такая точка зрения представляется более естественной, так как точные вероятности в реальной ситуации, может быть, трудно определить, а кроме того, они могут быть различными для различных функциональных элементов, реализующих одну и ту же функцию алгебры логики; вероятность ошибки элемента может быть различной при различных наборах входных сигналов и т. д. Исходя из того, что элементы в схеме ошибаются независимо, и зная ε_i, можно оценить вероятность ошибки схемы. Нас будет интересовать вопрос, когда функцию алгебры

*) Мы ограничиваемся здесь конечными системами Φ, хотя в рассматриваемых задачах представляет интерес и рассмотрение бесконечных систем функций (см. [9]).

**) Будем их обозначать теми же буквами.

логики F можно сколь угодно надежно реализовать схемой из элементов φ_i, т. е. когда для функции F и каждого $\gamma>0$ существует схема из элементов Φ, реализующая F с вероятностью ошибки, меньшей γ. Если сколь угодно надежная реализация возможна для любой функции алгебры логики, то систему функциональных элементов Φ назовем *h-полной*. Мы найдем здесь для некоторых случаев условия h-полноты в терминах функционально замкнутых классов. Прежде всего выясним, что требование h-полноты является более сильным, чем обычное требоваиие полноты.

10.32. Показать, что если система функциональных элементов Φ является h-полной, то система реализуемых ими функций полна (в обычном смысле, см. § 6). ▲

Заметим, что в h-полной системе (конечной! *)) обязательно должны содержаться абсолютно надежные элементы. Это следует из следующего утверждения (леммы Дж. фон Неймана).

10.33. Показать, что вероятность ошибки схемы не может быть меньше вероятности ошибки ε ее выходного элемеита, если $\varepsilon<\frac{1}{2}$. ▲

Если бы в конечной системе функциональных элемеитов Φ не было абсолютно надежных элементов, то нельзя было бы получить схемы, реализующие функции с вероятностью ошибки, меньшей, чем наименьшая из вероятностей ошибок элементов Φ.

Естественно возникает вопрос: бывают ли h-полные системы, не содержащие полных подсистем абсолютно надежных элементов?

Укажем важный способ построения таких систем, основанный на свойствах элемента, называемого «смесителем»; этот элемент реализует функцию $m(x, y, z)=xy\vee yz\vee xz$.

10.34. Показать, что всякая система функциональных элементов Φ, содержащая абсолютно надежный смеситель, и такая, что соответствующая ей система функций полна, является h-полной. ▲

---

*) Бесконечная система элементов, содержащая сколь угодно надежные полные (в обычном смысле) подсистемы, как легко заметить, всегда h-полна.

Использование смесителя для повышения надежности очень естественно: он как бы проводит «голосование» среди сигналов, приходящих на его входы; по его выходному сигналу можно судить о том, каких сигналов пришло больше. Ясно, что если это «устройство для голосования» работает абсолютно надежно, то в результате мы получим схему, более надежную, чем исходные.

10.35 Показать, что то же утверждение остается справедливым, если заменить смеситель элементом, реализующим любую самодвойственную монотонную функцию, не совпадающую ни с какой переменной. ▲

Как мы видели в § 7, вопросы, связанные с функционально замкнутыми классами, проще рассматриваются для случая расширенной суперпозиции, т. е. при наличии констант. В случае схем из ненадежных элементов этому соответствует предположение о наличии абсолютно надежных элементов, реализующих константы. В этом предположении мы и рассмотрим вначале вопрос о h-полноте, используя результаты § 7 о функционально замкнутых классах для расширенной суперпозиции.

10.36. Найти необходимые и достаточные условия h-полноты конечной системы ненадежных функциональных элементов $\Phi=\{f_1, \ldots, f_k\}$, содержащей абсолютно надежные константы **0** и **1**. ▲

Отметим одно важное следствие полученных результатов. Оказывается, что система абсолютно надежных функциональных элементов R, содержащая элементы, реализующие обе константы и функции $\varphi_1 \notin \mathbf{L}$, $\varphi_2 \notin \mathbf{D}^{01}$, $\varphi_3 \notin \mathbf{K}^{01}$, является *универсально надежной* системой в следующем смысле. Дополняя ее до полной системы (удовлетворяющей условиям теоремы Поста) любыми элементами, верхние границы вероятностей ошибок которых ε_i меньше $\frac{1}{2}$, мы получим h-полную систему. Другими словами, условия h-полноты системы элементов, содержащей надежные константы (точнее, условия на абсолютно надежную часть системы), не зависят от границ вероятностей ошибок ненадежных элементов ε_i, если только $\varepsilon_i < \frac{1}{2}$. Оказывается [9], что если не предполагать наличия надежных констант, то условия на абсолютно надежную часть очень существенно зависят от ε_i. Мы приведем ниже точную формулировку этого результата, а пока обсудим более простой вопрос об условиях на универсальную надежную систему элементов, т. е. такую систему элементов R, расширение которой до полной системы любыми элементами с границами вероятностей ошибок, меньшими $\frac{1}{2}$, делает h-полной систему R. Пока у нас имеются необходимые и достаточные условия универсальной надежности системы элементов, содержащей константы. Кроме того, из задачи 10.34 следует, что смеситель $m(x, y, z)$ и, вообще, любая самодвойственная монотонная функция, не совпадающая с аргументом, образует универсально надежную систему.

Вначале сформулируем достаточное условие.

Система абсолютно надежных функциональных элементов универсально надежна, если среди реализуемых ею функций имеются функции $\varphi_1 \notin \mathbf{L}$, $\varphi_2 \notin \mathbf{D}^{01}$, $\varphi_3 \notin \mathbf{K}^{01}$, $\varphi_4 \notin \mathbf{F}^{(2)}$, $\varphi_5 \notin \mathbf{G}^{(2)}$. Нам потребуются некоторые дополнения к доказанным в § 7 результатам о функционально замкнутых классах (конечно, можно воспользоваться таблицей классов (рис. 6), но мы по возможности не хотим пользоваться не доказанными здесь результатами). Именно, нам потребуется найти $\mathbf{S}_{01}$-предполные функционально замкнутые классы, где $\mathbf{S}_{01}$ — класс самодвойственных функций, сохраняющих 0 (тем самым они автоматически сохраняют и 1).

10.37. Показать, что следующие системы функций являются базисами в $\mathbf{S}_{01}$: а) $xy+yz+xz+y+z$; б) $\{xy+yz+xz, x+y+z\}$. ▲

10.38. Найти $\mathbf{S}_{01}$-предполные функционально замкнутые классы. ▲

10.39. Показать, что класс $\mathbf{MS}$ самодвойственных монотонных функций содержится и в $\mathbf{F}^{(2)}$, и в $\mathbf{G}^{(2)}$. ▲

10.40. Показать, что сформулированные выше условия универсальной надежности системы элементов достаточны. ▲

Очевидно, что сформулированные условия не являются необходимыми, так как, например, система функций, состоящая из одного смесителя $m(x, y, z)$, не удовлетворяет этим условиям (в силу задачи 10.39).

Сформулируем необходимые и достаточные условия универсальной надежности системы функциональных элементов R. Эти условия получаются, если в сформулированном выше достаточном условии заменить $\mathbf{F}^{(2)}$ и $\mathbf{G}^{(2)}$ соответственно на $\mathbf{F}^{(3)}$ и $\mathbf{G}^{(3)}$. Итак, система R абсолютно надежных функциональных элементов универсально надежна тогда и только тогда, когда среди реализуемых ею функций имеются функции: $\varphi_1 \notin \mathbf{L}$, $\varphi_2 \notin \mathbf{D}^{01}$, $\varphi_3 \notin \mathbf{K}^{01}$, $\varphi_4 \notin \mathbf{G}^{(3)}$, $\varphi_5 \notin \mathbf{F}^{(3)}$.

10.41. Используя таблицу функционально замкнутых классов Поста, доказать достаточность сформулированного условия. ▲

Доказательство необходимости этого условия слишком сложно, чтобы приводить его здесь.

Перейдем к общему результату об условиях h-полноты системы элементов [9]. Пусть имеется некоторая система Φ функциональных элементов, состоящая из системы $R=\{f_1, \ldots, f_k, \ldots\}$ абсолютно надежных элементов и системы $T=\{g_1, \ldots, g_m, \ldots\}$ ненадежных элементов; ε_i — верхняя граница вероятности ошибки элемента g_i, $0<\varepsilon_i<\frac{1}{2}$.

Пусть

$$\varkappa(T)=\inf_{T} \varepsilon_i.$$

Будем предполагать, что $\varkappa(T)>0$. Для конечных систем T точная нижняя грань совпадает с наименьшим из ε_i; в этом случае указанное условие всегда выполнено. Пусть, далее, $T(\nu)$ — совокупность элементов $g_i \in T$, для которых $\varepsilon_i<\nu$. Для всякой системы элементов $T' \subset T$ положим:

$$\varkappa(T')=\inf_{g_i \in T'} \varepsilon_i.$$

Теперь мы можем сформулировать критерий h-полноты [9].

Для h-полноты системы элементов $\Phi=R \cup T$ ($\varkappa(T)>0$) необходимо и достаточно, чтобы

1) система Φ была полна в обычном смысле;

2) система R содержала:

а) нелинейную функцию,

б) функцию, не принадлежащую классу $\mathbf{D}^{01}$,

в) функцию, не принадлежащую классу $\mathbf{K}^{01}$;

3) существовала система целых чисел $\mu_1>\mu_2>\ldots>\mu_t>1$ такая, что если $T_i=T\left(\frac{1}{\mu_i}\right)$, $R_1=R$, $R_{i+1}=R \cup T_i$; $\varkappa_0=\varkappa(T)$, $\varkappa_i=\varkappa(T \setminus T_i)$, то

α) $\varkappa_{i-1}<\frac{1}{\mu_i}$,

β) система R_l содержит функцию, не принадлежащую классу $\mathbf{F}^{(\mu_l+1)}$,

γ) система R_l содержит функцию, не принадлежащую классу $\mathbf{G}^{(\mu_l+1)}$,

δ) система $R_{l+1}=R \cup T_l$ полна в обычном смысле.

При доказательстве достаточности удобно использовать функции

$$S_n^l(x_1, \ldots, x_n)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x_1+\ldots+x_n < l\,^{*)}, \\ 1 & \text{при} \quad x_1+\ldots+x_n \geqslant l\,^{*)}, \end{cases}$$

т. е. S_n^l равна нулю на наборах, содержащих менее l единиц. Эти функции обобщают смеситель; имеем $m(x, y, z)=$ $=S_3^2(x, y, z)$. Ясно, что функции $S_{\mu k+1}^{k+1}$ принадлежат $\mathbf{F}^{(\mu)}$ при любом k (любые μ наборов длины $\mu k+1$, содержащие не более k единиц, имеют общий нуль). В дальнейшем основную роль играет следующий результат.

10.42. Показать, что

$$\lim_{k\to\infty} h_{f_k}(p)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad p>\dfrac{1}{\mu}, \\ 0 & \text{при} \quad p<\dfrac{1}{\mu}, \end{cases}$$

где $f_k=S_{\mu k+1}^{k+1}$; h_{f_k} — связанный с f_k полином Бернштейна (см. (10.1)). ▲

10.43. Доказать достаточность указанного выше условия h-полноты. ▲

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 10

10.1. а) $x \vee \bar{x}=1$, $x\bar{x}=0$;

б) воспользоваться а) и аксиомой 1);

в) воспользоваться аксиомой 2) и формулой а);

г) показать, что если $x \longrightarrow y=1$, то $y=x \vee \bar{x}y$; при этом события x и $\bar{x}y$ несовместимы;

д) $x \vee y=x \vee \bar{x}y$; $\bar{x}y \longrightarrow y=1$;

е) см. д) и $\bar{x}y \vee xy=y$, причем $\bar{x}y$ и xy несовместимы;

ж), з) доказываются по индукции;

и) $x=xy \vee x\bar{y}$;

к) см. е) и б).

При доказательстве соотношений вида $P(x) \leqslant P(y)$ удобно представлять y в виде дизъюнкции x и некоторого несовместимого с ним события z, после чего воспользоваться аддитивностью и положительностью вероятности (аксиомы 1) и 3)).

---

*) Здесь имеется в виду обычная сумма (не по модулю 2).

10.2. Аксиома 1) очевидна; аксиома 2) следует из того, что $a\cdot 1=a$; аксиома 3) — из того, что если $xy=0$, то $ax\cdot ay=0$.

10.3. Воспользоваться формулой

$$P(xy)=P(x)\,P_x(y),$$

непосредственно следующей из определения условной вероятности.

10.4. а) $x=a_1x\vee a_2x\vee\ldots\vee a_nx$, причем события a_ix несовместимы.

б) Воспользоваться определением условных вероятностей и пунктом а).

10.5. $x=x\bar{y}\vee xy$.

10.6. Достаточно проверить, что если на некоторых элементах вероятность равна 0 или 1, то она однозначно определена и принимает одно из этих значений на всех элементах, полученных из исходных при помощи основных операций булевой алгебры, причем это значение согласуется с истинностной таблицей. Из последнего замечания следует непротиворечивость задания вероятности указанным в задаче способом при любых $p_i=0$, 1.

10.7. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}(a_1, a_2, a_3)$, порожденную событиями a_1, a_2, a_3, вероятности которых p_i равны $\frac{1}{2}$. Зададим числа $p_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$ следующим образом:

$$p_{111}=p_{100}=p_{010}=p_{001}=\frac{1}{4},\ p_{000}=p_{011}=p_{101}=p_{110}=0.$$

Показать, что события a_1, a_2, a_3 зависимы, хотя и попарно независимы.

10.8. Исходя из независимости $a_1, a_2, \ldots, a_n$, вычислить вероятности $p_{\sigma_1\ldots\sigma_n}$.

10.9. Представить данные события в виде дизъюнкции элементарных.

10.10. Ввести систему элементарных событий: пары выпавших чисел (i, j) $(1\leqslant i,\ \ j\leqslant 6)$. Ответ. $P(a)=\frac{1}{6}$; $P(b)=\frac{1}{2}$; $P(c)=\frac{23}{36}$.

10.11. На первый взгляд может показаться, что обратная сторона с равной вероятностью может быть окрашена как в тот же цвет, который мы видим, так и в противоположный цвет. На самом деле это не так. Введите систему элементарных событий и вычислите соответствующие условные вероятности.

10.12. Можно занумеровать буквы в слове «алгебра» (буква «а» при этом будет занумерована дважды) цифрами 1, 2, . . ., 7 и в качестве элементарных событий взять упорядоченные тройки цифр, среди которых нет совпадающих (номера выбранных букв). Можно также вычислять условные вероятности того, что следующая буква будет та, которая нужна, при условии, что предыдущие буквы уже правильно выбраны. При этом удобно для каждой условной вероятности подбирать подходящую систему элементарных событий.

10.16. $M\xi=\frac{7}{2}$.

10.17. $M\xi=1$; $M\eta=7$. Удобно воспользоваться формулой для математического ожидания суммы случайных величин (особенно при вычислении $M\eta$).

10.18. Ввести систему элементарных событий. Воспользоваться формулой для математического ожидания суммы случайных величин. Ответ. $M\xi=1$.

10.19. В сумме для $M(\xi^2)$ отбросить члены, соответствующие событиям, на которых значение $|\xi|$ больше ε.

10.21. Воспользоваться формулой

$$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta+2M((\xi-M\xi)(\eta-M\eta)),$$

а также тем, что при вычитании произвольных констант из независимых случайных величин вновь получаются независимые величины.

10.23. 1. Если ξ — случайная величина из задачи 10.16, то $D\xi=2\frac{11}{12}$.

2. Для величин из задачи 10.17 $D\xi=\frac{1}{2}$; $D\eta=5\frac{5}{6}$. Воспользоваться формулой для дисперсии суммы независимых случайных величин.

3. Величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$, на которые разбивается случайная величина ξ при решении задачи 10.18, не являются независимыми. Однако при вычислении $D\xi$ все же удобно пользоваться представлением $\xi=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Вычислить $M(\xi^2)$. Имеем $D\xi=2$.

10.24. Представить ξ_n в виде $\xi_n=\xi^{(1)}+\ldots+\xi^{(n)}$, где $\xi^{(i)}=1$, если i-е испытание имеет положительный исход, и $\xi^{(i)}=0$ в противном случае. Ответ. $M\xi_n=np$; $D\xi_n=npq$.

10.25. Найти вероятность того, что в n испытаниях произошло m положительных исходов.

10.26. Рассмотреть

$$|\varphi(p)-B(\varphi;\ p)|\leqslant\sum_{m=0}^{n}\left|\varphi(p)-\varphi\left(\frac{m}{n}\right)\right|C_n^m\,p^m(1-p)^{n-m}.$$

Разбить последнюю сумму на две части: $\sum\limits_{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\delta}$ и $\sum\limits_{\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant\delta}$.

Выбрать $\delta>0$ так, чтобы первая сумма была меньше ε (это возможно в силу равномерной непрерывности $\varphi(p)$). Затем выбрать N так, чтобы при $n>N$ и данном δ вторая сумма была меньше ε (при этом воспользоваться задачей 10.25).

10.27. В силу задачи 10.26 достаточно показать, что разность $|B_n(\varphi;\ p)-C_n(\varphi;\ p)|$ равномерно стремится к нулю. Эта разность мажорируется по модулю суммой

$$S_n(p)=\sum_{m=1}^{n-1}p^m(1-p)^{n-m}.$$

Членов с $m=0$ и $m=n$ не будет, поскольку $f(0)$ и $f(1)$ — целые числа. Достаточно показать, что эта сумма (заметим, что это сумма геометрической прогрессии) стремится равномерно к нулю при $n\to\infty$ на $[0, 1]$. В этом можно убедиться, находя максимум суммы $S_n(p)$ и вычисляя предел последовательности максимумов. Но проще показать, что $S_n(p)$ — монотонно убывающая последовательность непрерывных функций, сходящаяся к тождественному нулю (отсюда следует ее равномерная сходимость к нулю).

10.28. Показать, что полином (10.4) соответствует самодвойственной функции алгебры логики тогда и только тогда, когда

$$a_m=a_{n-m}.$$

Для построения приближающей последовательности рассмотреть полиномы

$$D_n(\varphi;\ p)=\sum a_m^{(n)} p^m (1-p)^{n-m},$$

где

$$a_m^{(n)}=\begin{cases}\left[\varphi\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m\right] & \text{при}\quad m<\frac{n}{2},\\ \left[\varphi\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m\right]+1 & \text{при}\quad m>\frac{n}{2},\\ \frac{1}{2} & \text{при}\quad m=\frac{n}{2}.\end{cases}$$

10.29. Доказывается индукцией по числу переменных. Предположим, что все переменные функции f существенны и что $h_f(p)$ не является ни константой, ни p. Разложим f по последней переменной:

$$f(x_1,\ \ldots,x_{n-1},x_n)=\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})\,x_n \vee \psi(x_1,\ \ldots,x_{n-1})\,\overline{x_n}.$$

Напомним, что $\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})=f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$, $\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})=$ $=f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$. Тогда ясно, что

$$h_f=h_\varphi p+h_\psi(1-p).$$

Поскольку φ и ψ — монотонные функции, то по предположению индукции для h_φ и h_ψ можно считать неравенство справедливым и нужно доказать его для h_f. Расписывая неравенство для h_f, используя неравенства для h_φ и h_ψ и сокращая на общий множитель, можно прийти к неравенству, справедливость которого легко устанавливается непосредственно.

10.30. Воспользоваться индуктивной процедурой, примененной при решении предыдущей задачи.

10.31. В точке пересечения с прямой $h(p)=p$ производная $h_f'(p)>1$. В двух соседних точках пересечения p_1 и p_2 не могут одновременно выполняться неравенства $h_f'(p_1)>1$ и $h_f'(p_2)>1$.

10.32. Напомним, что ε_i — верхние границы вероятностей ошибок элементов; поэтому, в частности, для всякой функции должна существовать сколь угодно надежная реализация также и при условии, что элементы схемы не ошибаются.

10.33. Выразить вероятность ошибки схемы через ε и вероятность δ ошибки схемы при отсутствии ошибки в выходном элементе.

10.34. Пусть имеется три экземпляра схем, реализующих некоторую функцию с вероятностями ошибки ε. Соединим их выходы с входами смесителя m. Тогда мы получим схему, реализующую ту же функцию, но более надежно.

10.35. Воспользоваться задачами 10.29 и 10.31.

10.36. Для h-полноты конечной системы функциональных элементов $\Phi=\{f_1,\ldots,f_k\}$, содержащей абсолютно надежные константы, необходимо и достаточно, чтобы

1) система реализуемых этими элементами функций была полна;

2) среди абсолютно надежных элементов, входящих в Φ, были элементы, реализующие

а) нелинейную функцию ($\varphi_1 \notin \mathbf{L}$),

б) функцию $\varphi_2 \notin \mathbf{D}^{01}$,

в) функцию $\varphi_3 \notin \mathbf{K}^{01}$.

Для доказательства достаточности показать, что из $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и констант можно получить смеситель $m(x, y, z)$, после чего можно воспользоваться задачей 10.34.

Необходимость условия 1) уже доказана (задача 10.32). Для доказательства необходимости остальных условий рассмотреть функцию, которую нельзя реализовать схемой из абсолютно надежных элементов, и достаточно надежную схему S, ее реализующую. Выделить в S максимальную подсхему P, содержащую выходной элемент и состоящую из абсолютно надежных элементов — н а д е ж н у ю в ы х о д н у ю п о д с х е м у. Показать, что если P реализует линейную функцию, то вся схема S не может достаточно надежно реализовать нелинейную функцию. При этом учесть, что вероятность ошибки S не может быть меньше вероятности того, что на одном из входов P возникает ошибка, а на других ее нет. Аналогично рассматриваются два других случая.

10.37. а) Решение можно получить по аналогии с решением задачи 7.26, используя результат задачи 7.23.

б) Использовать а).

10.38. $\mathbf{S}_{01}$-предполными являются классы: $\mathbf{L}_{01}$— класс линейных функций, сохраняющих **0** и **1**; **MS** — класс монотонных самодвойственных функций. Включение $\mathbf{MS} \subset \mathbf{S}_{01}$, следует из того, что функции из **MS** монотонны и не являются константами, а потому (задача 5.3) они содержатся в $\mathbf{P}_{01}$; включение $\mathbf{L}_{01} \subset \mathbf{S}_{01}$ по существу отмечалось в указаниях к задаче 6.14 (см. также задачу 4.6). Использовать решение задачи 7.27.

10.40. Удобно отдельно рассмотреть случаи, когда среди функций из Φ имеется несамодвойственная и когда все они самодвойственны. В первом случае воспользоваться замечанием к решению задачи 7.15, во втором — задачами 10.38 и 10.39.

10.42. Воспользоваться следующим из неравенства Чебышева предельным соотношением (10.3).

10.43. В силу задачи 10.41 либо система R универсально надежна, либо она содержится в одном из классов $\mathbf{F}^{(3)}$ или $\mathbf{G}^{(3)}$. Пусть $R \subset \mathbf{F}^{(3)}$. Тогда она порождает один из классов $\mathbf{F}^{(\mu)}$, $\mathbf{F}_0^{(\mu)}$, $\mathbf{MF}_0^{(\mu)}$, отличный от $\mathbf{F}^{(3)}$; $\mu \leqslant \mu_1$ (в силу условия 3β), так как $R_1 = R$). В частности, можно получить все функции из $\mathbf{MF}_0^{(\mu_1)}$. В классе $\mathbf{MF}_0^{(\mu_1)}$ содержатся, в частности, функции $S_{\mu_1 k+1}^{k+1}$.

В двойственном случае ($R \subset \mathbf{G}^{(3)}$) нужно рассмотреть функции $S_{\mu_1 k+1}^{\mu_1 k-k+2}$ (двойственные $S_{\mu_1 k+1}^{k+1}$).

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 10

10.1. а) $P(x \vee \bar{x}) = P(x) + P(\bar{x}) = 1$.

б) $P(x) = 1 - P(\bar{x}) \leqslant 1$, так как $P(\bar{x}) \geqslant 0$.

в) $P(0) = P(\bar{1}) = 1 - P(1) = 0$.

г) Имеем $x \longrightarrow y = \bar{x} \vee y$. Итак, $\bar{x} \vee y = 1$. Тогда $x = x(\bar{x} \vee y) = x\bar{x} \vee xy = xy$; $y = y(x \vee \bar{x}) = xy \vee y\bar{x} = x \vee \bar{x}y$ (можно также составить таблицы истинности).

События x и $\bar{x}y$ несовместимы, т. е. $P(y) = P(x) + P(\bar{x}y)$, а значит (аксиома 1)), $P(y) \geqslant P(x)$.

д) $x \vee y = x \vee \bar{x}y$ (см. 2.22)), т. е. $P(x \vee y) = P(x) + P(\bar{x}y)$ (x и $\bar{x}y$ несовместимы). Далее, $\bar{x}y \longrightarrow y = 1$, т. е. в силу г) $P(y) \geqslant P(\bar{x}y)$; значит, $P(x) + P(y) \geqslant P(x \vee y)$.

е) Найдем $P(\bar{x}y)$. Имеем $\bar{x}y \vee xy = y$, причем $\bar{x}y$ и xy несовместимы, т. е. $P(\bar{x}y) + P(xy) = P(y)$. Получаем $P(\bar{x}y) = P(y) - P(xy)$ и $P(x \vee y) = P(x) + P(\bar{x}y) = P(x) + P(y) - P(xy)$.

и) $P(x) = P(xy \vee x\bar{y}) = P(xy) + P(x\bar{y})$; $P(x) \geqslant P(xy)$.

к) $P(xy) = P(x) + P(y) - P(x \vee y)$, откуда в силу б) $P(xy) \geqslant \geqslant P(x) + P(y) - 1$.

Если $P(x \vee y) = 1$, в частности, если $x \vee y = 1$, то имеет место случай равенства: $P(xy) = P(x) + P(y) - 1$.

10.3. $P_y(x) = \dfrac{P(x)\,P_x(y)}{P(y)}$.

10.4. а) $P(x) = P(a_1x) + P(a_2x) + \ldots + P(a_nx) = P(a_1)\,P_{a_1}(x) + + P(a_2)\,P_{a_2}(x) + \ldots + P(a_n)\,P_{a_n}(x)$.

б) $P_x(a_i) = \dfrac{P(xa_i)}{P(x)} = \dfrac{P_{a_i}(x)\,P(a_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(a_j)\,P_{a_j}(x)}$.

Мы воспользовались формулой для $P(x)$ из а) этой задачи.

10.5. $P(x\bar{y}) = P(x) - P(xy) = P(x) - P(x)\,P(y) = P(x)\,(1 - P(y)) = = P(x)\,P(\bar{y})$.

10.6. Сформулированное в указаниях утверждение для отрицания очевидно (формула а) задачи 10.1). Кроме этого достаточно проверить конъюнкцию. Пусть $P(x)$ и $P(y)$ равны 0 или 1; вычислим $P(xy)$. Если $P(x)$ или $P(y)$ равняется 0, то согласно и) задачи 10.1 $P(xy) \leqslant 0 \Rightarrow P(xy) = 0$. Остается случай $P(x) = P(y) = 1$; но тогда в силу к) той же задачи $P(xy) \geqslant \geqslant P(x) + P(y) - 1 = 1$, т. е. $P(xy) = 1$.

Таким образом, значение $P(xy)$ определено однозначно, причем оно соответствует истинностной таблице для конъюнкции. Значит, $P(f(a_1, \ldots, a_n)) = f(p_1, \ldots, p_n)$, откуда следует, что $p_i = 0, 1$ можно задавать произвольно.

Замечание. Из проведенного рассуждения следует, что события x и y, для которых P равно 0 или 1, независимы.

10.7. Прежде всего заметим, что

$$P(a_1a_2a_3) = p_{111} = \frac{1}{4} \neq P(a_1)\,P(a_2)\,P(a_3) = \frac{1}{8}.$$

События a_1, a_2, a_3 попарно независимы, так как

$$P(a_1a_2) = P(a_1a_3) = P(a_2a_3) = p_{111} = \frac{1}{4}.$$

10.8. Имеем:

$$p_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} = P\left(a_1^{\sigma_1} \ldots a_n^{\sigma_n}\right) = p_1^{\sigma_1}\left(1 - p_1\right)^{1-\sigma_1} p_2^{\sigma_2}\left(1 - p_2\right)^{1-\sigma_2} \ldots \ldots p_n^{\sigma_n}\,(1 - p_n)^{1-\sigma_n}.$$

Здесь мы исходили из того, что

$$p_i^{\sigma_i}\,(1 - p_i)^{1-\sigma_i} = \begin{cases} p_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ 1 - p_i, & \text{если } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Мы воспользовались задачей 10.5.

10.9. $a = e_2 \vee e_4 \vee e_6$, $P(a) = \dfrac{1}{2}$; $b = \bar{a}$, $P(b) = \dfrac{1}{2}$; $c = e_3 \vee e_6$, $P(c) = \dfrac{1}{3}$; $d = e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4$, $P(d) = \dfrac{2}{3}$.

События a и b несовместимы, а поскольку их вероятности отличны от нуля, они зависимы.

Событие ac состоит в том, что выпало число, делящееся на 6, т. е. в данном случае $ac = e_6$; $P(ac) = \frac{1}{6} = P(a)P(c)$. Итак, эти события независимы.

В силу задачи 10.5 тогда b и c также независимы (это легко проверить непосредственно).

События a и d, а значит, также b и d независимы.

События c и d зависимы $\left(P(cd) = \frac{1}{6} \neq \frac{2}{9} = P(c)P(d)\right)$.

Из сказанного следует, что никакие три из указанных событий не являются независимыми.

10.10. Итак, элементарными событиями будем считать события e_{ij}, состоящие в том, что на первой кости выпало число i, на второй — число j; $1 \leqslant i, j \leqslant 6$. Всего получается 36 элементарных событий. Если кости кидаются независимо, то естественно считать все комбинации чисел (i, j) равновероятными: $P(e_{ij}) = \frac{1}{36}$. Этот очевидный факт можно получить формально, вспоминая, что вероятность выпадения некоторого числа на одной кости равна $\frac{1}{6}$, и вычисляя вероятность e_{ij} как конъюнкцию двух независимых событий с вероятностями $\frac{1}{6}$. Теперь в каждом случае остается сосчитать число пар e_{ij}, обладающих указанным свойством.

10.7′. Пусть каждому номеру грани, оказавшейся основанием, отвечает элементарное событие e_1, e_2, e_3, e_4; $P(e_i) = \frac{1}{4}$. Имеем

$$a_1 = e_1 \vee e_4, \quad a_2 = e_2 \vee e_4, \quad a_3 = e_3 \vee e_4; \quad P(a_i) = \frac{1}{2}.$$

Далее, $a_1a_2a_3 = e_4$; $P(a_1a_2a_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$; $a_1a_2 = a_1a_3 = a_2a_3 = e_4$, т. е. $P(a_1a_2) = P(a_1a_3) = P(a_2a_3) = P(e_4) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Нетрудно убедиться, что этот пример ничем не отличается от примера задачи 10.7.

10.11. Занумеруем стороны кружков цифрами от 1 до 6. Слова о предварительном перемешивании равносильны предположению о равновероятности всех возможных исходов, т. е. с вероятностью $\frac{1}{6}$ нам покажут сторону кружка, на которой стоит номер i. Эти события будем считать элементарными: $e_1, \ldots, e_6$. Пусть a — событие, состоящее в том, что нам показывают сторону, окрашенную в красный цвет; события b и c состоят в том, что обратные стороны окрашены соответственно в красный и синий цвета. Тогда $P_a(b) = \frac{2}{3}$, $P_a(c) = \frac{1}{3}$. Таким образом, более вероятно, что обратная сторона окрашена в тот же цвет. Исходя из этого при угадывании цвета обратной стороны, естественно называть тот же цвет, что мы видим. При этом мы должны в среднем в 2/3 случаях угадывать, если считать, что все элементарные события e_i

действительно происходят одинаково часто. Впрочем, пока у нас нет оснований утверждать это, исходя из уже полученных результатов, да мы и не можем пока придать точный смысл словам «в среднем». В данном случае в пользу сделанного предположения свидетельствуют чисто комбинаторные соображения. Советуем читателю провести эксперимент.

10.12. Первый способ. Троек несовпадающих цифр от 1 до 7 будет $7\cdot 6\cdot 5$. Все наборы естественно считать равновероятными. Слову «бег» отвечает единственный набор (5, 4, 3), т. е. его вероятность равна $\frac{1}{7\cdot 6\cdot 5}$; слову «бал» — два набора (5, 1, 2) и (5, 7, 2), т. е. его вероятность равна $\frac{1}{7\cdot 3\cdot 5}$.

Второй способ. Пусть событие a состоит в том, что первой выбрана буква «б», событие b — в том, что вторая буква — «е» и c — в том, что третья буква — «г». Нас интересует $P(abc)=P(ab)P_{ab}(c)=$ $=P(a)P_a(b)P_{ab}(c)$. Ясно, что $P(a)=\frac{1}{7}$ (элементарное событие — выбор какой-то определенной буквы; всем буквам, кроме «а», отвечают вероятности $\frac{1}{7}$; «а» — вероятность $\frac{2}{7}$).

Аналогично для вычисления $P_a(b)$ за элементарные примем события, состоящие в выборе какой-то определенной буквы, из числа которых удалена буква «б». При этом $P_a(b)=\frac{1}{6}$. Наконец, если удалены буквы «б» и «е», вероятность выбора «г» равна $P_{ab}(c)=\frac{1}{5}$. Итак, $P(abc)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}$.

При рассмотрении слова «бал» рассуждения проводятся аналогично, лишь $P_a(b)=\frac{1}{3}$, так как на втором шаге выбирается буква «а». В результате в этом случае $P(abc)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$.

Второй способ решения может показаться более громоздким, но мы привели его здесь, чтобы на простейшем примере показать способ выбора множества элементарных событий при вычислении условных вероятностей.

10.13. В сумме для $M\xi$ соберем для каждого i все члены, соответствующие таким j, что $\tilde{a}_j \longrightarrow a_i=1$. Для них $\tilde{\xi}(\tilde{a}_j)=\xi(a_i)$. Вынося $\xi(a_i)$, получаем сумму $P(\tilde{a}_j)$, которая равна $P(a_i)$, так как событие a_i равно дизъюнкции $\tilde{a}_j$, а $\tilde{a}_j$ несовместимы.

10.14. Вычислим (в силу задачи 10.13) $M\xi$ и $M\eta$ для системы событий $\{a_ib_j\}$. Складывая, получаем $M(\xi+\eta)$ для этой же системы событий.

10.15. Математическое ожидание для константы можно вычислять, исходя из любой полной системы несовместимых событий.

10.17. Элементарные события отвечают парам (i, j) $(1\leqslant i, j\leqslant 6)$.

1. Случайная величина ξ принимает три значения: 0, если i и j нечетны; 2, если i и j четны; 1, если одно из чисел i, j четно, а другое нечетно. Легко проверить, что первая возможность имеет место для 9 элементарных событий, вторая — для 18, третья — для 9. Поэтому ξ

принимает значение 0 с вероятностью $\frac{1}{4}$, 1 — с вероятностью $\frac{1}{2}$, 2 с вероятностью $\frac{1}{4}$. Отсюда $M\xi = 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1$.

Можно поступить иначе. Заметим, что $\xi=\xi_1+\xi_2$, где ξ_1 — случайная величина, равная 1, если на первой кости выпало четное число, и 0 в остальных случаях; ξ_2 аналогичным образом связано со второй костью. Очевидно, $M\xi=M\xi_1+M\xi_2=1$.

2. Случайная величина η принимает значения от 2 до 12. Можно было бы для каждого значения η найти число элементарных событий, на которых это значение принимается. Однако проще заметить, что $\eta=\eta_1+\eta_2$, где случайная величина η_1 равна числу, выпавшему на первой кости, η_2 — числу, выпавшему на второй кости. В силу задачи 10.16 $M\eta_1=M\eta_2=\frac{7}{2}$, а значит, $M\eta=M\eta_1+M\eta_2=7$.

10.18. Систему элементарных событий E можно интерпретировать как совокупность перестановок $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ набора чисел $(1, \ldots, n)$ (α_i — номер жетона, находящегося в i-й ячейке). Вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{n!}$. Найти число элементарных событий, для которых ξ принимает фиксированное значение, в данном случае не просто. Вместо этого, как мы уже делали ранее, представим ξ в виде $\xi_1+\ldots+\xi_n$, где ξ_i — случайная величина, равная 1, если в i-й ячейке находится жетон с i-м номером, и 0 в противном случае. Ясно, что ξ_i равна 1 на $\frac{1}{n}$-й части всех элементарных событий, т. е. $M\xi_i=\frac{1}{n}$. Тогда $M\xi=1$

10.19. Имеем:

$$M(\xi^2)=\sum P(a_i)\,\xi^2(a_i)\geqslant \sum_{|\xi(a_i)|\geqslant\delta} P(a_i)\,\xi^2(a_i)\geqslant$$
$$\geqslant \delta^2 \sum_{|\xi(a_i)|\geqslant\delta} P(a_i)=\delta^2 P(|\xi|\geqslant\delta).$$

Мы оставили в сумме лишь слагаемые, связанные с a_i, для которых $|\xi(a_i)|\geqslant\delta$ (все слагаемые неотрицательны). Таким образом, $P(|\xi|\geqslant\delta)\leqslant\frac{M(\xi^2)}{\delta^2}$.

10.20.
$$M(\xi,\eta)=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant l}} \xi\eta(a_ib_j)\,P(a_ib_j)=$$
$$=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant l}} \xi(a_i)\,\eta(b_j)\,P(a_i)\,P(b_j)=$$
$$=\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \xi(a_i)\,P(a_i)\sum_{1\leqslant j\leqslant l}\eta(b_j)\,P(b_j)=M\xi\cdot M\eta.$$

Мы воспользовались независимостью событий a_i и b_j: $P(a_ib_j)=P(a_i)P(b_j)$.

10.21. Имеем $D(\xi+\eta)=M((\xi-M\xi)^2+(\eta-M\eta)^2+2(\xi-M\xi)(\eta-M\eta))=D\xi+D\eta+2M((\xi-M\xi)(\eta-M\eta))$. Мы воспользовались аддитивностью математического ожидания.

Поскольку при вычитании константы из случайной величины характеристическая система событий не меняется, после вычитания из

ξ и η констант $M\xi$ и $M\eta$ соответственно мы получим независимые случайные величины. Поэтому $M((\xi-M\xi)(\eta-M\eta))=0$ и $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$.

10.22. $D\xi=M((\xi-M\xi)^2)=M(\xi^2)-2M(M\xi\cdot\xi)+(M\xi)^2=M(\xi^2)-(M\xi)^2$.

10.23. 1. Пусть ξ — величина из задачи 10.16. Имеем:

$$M(\xi^2)=\frac{1^2+2^2+\ldots+6^2}{6}=\frac{91}{6};$$

$$(M\xi)^2=\frac{49}{4}; \quad D\xi=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}.$$

2. Пусть ξ — величина из задачи 10.17. Как и при решении этой задачи, представим ξ в виде $\xi_1+\xi_2$. Поскольку кости кидаются независимо, ξ_1 и ξ_2 независимы. Таким образом, $D\xi=D\xi_1+D\xi_2$. Замечая, что $\xi_1^2=\xi_1$, $\xi_2^2=\xi_2$, получаем $D\xi_1=M(\xi_1^2)-(M\xi_1)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$, $D\xi_2=\frac{1}{4}$. Итак, $D\xi=\frac{1}{2}$.

Аналогично вычисляется $D\eta$ (из той же задачи); $\eta=\eta_1+\eta_2$, где η_1 и η_2 независимы; $D\eta_1=D\eta_2=\frac{35}{12}$ (вычисляются, как в случае 1), т. е. $D\eta=\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}$.

3. Пусть, наконец, ξ — случайная величина из задачи 10.18. Имеем $\xi=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Величину ξ_i можно рассматривать как индикатор события, состоящего в том, что в i-й ячейке находится жетон с i-м номером. Имеем $M\xi_i=\frac{1}{n}$; $M(\xi_i\xi_j)=\frac{1}{n(n-1)}$ при $i\neq j$ (считается доля перестановок, для которых и в i-й и в j-й ячейках находятся жетоны с теми же номерами). Таким образом, величины ξ_i не являются независимыми.

Вычислим $M\xi^2=\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i)^2+2\sum_{i\neq j}M(\xi_i\xi_j)$. Учитывая, что $\xi_i^2=\xi_i$, получаем, что $M\xi^2=1+2C_n^2\cdot\frac{1}{n(n-1)}=2$.

10.24. Случайная величина $\xi^{(i)}$ (см. указания к этой задаче) является индикатором события a_i. Поскольку события a_i независимы, величины $\xi^{(i)}$ также независимы и $M\xi_n=\sum M\xi^{(i)}$; $D\xi_n=\sum D\xi^{(i)}$. Итак, нужно найти $M\xi^{(i)}$, $D\xi^{(i)}$. Имеем $M\xi^{(i)}=P(a_i)=p$; $D\xi^{(i)}=M(\xi^{(i)})^2-(M\xi^{(i)})^2$. Поскольку $(\xi^{(i)})^2=\xi^{(i)}$, то $D\xi^{(i)}=p-p^2=pq$. В результате $M\xi_n=np$, $D\xi_n=npq$.

10.25. Пусть событие b_m состоит в том, что имело место m положительных исходов. Тогда

$$P(b_m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$$

(событие b_m является дизъюнкцией C_n^m элементарных событий). Поэтому

$$P(|\zeta_n-p|\geqslant\delta)=\sum_{\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant\delta}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}.$$

Таким образом, неравеиство (10.2) в другой форме записывается так:

$$\sum_{\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant\delta} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}\leqslant\frac{1}{4n\delta}.$$

10.26. Нужно оценить $|\varphi(p)-B_n(\varphi;\ p)|$. Поскольку $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}=1$, имеем $\varphi(p)=\sum\limits_{m=0}^{n}\varphi(p)\, C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ и

$$|\varphi(p)-B_n(\varphi;\ p)|\leqslant\sum_{m=0}^{n}\left|\varphi(p)-\varphi\left(\frac{m}{n}\right)\right| C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Фиксируем некоторое $\delta>0$ и разобьем сумму на две части:

$$\sum_{\left|p-\frac{m}{n}\right|\geqslant\delta} \quad \text{и} \quad \sum_{\left|p-\frac{m}{n}\right|<\delta}.$$

Пусть $|\varphi(p)|\leqslant M$ ($\varphi(p)$ — непрерывная функция на $[0, 1]$, а потому она ограничена). Оценим первую из этих сумм, исходя из задачи 10.25; так как $\left|\varphi(p)-\varphi\left(\frac{m}{n}\right)\right|\leqslant 2M$, то

$$\sum_{\left|p-\frac{m}{n}\right|\geqslant\delta}\left|\varphi(p)-\varphi\left(\frac{m}{n}\right)\right| C_n^m p^m (1-p)^{n-m}\leqslant$$

$$\leqslant 2M\sum_{\left|p-\frac{m}{n}\right|\geqslant\delta} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}\leqslant\frac{M}{2n\delta}.$$

Далее, поскольку функция $\varphi(p)$ непрерывна, она равномерно непрерывна. Если нам дано произвольное $\varepsilon>0$, то выберем $\delta>0$ так, чтобы $|\varphi(p_1)-\varphi(p_2)|<\varepsilon$ при $|p_1-p_2|<\delta$. Тогда, в частности,

$$\left|\varphi(p)-\varphi\left(\frac{m}{n}\right)\right|<\varepsilon \text{ при } \left|p-\frac{m}{n}\right|<\delta,$$

и мы можем оценить вторую сумму:

$$\sum_{\left|p-\frac{m}{n}\right|<\delta}\left|\varphi(p)-\varphi\left(\frac{m}{n}\right)\right| C_n^m p^m (1-p)^{n-m}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{\left|p-\frac{m}{n}\right|<\delta} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}\leqslant\varepsilon.$$

Мы воспользовались тем, что $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}=1$, причем все слагаемые в этой сумме положительны. Итак, если δ выбрано указанным образом, то

$$|\varphi(p)-B_n(\varphi;\ p)|\leqslant\frac{M}{2n\delta}+\varepsilon.$$

Если теперь выбрать N так, чтобы $\frac{M}{2n\delta} < \varepsilon$ при $n > N$, то

$$|\varphi(p) - B_n(\varphi;\ p)| < 2\varepsilon.$$

Тем самым равномерная сходимость $B_n(\varphi;\ p)$ к $\varphi(p)$ доказана.

10.27. Итак, рассмотрим

$$S_n(p) = \sum_{m=1}^{n-1} p^m (1-p)^{n-m} = p(1-p)\frac{p^{n-1} - (1-p)^{n-1}}{2p-1}.$$

Мы воспользовались здесь формулой для суммы геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{p}{1-p}$ и первым членом $p(1-p)^{n-1}$. При $p = \frac{1}{2}$ нужно раскрыть неопределенность; имеем $S_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n-1}{2^n}$ (можно сосчитать непосредственно). Ясно, что $S_n(p) \longrightarrow 0$ для всякого $0 < p < 1$, так как $p < 1$, $1-p < 1$; при $p=0$ и 1 имеем $S_n(p)=0$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(p) = 0$. Покажем, что последовательность $S_n(p)$ монотонно убывает (точнее, не возрастает), т. е. $S_{n+1}(p) \leqslant S_n(p)$. Имеем:

$$S_{n+1}(p) = pS_n(p) + p(1-p)^n.$$

Неравенство $S_{n+1}(p) \leqslant S_n(p)$ равносильно неравенству

$$p(1-p)^n \leqslant (1-p)S_n(p) \text{ или } p(1-p)^{n-1} \leqslant S_n(p)$$

при $p \neq 1$. Последнее неравенство имеет место, поскольку $S_n(p)$ — сумма неотрицательных членов, один из которых равен $p(1-p)^{n-1}$. Заметим, что неравенство $S_{n+1}(p) \leqslant S_n(p)$ будет строгим всюду, кроме точек $p=0$ и 1. Итак, мы имеем монотонно невозрастающую последовательность непрерывных функций, сходящуюся на $[0, 1]$ к нулю. Отсюда следует равномерная сходимость последовательности.

Напомним доказательство этого факта. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $p_0 \in [0, 1]$ выберем такое $N(p_0)$, что $S_{N(p_0)}(p_0) < \frac{\varepsilon}{2}$; пользуясь непрерывностью $S_{N(p_0)}(p)$ в точке p_0, выберем интервал около p_0, в котором $S_{N(p_0)}(p) < \varepsilon$. Тогда в силу монотонности последовательности $S_n(p)$ в выбранном интервале будет $S_n(p) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N(p_0)$. Возникает покрытие $[0, 1]$ интервалами. Выберем из этого покрытия конечное и наибольший из номеров $N(p)$ по всем интервалам из конечного покрытия. Тогда $S_n(p) < \varepsilon$ при n, бо́льших этого номера.

З а м е ч а н и е 1. Делая замену переменных, нетрудно доказать аналогичные факты для любого отрезка $[a, b]$ (в аналоге задачи 10.27 условия на $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ будут более сложными).

З а м е ч а н и е 2. Можно было заменять коэффициенты $B_n(\varphi;\ p)$ не на $\left[\varphi\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m\right]$, а на другое, соседнее с $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m$ целое число: $\left[\varphi\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m\right]+1$; можно также заменять одни коэффициенты одним способом, а другие — другим.

З а м е ч а н и е 3. Условие целочисленности $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ существенно в приведенном доказательстве; вообще, полиномы с целочисленными коэффициентами целочисленны при $p=0$ и 1. Если не накладывать это ограничение, то очевидно, что $C_n(\varphi; p)$ равномерно приближают $\varphi(p)$ на любом отрезке, целиком лежащем внутри $[0, 1]$.

10.28. Условие, накладываемое на коэффициенты полиномов Бернштейна, соответствующих самодвойственным функциям, следует из того, что если в двоичном наборе имеется m единиц, то в противоположном наборе содержится $n-m$ единиц. Ясно, что если $a_m=a_{n-m}$ в полиноме $h_f(p)$, то $h_f(p)+h_f(1-p)=1$.

Далее, если $\varphi(p)$ удовлетворяет условию $\varphi(p)+\varphi(1-p)=1$, то в полиномах $D_n(\varphi; p)$, построенных способом, приведенным в указаниях, коэффициенты удовлетворяют условию $a_m^{(n)}=a_{n-m}^{(n)}$. Поэтому этим полиномам соответствуют самодвойственные функции алгебры логики. Из замечания 2 к решению задачи 10.27 следует, что последовательность $D_n(\varphi; p)$ равномерно сходится к $\varphi(p)$ при $n\to\infty$.

З а м е ч а н и е. Одному и тому же полиному $h(p)$ соответствует несколько функций алгебры логики: функции, для которых числа $c_m(f)$ (см. (10.1)) совпадают, дают одинаковые полиномы. Когда мы говорим, что некоторому полиному отвечает самодвойственная функция, это означает, что среди функций алгебры логики, соответствующих данному полиному, имеется самодвойственная.

10.29. Итак, имеем:

$$h_f=ph_\varphi+(1-p)\,h_\psi.$$

Положим $h_\varphi(p)=r(p)$, $h_\psi(p)=s(p)$. Нужно доказать, что

$$h_f'=r+r'p+s'(1-p)-s>\frac{h_f(1-h_f)}{p(1-p)}\qquad(0<p<1).$$

По предположению индукции

$$r'\geqslant\frac{r(1-r)}{p(1-p)},\quad s'\geqslant\frac{s(1-s)}{p(1-p)}.$$

Поскольку $p>0$ и $(1-p)>0$, то достаточно показать, что

$$r+\frac{r(1-r)}{1-p}+\frac{s(1-s)}{p}-s>\frac{h_f(1-h_f)}{p(1-p)}.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$(r-s)\,p\,(1-p)-r^2p-s^2(1-p)+rp+s(1-p)>h_f-(h_f)^2$$

или, поскольку $h_f=rp+s(1-p)$,

$$(r-s)\,p\,(1-p)-r^2p-s^2(1-p)+r^2p^2+s^2(1-p)^2+2rsp\,(1-p)>0.$$

Группируем члены, содержащие r^2 и s^2:

$$(r-s)\,p\,(1-p)-r^2p\,(1-p)-s^2(1-p)\,p+2rsp\,(1-p)>0.$$

Поскольку $p\neq0$, $1-p\neq0$, то можно сократить на $p(1-p)$:

$$r-s-r^2-s^2+2rs>0,\quad\text{или}\quad(r-s)(1-r+s)>0.$$

Поскольку f — монотонная функция и x_n — существенная переменная (по x_n ведется разложение), $r>s$ при $p\neq0$ или 1, так как коэффициенты в разложении (10.1) для полинома s не превосходят соответствующих коэффициентов для r ($\varphi\geqslant\psi$), причем в одном из случаев неравенство строгое (x_n — существенная переменная). Далее, так как $1-r\geqslant0$, имеем $1-r+s\geqslant0$. Если бы $1-r(p)+s(p)=0$, то в точке p мы имели бы

$r(p)=1, s(p)=0$. Но равенство нулю или единице в какой-то точке $p\neq 0$ полинома Бернштейна, связанного с функцией алгебры логики, приводит к тождественному равенству полинома этой константе, так как в этих случаях коэффициенты в (10.1) соответственно или все равны нулю, или являются максимально возможными. Таким образом, $r\equiv 1$, $s\equiv 0$, т. е. $h_f(p)\equiv p$, а этот случай мы исключили.

10.30. 1. Если $h_f(p)=\sum a_k p^k (1-p)^{n-k}\equiv 0$, то, так как $a_k\geqslant 0$, обязательно $a_k=0$ и $f=0$ (как мы уже отмечали, достаточно, чтобы $h_f(p)=0$ для какого-то p, $p\neq 0$, $p\neq 1$). Аналогично рассматривается случай $h_f\equiv 1$.

2. Пусть $h_f(p)=p$. Тогда $h'_f(p)=\dfrac{h_f(p)\,(1-h_f(p))}{p\,(1-p)}$ и, разлагая f по одной из переменных, имеем в обозначениях решения задачи 10.29: либо $r\equiv s$, либо $r\equiv 1$, $s\equiv 0$. В первом случае $f=\varphi=\psi$, а потому все сводится к меньшему числу переменных и доказательство можно проводить по индукции; во втором случае $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=x_n$.

10.31. Поскольку правая часть неравенства задачи 10.29 в точке пересечения p_1 равна 1 ($h_f(p_1)=p_1$), имеем $h'_f(p_1)>1$. Геометрически это означает, что слева от p_1 кривая $h_f(p)$ лежит ниже прямой $h(p)=p$, а справа—выше. В силу непрерывности $h_f(p)$ это условие не может одновременно выполняться в двух соседних точках пересечения.

10.32. Пусть F — произвольная функция; рассмотрим схему, реализующую ее с вероятностью ошибки $\gamma<1$. Поскольку ε_i— верхние границы вероятностей ошибок, то эта оценка должна иметь место также, если все элементы схемы будут работать абсолютно надежно. Это означает, что схема, составленная из этих абсолютно надежных элементов, должна реализовывать функцию F, так как в противном случае на каком-то наборе она ошибалась бы с вероятностью 1. Тем самым доказана полнота Φ.

10.33. Пусть δ — вероятность ошибки схемы при отсутствии ошибки в выходном элементе. Поскольку это событие и событие, состоящее в том, что произошла ошибка в выходном элементе, независимы, вероятность ошибки в схеме равна $\varepsilon(1-\delta)+$ $+\delta(1-\varepsilon)\geqslant\varepsilon$, так как $1-\varepsilon>\varepsilon\left(\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$.

Заметим, что если говорить о верхних границах вероятностей, то это утверждение становится еще более простым.

10.34. Итак, рассмотрим схему S, изображенную на рис. 90, где S_1, S_2, S_3— три экземпляра схемы, реализующей некоторую функцию F с вероятностями ошибки $\varepsilon<\frac{1}{2}$. Поскольку m сохраняет 0 и 1, эта схема S также реализует F. Ошибки в схемах S_i происходят независимо.

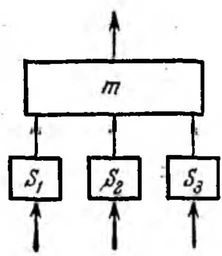


Рис. 90.

Ясно, что вероятность ошибки всей схемы S для тех наборов, на которых $F=0$, равняется $h_m(\varepsilon)$, где h_m— полином Бернштейна, соответствующий m. В силу самодвойственности $m(x, y, z)$ такова же будет и вероятность ошибки на наборах, на которых $F=1$.

Вычислим $h_m(\varepsilon)$:

$$h_m(\varepsilon)=\varepsilon^3+3\varepsilon^2(1-\varepsilon)=3\varepsilon^2-2\varepsilon^3.$$

График $h_m(\varepsilon)$ имеет вид, указанный на рис. 91. Имеем $h_m(\varepsilon)<\varepsilon$.

Далее можно изготовить три экземпляра схемы S и их выходы соединить с входами еще одного элемента m. Мы получим схему, реализующую F с вероятностью ошибки $h_m(h_m(\varepsilon))$. В силу сказанного ранее этот процесс позволяет реализовать F сколь угодно надежно. Таким способом можно получить сколь угодно надежные реализации для всех функций из системы Φ. Пусть теперь имеется схема S из элементов системы Φ, которая реализовала бы некоторую функцию G, если бы все элементы Φ были абсолютно надежны. Заменяя все элементы схемы S схемами, достаточно надежно реализующими те же функции, что и эти элементы, мы можем получить схему, сколь угодно надежно реализующую G. При этом достаточно иметь в виду, что вероятность ошибки схемы не превосходит суммы вероятностей ошибок составляющих ее элементов, т. е. вероятности того, что в каком-то элементе произошла ошибка (см. задачу 10.1, г)). Этот же факт сохранится, если элементы заменить схемами.

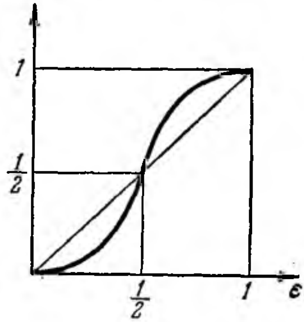


Рис. 91.

10.35. При решении задачи 10.34 мы пользовались лишь тем, что график $h_m(\varepsilon)$ имеет вид, изображенный на рис. 91. Но в силу задач 10.29 и 10.31 такой же вид имеет график полинома Бернштейна, связанного с любой монотонной самодвойственной функцией, не совпадающей ни с какой переменной.

10.36. Докажем сформулированную в указаниях теорему.

Достаточность. В силу задачи 7.9 (см. рис. 3) функции φ_1, φ_2 и φ_3 относительно расширенной суперпозиции могут породить или класс **P** всех функций алгебры логики, или класс **M** всех монотонных функций. И в том и в другом классах содержится функция $m(x, y, z)$, а тогда в силу условия 1 и задачи 10.34 мы имеем h-полную систему.

Необходимость. Необходимость условия 1 следует из задачи 10.32. Докажем необходимость остальных условий. Разобьем систему элементов Φ на две части: $R=\{f_1, \ldots, f_k\}$ — совокупность абсолютно надежных элементов ($\varepsilon_i=0$ для $f_i \in R$), $T=\{g_1, \ldots, g_m\}$ — совокупность остальных элементов ($\varepsilon_j>0$ для $g_j \in T$). Обозначим через $\varkappa$ наименьшую из границ ε_i вероятностей ошибок элементов из T: $\varkappa=\min\limits_{g_j \in T} \varepsilon_j$; $\varkappa > 0$, так как элементы из T не абсолютно надежны.

Пусть Φ—h-полная система, содержащая абсолютно надежные константы. Пусть, далее, F — функция, не представимая суперпозицией функций из R. Рассмотрим схему S из элементов Φ, реализующую F с вероятностью ошибки $\gamma<\varkappa$. Тогда в силу леммы фон Неймана (задача 10.33) выходной элемент в схеме S должен быть абсолютно надежен (иначе вероятность его ошибки, а значит, и всей схемы могли бы быть больше $\varkappa$ и тем более больше γ). Назовем надежной выходной подсхемой схемы S максимальную подсхему Q схемы S, содержащую выходной элемент и состоящую только из абсолютно надежных элементов (см., например, схему на рис. 92).

Схему Q естественно строить, начиная с выходного элемента схемы S, постепенным присоединением надежных элементов схемы S, выходы которых соединены с входами элементов, уже включенных в схему Q (аналогично решению задачи 8.3). Итак, схема Q состоит из элементов, входящих в R; она реализует некоторую функцию f из функционально замкнутого класса, порождаемого функциями, входящими в R. Входы подсхемы Q соединены с выходами ненадежных элементов или являются входами схемы S. Входы первого типа назовем внутренними, а входы второго типа — внешними. У схемы Q обязательно должны быть существенные внутренние входы, так как в противном случае функция F представлялась бы суперпозицией функций из R. В силу леммы

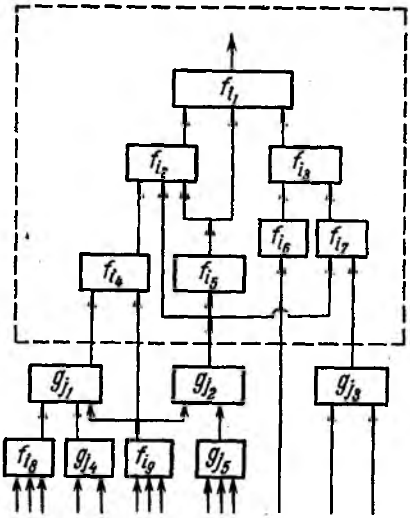


Рис. 92.

фон Неймана на внутренние входы подсхемы Q сигналы приходят с верхними границами вероятностей ошибок, не меньшими $\varkappa$ (эти границы могут оказаться большими $\frac{1}{2}$).

Предположим теперь, что условие 2 а) не выполняется. Тогда все функции из системы R линейны, а значит, линейна и функция f, реализуемая схемой Q. Оценим верхнюю границу γ вероятности ошибки всей схемы S. Поскольку линейная функция принимает на наборах, различающихся только в одном разряде, противоположные значения, γ не может быть меньше верхней границы вероятности того, что на одном существенном внутреннем входе произошла ошибка, а на других — нет. Эта граница не меньше $\varkappa$, так как можно предположить, что все элементы схемы S не ошибаются (за исключением элемента, непосредственно связанного с выделенным внутренним входом, а этот элемент ошибается с вероятностью $\varkappa$). Это предположение корректно, так как фиксированы лишь верхние границы вероятностей ошибок элементов и граница вероятности ошибки схемы оценивается по всевозможным наборам вероятностей ошибок входящих в нее элементов, не превосходящих заданных границ. Итак, $\gamma \geqslant \varkappa$, и мы пришли к противоречию.

Аналогично доказывается необходимость условий 2 б) и 2 в). Предположим, например, что функция f, реализуемая схемой Q, является дизъюнкцией (константой она не может быть, так как в этом случае вся схема S реализовала бы константу). Оценим вероятность ошибки S при условии, что на ее входы подан набор, на котором F равна 0. Этому набору соответствует нулевой набор для функции f. Если учесть, что при этом наборе ошибка на одном входе Q вызывает ошибку по всей схеме S, то получаем, что $\gamma \geqslant \varkappa$, чего не может быть. Двойственные рассуждения доказывают необходимость условия 2 в).

10.37. а) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$—функция из $\mathbf{S}_{01}$; $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$; $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Ясно, что $\varphi \in \mathbf{P}_1$, $\psi \in \mathbf{P}_0$ и функции φ, ψ двойственны. Пусть, далее, $n(x,y,z) = xy + yz + xz + y + z$. Тогда $n(1, u, v) = uv$, $n(u, 1, v) = \bar{u} \vee v = u \to v$, $n(0, u, v) = u \vee v$, $n(u, 0, v) = \overline{uv}$.

В силу задачи 7.23 функции uv и $u \to v$ образуют базис в $\mathbf{P}_1$. Представим φ суперпозицией этих функций. Заменим всюду в этой суперпозиции конъюнкции на $n(x_n, *, *)$, а импликации — на $n(*, x_n, *)$ (при этом следует учитывать, что импликация — не симметричная функция). Эта суперпозиция нам даст $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, так как при $x_n = 1$ она дает $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, а при $x_n = 0$ — двойственную функцию $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Таким образом, функция $n(x, y, z)$ является базисом.

б) Имеем $m(x, y, z) = x(y+z) + yz$; $m(x+y+z, y, z) = x(y+z) + y + z + yz = n(x, y, z)$.

10.38. Покажем, что система функций, содержащая функции $\varphi_1 \notin \mathbf{L}_{01}$, $\varphi_2 \notin \mathbf{MS}(\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{S}_{01})$, полна в $\mathbf{S}_{01}$.

При решении задачи 7.27 показано, что, отождествляя переменные у самодвойственной нелинейной функции, можно получить функцию вида

$$\psi(x, y, z) = xy + yz + xz + c(y+z) + d.$$

Поступая таким образом с функцией φ_1, мы получим функцию ψ_1, у которой $d=0$, так как она должна сохранять 0. Если $c=1$, то мы имеем функцию $n(x, y, z) = xy + yz + xz + y + z$, которая в силу задачи 10.37 порождает $\mathbf{S}_{01}$. Если же $c=0$, то мы имеем монотонную функцию $m(x, y, z) = xy + yz + xz$.

Рассмотрим теперь $\varphi_2 \notin \mathbf{MS}$. Если φ_2 нелинейна, то в силу только что сказанного из нее можно получить $n(x, y, z)$. Пусть φ_2— линейная функция. Поскольку φ_2 самодвойственна, она зависит от нечетного числа переменных; так как φ_2 сохраняет 0, то она имеет вид

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k+1},$$

где $k > 0$, так как φ_2 немонотонна. Отождествляя переменные, мы можем получить функцию $x+y+z$, которая вместе с $m(x, y, z)$ в силу задачи 10.37, б) образует $\mathbf{S}_{01}$-полную систему.

Поскольку ни один из классов $\mathbf{L}_{01}$, $\mathbf{MS}$ не содержится в другом и не совпадает с $\mathbf{S}_{01}$, они являются $\mathbf{S}_{01}$-предполными и других таких классов нет.

З а м е ч а н и е. Если имеется функция из $\mathbf{MS}$, отличная от x, то она является нелинейной, и из нее можно получить, как видно из решения задачи 10.38, функцию $xy+yz+xz$. Если показать, что $\{xy+yz+xz\}$ — базис в $\mathbf{MS}$ (см. задачу 7.29), то мы получим, что класс $\{x\}$, состоящий из одной функции x, является единственным $\mathbf{MS}$-предполным классом. Как легко видеть, этот же класс является единственным предполным в $\mathbf{L}_{01}$.

10.39. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — монотонная самодвойственная функция и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — некоторый набор, на котором $f(\alpha) = 0$. Тогда на двойственном наборе $\bar{\alpha}$ в силу самодвойственности f имеем $f(\bar{\alpha})=1$. Всякий набор β, не имеющий с α общих нулей, старше $\bar{\alpha}$; поэтому $f(\beta)=1$ и любые два набора, на которых f равна 0, должны иметь общий нуль. Аналогично проверяется двойственное свойство.

10.40. Пусть система функций Φ содержит функции $\varphi_1 \notin \mathbf{L}$, $\varphi_2 \notin \mathbf{D}^{01}$, $\varphi_3 \notin \mathbf{K}^{01}$, $\varphi_4 \notin \mathbf{G}^{(2)}$, $\varphi_5 \notin \mathbf{F}^{(2)}$. Если в системе Φ имеется к тому же несамодвойственная функция (см. задачу 7.16), то в силу задачи 7.15 эта система самодвойственно полна и, как следует из замечания к решению этой задачи, суперпозициями функций из Φ можно получить дизъюнкцию и конъюнкцию, а значит, и $m(x, y, z)=xy\vee yz\vee xz$. Если же все функции из Φ самодвойственны, то они должны в силу задач 7.27 и 10.38 порождать либо весь класс $\mathbf{S}$, либо класс $\mathbf{S}_{01}$, так как в Φ содержится нелинейная функция φ_1 и функция $\varphi_5 \notin \mathbf{F}^{(2)}$, а значит, в силу задачи 10.39 $\varphi_5 \notin \mathbf{MS}$. В обоих этих классах содержится смеситель. Напомним, что $m(x, y, z)$ образует универсальную надежную систему.

10.41. Из схемы функционально замкнутых классов видно, что всякий класс, который порождается указанной системой функций, обязательно содержит класс самодвойственных монотонных функций, в котором, в свою очередь, содержится смеситель.

10.42. В силу определения $h_f(p)$ и $f_k(x_1, \ldots, x_n)$ функция $h_{f_k}(p)$ равна вероятности того, что более k аргументов приняли значение 1 (они принимают значение 1 независимо с вероятностью p), т. е.— в обозначениях стр. 209 — вероятности того, что $\xi_n=m(\sigma)>k$, $n=\mu k+1$, или $\zeta_n=\frac{\xi_n}{n}>\frac{k}{\mu k+1}$:

$$h_{f_k}(p)=P(\xi_n>k)=P\left(\zeta_n>\frac{k}{\mu k+1}\right).$$

Для фиксированного $p>\frac{1}{\mu}$ возьмем такое $\delta>0$, что интервал $|\zeta-p|<\delta$ содержится в интервале $\left(\frac{1}{\mu}, 1\right)$. Тогда

$$h_{f_k}(p)\geqslant P(|\zeta_n-p|<\delta)\to 1 \text{ при } k\to\infty.$$

Аналогично при $p<\frac{1}{\mu}$ можно подобрать $\delta>0$ так, чтобы $|\zeta-p|\leqslant\delta$ содержался в $\left(0, \frac{1}{\mu}\right)$. Тогда при достаточно большом k будет $(p-\delta,\ p+\delta)\subset\left(0, \frac{k}{\mu k+1}\right)$ и

$$h_{f_k}(p)\leqslant 1-P(|\zeta_n-p|<\delta)\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Заметим, что предел не является равномерным (например, предельная функция является разрывной, хотя $h_{f_k}(p)$ — непрерывные функции).

10.43. Используя $S_{\mu k+1}^{k+1}$ при достаточно больших k для всех функций, которые реализуются функциональными элементами с вероятностями ошибок, меньшими $\frac{1}{\mu}$, можно построить схемы, реализующие их сколь угодно надежно. В частности, при помощи элементов из $R=R_1$ можно сколь угодно надежно реализовать функции из T_1 (система T_1 не пуста, условие 3α)). В дальнейшем можно пользоваться схемами для функций из T_1 наряду с абсолютно надежными элементами. Далее доказательство удобно вести по индукции. Допустим, что для каждой из функций $R_i=R\bigcup T_{i-1}$ можно построить сколь угодно надежную реализацию Тогда, применяя к R_i и T_i те же рассуждения, что и примененные выше к R и T_1 (с той лишь разницей, что для функций из R существуют не абсолютно надежные элементы, а сколь угодно надежные схемы, их реализующие), мы получим сколь угодно надежные реализации для функций из T_i. Из того, что $\varkappa_{i-1}<\frac{1}{\mu_i}$, следует, что множество $T_i\setminus T_{i-1}$ не пусто. Поскольку $R\bigcup T_t$ — полная система функций, мы в конечном счете получим сколь угодно надежные реализации для функций из полной системы, а значит, и для всех функций алгебры логики (опять-таки ср. задачу 10.36); достаточно воспользоваться тем, что вероятность ошибки схемы не больше суммы вероятностей ошибок входящих в нее элементов).

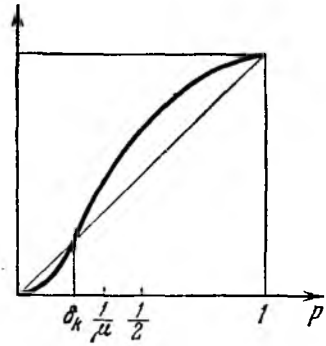


Рис. 93.

Замечание. Можно показать, что график $h_{f_k}(p)$ имеет вид, указанный на рис. 93. Исходя из этого, если вероятность ошибки элемента $p<\delta_k$, можно, используя f_k, аналогично смесителю, строить все более надежные схемы, реализующие ту же функцию. Можно показать также, что $\delta_k\to\frac{1}{\mu}$ при $k\to\infty$; поэтому при достаточно большом k можно построить сколь угодно надежную схему для любой функции, которую можно реализовать с вероятностью ошибки, меньшей $\frac{1}{\mu}$. Однако мы вместо этого итеративного процесса применяли схемы для f_k при больших k.

§ 11. МНОГОЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ

Рассмотренная в предыдущих параграфах двузначная логика допускает обобщение на k-значный случай. По аналогии с определением 2.1 дадим

Определение 11.1. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *функцией k-значной логики*, если ее аргументы определены на множестве $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, состоящем из k элементов, и сама функция принимает значения из того же множества.

Множество всех функций k-значной логики обозначим через $\mathbf{P}^k$. Случай $k>2$ оказывается существенно более сложным, чем рассмотренный нами случай $k=2$; общий случай во многом не похож на этот частный случай. Мы коснемся здесь немногих вопросов, в которых в основном можно проследить аналогию с двузначной логикой, и лишь отметим некоторые из имеющихся отличий *).

11.1. Найти число функций k-значной логики, зависящих от n переменных. ▲

Попытаемся обобщить совершенную дизъюнктивную нормальную форму на k-значный случай. Это можно сделать не вполне единственным образом. Мы советуем читателю перед тем, как читать следующее далее описание одного из возможных путей, самому подумать над этим вопросом.

Напомним, что СДНФ для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ при $k=2$ имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee f(\delta_1, \ldots, \delta_n) \,\&\, x_1^{\delta_1} \,\&\ldots\&\, x_n^{\delta_n},$$

где дизъюнкция берется по всем двоичным наборам (мы рассматривали и другую форму СДНФ, в которой дизъюнк-

*) Более подробные сведения можно найти в статье [1], которой мы в основном следуем.

ция бралась лишь по наборам, на которых $f(\delta)=1$, но она не удобна для обобщения).

Существенную роль в СДНФ играют элементарные конъюнкции $x_1^{\delta_1}\&\ldots\&x_n^{\delta_n}$, которые отличны от нуля лишь на одном наборе $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. При этом все они получаются из конъюнкции, отвечающей единичному набору, подстановкой функций от одной переменной x^δ.

Аналогом единичного набора в общем случае для нас будет набор $(k-1, k-1, \ldots, k-1)$. Положим

$$x^\delta=\begin{cases} k-1, & \text{если } x=\delta; \\ 0, & \text{если } x\neq\delta. \end{cases}$$

Получаем k функций от одной переменной, соответствующих $\delta=0, 1, \ldots, k-1$. Назовем *конъюнкцией k-значной логики* функцию

$$x_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_k=\min(x_1, \ldots, x_k)\,^*).$$

Ясно, что тогда элементарная конъюнкция

$$x_1^{\delta_1}\& \ldots \& x_k^{\delta k}$$

будет обладать требуемым свойством (она отлична от нуля лишь на наборе $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ и равна $k-1$ на этом наборе).

Полагая аналогично

$$x_1\vee \ldots \vee x_n=\max(x_1, \ldots, x_n),$$

мы можем построить аналог СДНФ в k-значной логике.

11.2. Доказать, что всякая функция k-значной логики единственным образом представляется в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\bigvee a_\delta\& x_1^{\delta_1}\& \ldots \& x_n^{\delta_n},$$

где дизъюнкция берется по всем k-значным наборам $\delta=(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ длины n. При этом коэффициенты обязательно имеют вид

$$a_\delta=f(\delta_1, \ldots, \delta_n). \blacktriangle$$

По аналогии с двузначной логикой будем называть полученное представление СДНФ.

---

*) Вводимые ниже операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (указание к задаче 11.4) превращают множество $\{1, \ldots, k-1\}$ в булеву алгебру (см. пример 2 и задачу 2.14 из § 2). Она нерегулярна (задача 2.19).

11.3. С какой полной системой функций k-значной логики связано представление функций в виде СДНФ *). ▲

Из задачи 11.3 следует, в частности, что совокупность всех функций от двух переменных является полной системой. Ясно, что совокупность всех функций от одной переменной не является полной системой (они образуют функционально замкнутый класс).

11.4. Показать, что система функций, состоящая из всех функций от одной переменной и функции $x \vee y$, является полной. ▲

В задаче 11.4 можно брать не все функции от одной переменной; например, достаточно функций x^{δ} ($\delta=0, 1, \ldots, k-1$), $\bar{x}$ и констаит. Рассмотрим другой пример. Пусть

$$e_{ij}(x) = \begin{cases} j & \text{при } x = i, \\ 0 & \text{при } x \neq i. \end{cases}$$

Тогда $e_{i,\,k-1}(x) = x^{i}$.

11.5. Показать, что система функций, состоящая из всех функций $e_{ij}(x)$ и функции $x \vee y$, является полной. ▲

Оказывается, что здесь можио даже ограничиться одной функцией от одной переменной $x+1$ (сложение всюду проводится по модулю k).

11.6. Показать, что система функций $\{x \vee y, x+1\}$ полна (и даже является базисом). ▲

Исходя из задачи 11.6, легко построить аналог функции Шеффера для k-значной логики (*функцию Шеффера — Вебба*):

$$x \vee y + 1.$$

11.7. Доказать, что система, состоящая из одной функции $x \vee y + 1$, является полной. ▲

В k-значной логике можно также рассмотреть вопрос о представимости функций полиномами **) (аналог полино-

---

*) Мы не приводим здесь определенний суперпозиции, полиой системы и базиса в k-значной логике, так как они не отличаются от соответствующих определений при $k=2$.

**) Имеет смысл рассматривать лишь полиномы с целочисленными коэффицнеитами.

мов Жегалкина). При этом оказывается, что такое представление возможно лишь для простых k.

11.8. Показать, что всякую функцию k-значной логики можно представить полиномом по модулю k, если k — простое число.

11.9. Показать, что в k-значной логике для составного k имеются функции, не представимые полиномами по модулю k. ▲

Посмотрим, к какому виду можно привести полином, представляющий функцию k-значной логики (k — простое число). Во-первых, ясно, что можно считать коэффициенты заключенными между 0 и $k-1$ (они являются целыми числами); во-вторых, в силу известной из теории сравнений малой теоремы Ферма [2]

$$x^k \equiv x \pmod k;$$

поэтому можно сказать, что все переменные входят в степенях, не превосходящих $k-1$.

11.10. Показать, что представление функций k-значной логики (k — простое число) в виде полиномов, обладающих двумя перечисленными свойствами, единственно. ▲

11.11. С какой полной системой связано представление функций полиномами в k-значной логике (k — простое число)? ▲

Мы дадим ниже обзор результатов о предполных классах в k-значной логике, а пока докажем существование конечного числа предполных классов и укажем алгоритм построения конечного числа классов, среди которых содержатся предполные (теорема А. В. Кузнецова). Впрочем, уже при $k=3$, 4 этот алгоритм требует огромных выкладок, не позволяющих получить явное перечисление предполных классов.

Начнем с совсем простого замечания.

11.12. Доказать, что всякий базис в k-значной логике конечен. ▲

Перейдем к описанию алгоритма для построения предполных классов в k-значной логике.

Определение 11.2 Пусть Φ — некоторая совокупность функций, зависящих от одних и тех же переменных: $\varphi_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_r), \ldots$ Будем говорить, что некоторая функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ *сохраняет множество* Φ, если после замещения всех ее аргументов функциями из Φ получается функция, также принадлежащая Φ.

Рассмотрим все подмножества множества функций от двух переменных x и y, содержащих функции x и y и не совпадающие с множеством всех функций. Ясно, что имеется конечное число таких множеств.

Множество Φ указанного вида назовем *замкнутым*, если оно содержит все (с точностью до переименования переменных) функции от двух переменных, которые могут быть получены из его элементов при помощи суперпозиции (другими словами, множество Φ совпадает с пересечением множества функций от переменных x, y и функционально замкнутого класса, порождаемого Φ).

11.13. Построить алгоритм, позволяющий выяснить вопрос, является ли некоторое множество Φ замкнутым. ▲

Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$ — все замкнутые множества функций от x и y. Для каждого из этих множеств Φ_i обозначим через T_i совокупность всех функций k-значной логики, сохраняющих Φ_i. Ясно, что $\Phi_i \subset T_i$ (ввиду замкнутости Φ_i). У нас имеется алгоритм, позволяющий выяснить, входит ли функция f в T_i или нет.

11.14. Доказать, что множества T_i являются функционально замкнутыми классами. ▲

11.15. Показать, что система Φ функций k-значной логики полна тогда и только тогда, когда Φ не содержится целиком ни в одном из классов T_i. ▲

Класс T_i назовем *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом из этих классов. Пусть $Q_1, \ldots, Q_t$ — максимальные из классов T_i.

11.16. Показать, что $Q_1, \ldots, Q_t$ — это все предполные классы в k-значной логике. ▲

Итак, доказана конечность числа предполных классов и указан способ их построения. Отметим, что этот способ не является алгоритмом. Указан алгоритм построения классов T_i (точнее, получения описания этих классов). Но заранее не ясно, имеется ли алгоритм для выбора максимальных классов Q_j, так как хотя классов T_i конечное число, сами классы бесконечны и не ясно, имеется ли алгоритм для выяснения вопроса, содержится ли один из этих классов в другом (из включения $\Phi_1 \subset \Phi_2$ нельзя, вообще говоря, сделать вывода о взаимоотношении T_1 и T_2). Исходя из проведенных рассуждений, можно оценить сверху число предполных классов в k-значной логике. Оно меньше числа подмножеств множества функций от двух переменных, т. е. меньше $2^{k^{k^2}}$. Эта величина очень быстро растет с ростом k.

Приведем перечень предполных классов в 3-значной логике, найденных С. В. Яблонским [1].

Начнем с аналогов классов $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ двузначной логики:

1) $\mathbf{P}_0$ — функции, сохраняющие 0;

2) $\mathbf{P}_1$ — функции, сохраняющие 1;

3) $\mathbf{P}_2$ — функции, сохраняющие 2.

Имеются еще и другие аналоги классов $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$:

4) $\mathbf{P}_{\{0,1\}}$ — функции, сохраняющие множество $\{0, 1\}$, т. е. на наборах, состоящих из 0 и 1, они принимают значения 0 или 1;

5) $\mathbf{P}_{\{0,2\}}$ — функции, сохраняющие множество $\{0, 2\}$;

6) $\mathbf{P}_{\{1,2\}}$ — функции, сохраняющие множество $\{1, 2\}$.

Поскольку 3 — простое число (см. стр. 248), имеется

7) $\mathbf{L}$ — класс линейных функций.

В 3-значной логике имеется несколько классов монотонных функций (из-за того, что можно различными способами упорядочивать числа 0, 1, 2):

8) $\mathbf{M}_1$ — функции, монотонные относительно порядка $0 < 1 < 2$;

9) $\mathbf{M}_2$ — функции, монотонные относительно порядка $1 < 2 < 0$;

10) $\mathbf{M}_3$ — функции, монотонные относительно порядка $2 < 0 < 1$.

Остальные упорядочения не приводят к новым классам.

Аналогично различными способами в 3-значной логике можно вводить понятие двойственности. Его можно связывать с любой подстановкой $s(x)$ чисел 0, 1, 2:

$$f_s^+(x_1, \ldots, x_n) = s^{-1}(f(s(x_1), \ldots, s(x_n)))\ ^{*)}.$$

---

*) В двузначной логике можно было писать не s^{-1}, а s, так как там была подстановка, квадрат которой являлся тождественной подстановкой ($\overline{\overline{x}} = x$), т. е. $s^{-1} = s$.

Однако не все подстановки приводят к предполным самодвойственным классам. В трехзначной логике таковой является лишь подстановка $x \to x+1$ (в k-значной логике предполных самодвойственных классов больше; их можно все описать [1]). Итак,

11) $\mathbf{S}_{x+1}$ — самодвойственные функции относительно подстановки $x \to x+1$.

Далее, укажем еще три класса, являющиеся более тонкими аналогами классов $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ двузначной логики:

12) $\mathbf{P}_{(0,1)}$ — функции, которые для всякого набора $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, состоящего из 0 и 1, на всех наборах β, не совпадающих с α ни в одном разряде, не принимают либо значения 0, либо значения 1 (это значение может зависеть от набора α);

13) класс $\mathbf{P}_{(0,2)}$ получается из $\mathbf{P}_{(0,1)}$ заменой пары (0, 1) на (0, 2);

14) аналогично строится класс $\mathbf{P}_{(1,2)}$.

Теперь укажем классы, которые не имеют аналогов при $k=2$ (их точные аналоги совпадают с множеством всех функций алгебры логики);

15) класс $\mathbf{U}_0$ состоит из функций, которые на любой совокупности наборов, у которых в некоторых фиксированных разрядах стоят нули, а в остальных их нет, либо не принимают значения нуль, либо равны нулю на всех этих наборах;

16) класс $\mathbf{U}_1$ связан с 1 так же, как $\mathbf{U}_0$ с 0;

17) класс $\mathbf{U}_2$ аналогичным образом связан с 2.

И, наконец, еще один класс, не имеющий аналога при $k=2$ (формально при $k=2$ приводимое ниже определение дает класс функций от одной переменной):

18) $\mathbf{C}$ — класс, состоящий из всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной, и функций, не принимающих, по крайней мере, одного значения.

Это полный перечень предполных классов трехзначной логики. В задаче о предполных классах в силу теоремы А. В. Кузнецова (задача 11.16) можно все свести к перебору, связанному с функциями от двух переменных. Этот факт можно еще уточнить. Просматривая перечень предполных классов в 3-значной логике, можно заметить, что лишь класс $\mathbf{C}$ содержит все функции от одной переменной; более того, все остальные классы не замкнуты относительно подстановки функций от одной переменной. Оказывается, что этот результат имеет место для любого k. Именно, имеет место теорема Слупецкого (см. [1]), в силу которой система функций, содержащая все функции от одной переменной и функцию, существенно зависящую более чем от одной переменной и принимающую все k значений, полна. Отсюда следует, что в k-значной логике имеется лишь один предполный класс, содержащий все функции от одной переменной. Нахождение остальных предполных классов может быть проведено, исходя из подмножеств множества функций от одной переменной. При этом можно улучшить оценку для числа предполных классов: их меньше, чем 2^{k^k}. Таким образом, задачу о нахождении числа предполных классов можно свести к перебору в множестве функций от одной переменной (число которых k^k сильно растет с ростом k).

Имеются работы (см., например, [3]), в которых выясняется, какого запаса функций от одной переменной достаточно в теореме Слупецкого.

До недавнего времени предполные классы в k-значной логике были известны лишь при $k=2, 3$. Имелась даже гипотеза, что нет описания множества предполных классов для любого k, существенно более эффективного, чем описание, данное в теореме Кузнецова. Именно, казалось, что число типов предполных классов растет с ростом k и даже описание типов классов невозможно без большого перебора. В 1965 г. И. Розенберг [5] сообщил результат, содержащий существенно более явное, чем ранее известные, описание предполных классов в k-значной логике. Оказалось, что имеется шесть типов таких классов, бо́льшая часть которых уже была известна. Это классы самодвойственных функций для различных подстановок, найденные в [1]; классы монотонных функций для различных частичных упорядочений набора $\{1, 2, \ldots, k\}$ (все они приводят к замкнутым классам, но не все к предполным; предполные монотонные классы найдены в [4]). Мы обсуждали выше представление функций в k-значной логике для простого k полиномами по модулю k, в результате чего для простого k имеется предполный класс линейных функций. Оказывается, что если k — степень простого числа, то существует представление функций, обобщающее представление функций полиномами; при этом возникает предполный класс квазилинейных функций. Другие типы классов обобщают классы типов **P**, **U** в трехзначной логике; имеются еще некоторые классы, связанные с классом Слупецкого.

В [6] сообщается, что доказательство результатов [5] удается восстановить и исследуются предполные классы при $k \leqslant 8$. Найденное число предполных классов M_k, а также число классов с точностью до эквивалентности M_k (классы считаются эквивалентными, если один из них получается из другого при некоторой перестановке чисел $\{1, 2, \ldots, k\}$) указано в приводимой ниже таблице. Для полноты мы включили в таблицу N_k, M_k при $k=2, 3$.

k	N_k	M_k
2	5	4
3	18	8
4	80	16
5	667	34
6	15237	107
7	7854724	> 2000
8	$> 5 \cdot 10^{11}$	—

Найдена асимптотика для N_k, M_k при больших k. Оказалось, что

$$N_k \sim \delta(k)\, k \cdot 2^{C_{k-1}^{[k-1/2]}};$$

$$M_k \sim \frac{N_k}{k!},$$

где $\delta(k)=1$ для нечетных k, $\delta(k)=2$ для четных k. Из этих результатов следует, что перечисление всех классов требует большого перебора, хотя его порядок сильно уменьшен. Кроме того, окончательно выяснена природа всех предполных классов.

Мы говорили здесь лишь о предполных классах, ничего не говоря о всех функционально замкнутых классах. Оказывается [7], что при $k > 2$ имеется континуум функционально замкнутых классов (напомним, что при $k=2$ их счетное число). Отметим, что опять-таки число классов, содержащих все функции от одной переменной, конечно, и они могут быть эффективно описаны. Тут ситуация несколько напоминает то, что мы видели при $k=2$ для расширенной суперпозиции. Там все сильно упрощалось при наличии констант; при $k > 2$ констант уже недостаточно. Однако если имеются все функции от одной переменной, то задача упрощается.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 11

11.1. Ответ. k^{k^n}. См. задачу 2.2.

11.2. Доказательство полностью аналогично доказательству при $k=2$ (см. § 2).

11.4. Воспользоваться задачей 11.3. Рассмотреть функцию от одной переменной

$$\bar{x}=k-1-x.$$

11.5. Показать, что всякая функция от одной переменной выражается через $x \vee y$ и $e_{ij}(x)$.

11.6. Выразить $e_{ij}(x)$ через $x \vee y$ и $x+1$. Ясно, что из $x+1$ можно получить $x+a$ для любого a. Вначале выразить x^i, а затем произвольную функцию $e_{ij}(x)$ (напомним, что $x \vee y = \max(x, y)$).

11.8. Можно доказать возможность представления индукцией по числу переменных. При этом более сложная часть — это рассмотрение функций от одной переменной (приходится исследовать систему линейных уравнений, определитель которой является определителем Вандермонда). Несколько проще следующий путь.

1. Показать, что всякую функцию $e_{i1}(x)$ можно представить полиномом. При этом удобно воспользоваться теоремой Безу и следующим известным фактом из теории сравнений: сравнение $ax \equiv b \pmod p$, где p — простое число, разрешимо для любого b, если $a \not\equiv 0 \pmod p$.

2. Показать, что для всякой функции справедливо представление

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{\delta} f(\delta_1, \ldots, \delta_n)\, e_{\delta_1 1} \ldots e_{\delta_n 1},$$

где суммирование ведется по всем наборам длины n (сложение и умножение понимаются в арифметическом смысле).

11.9. Показать, что функция $e_{i1}(x)$, где i не взаимно просто с k, не представима полиномом $p_l(x)$. Воспользоваться тем, что если для полинома с целыми коэффициентами $P(\alpha) \equiv 0 \pmod k$, где α — целое число, то $P(x) \equiv Q(x)(x-\alpha) \pmod k$, где $Q(x)$ — полином с целыми коэффициентами (теорема Безу в кольце вычетов по модулю k; для доказательства нужно разделить $P(x)$ на $x-\alpha$ и заметить, что остаток делится на k). Учесть также, что сравнение $ax \equiv 1 \pmod k$ не имеет решений, если наибольший общий делитель a и k больше 1. Можно рассуждать, следуя плану решения задачи 11.8.

11.10. Доказывается аналогично доказательству единственности представления функций алгебры логики полиномами Жегалкина (задача 4.4).

11.12. Воспользоваться наличием в k-значной логике функции Шеффера — Вебба.

11.13. Пусть Φ_m — множество функций от переменных x и y, которые могут быть получены суперпозицией функций из Φ не более чем за m шагов; $\Phi_m \subset \Phi_n$ при $m<n$. Ясно, что замкнутость множества Φ равносильна тому, что все Φ_m совпадают с Φ. Показать, что для замкнутости Φ необходимо и достаточно, чтобы множества Φ и Φ_1 совпадали.

11.14. Проверяется непосредственно, исходя из определений.

11.15. Пусть $R(\Phi)$ — функционально замкнутый класс, порожденный Φ. Показать, что $R(\Phi)$ содержит все функции от переменных x и y.

11.16. Ясно, что в формулировке задачи 11.15 можно заменить классы T_i на Q_j. Дальнейшие рассуждения аналогичны решению задач 6.17 — 6.19.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 11

11.1. Число k-значных наборов длины n равно k^n. Число функций от n переменных равно числу наборов длины k^n.

11.2. Подставим в функции, стоящие с обеих сторон, набор $\sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. В k-значной логике конъюнкция, у которой один из членов равен нулю, равна нулю (см. определение). Поэтому в правой части может быть отличен от нуля лишь член, отвечающий $\delta=\sigma$, т. е. $a_\sigma \& x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$. Он, в свою очередь, будет равен $a_\sigma \& (k-1)=a_\sigma$, т. е. обязательно $a_\sigma=f(\sigma)$, а если коэффициенты имеют такой вид, то наша форма действительно представляет $f(x_1, \ldots, x_n)$. Единственность можно установить, заметив, что имеется k^{k^n} различных СДНФ от n переменных.

11.3. Полная система: $x\&y$; $x\vee y$; x^δ $(\delta=0, 1, \ldots, k-1)$; константы $1, \ldots, k-2$. Нужно лишь заметить, что из конъюнкции двух переменных можно получить конъюнкцию любого числа переменных (и аналогично для дизъюнкции). Особо отметим необходимость констант, чего не было при $k=2$, так как там можно было в СДНФ опустить коэффициенты, перейдя к дизъюнкции по наборам, на которых $f(\delta)=1$.

11.4. В силу задачи 11.3 достаточно показать, что функция $x\&y$ выражается через $x\vee y$ и функции от одной переменной. Как и при $k=2$, имеем:

$$x\&y=\overline{\overline{x}\vee\overline{y}},$$

что непосредственно следует из определения этих функций в k-значной логике.

11.5. Пусть $f(x)$ — функция от одной переменной. Имеем:

$$f(x)=\bigvee_{0\leqslant i\leqslant k-1} e_{i\, f(i)}(x).$$

11.6. Имеем:

$$x^i=1+\bigvee_{\substack{0\leqslant a\leqslant k-1\\ a\neq k-i+1}}(x+a).$$

Действительно, $\bigvee(x+a)=\max(x+a)$ будет равна $k-1$ при $x\neq i$ и правая часть равна в этом случае 0 (по модулю k). При $x=i$ имеем $\bigvee(x+a)=k-2$ и правая часть равна $k-1$.

Далее,

$$e_{ij}(x)=[x^i\vee(k-j-1)]+j+1.$$

Действительно, функция $x^i\vee(k-j-1)$ равна $k-1$ при $x=i$ и равна $k-j-1$ в остальных случаях.

Наконец, ясно, что ни одна из этих функций не образует полной системы, так как $x+1$ — функция от одной переменной, а функция $x\vee y$ сохраняет нуль (эти свойства, как легко заметить, являются наследственными и в k-значной логике).

11.7. Имеем $x+1=x\vee x+1$; $x\vee y=(x\vee y+1)+(k-1)$.

11.8. 1. Попытаемся найти полином $r_i(x)$ степени p, представляющий $e_{i1}(x)$, т. е. совпадающий (по модулю p) с $e_{i1}(x)$ при $x=0, 1, \ldots, p-1$. Для того чтобы $r_i(j)\equiv 0 \pmod p$ при $j\neq i$ $(0\leqslant j\leqslant p-1)$, достаточно, чтобы все целые числа j являлись корнями $r_i(x)$. В этом случае нам известно $p-1$ корней полинома $r_i(x)$; все они вещественны, значит, и p-й корень α должен быть веществен. Пусть

$$r_i(x)=(x-\alpha)\,x\,(x-1)\;\ldots\;(x-j)\;\ldots\;(x-p+1)\qquad (j\neq i).$$

Тогда α — обязательно целое число, иначе коэффициент полинома $r_i(x)$ при x^{p-1} не был бы целым. Осталось учесть, что $r_i(i)=1$ (по модулю p). Мы получим сравнение

$$a_i(i-\alpha)\equiv 1 \pmod p,$$

где $a_i=\prod_{j\neq i}(i-j)$. Поскольку $a_i\not\equiv 0 \pmod p$, то это сравнение можно решить относительно $i-\alpha$ и найти α.

2. Возможность представления всякой функции в форме, приведенной в указаниях к решению задачи, доказывается аналогично представимости в СДНФ. Действительно, произведение $e_{\delta_1 1}(x_1)\ldots e_{\delta_n 1}(x_n)$ равно 1 на наборе $(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ и нулю на остальных наборах.

Представимость любой функции в виде полинома следует теперь из представимости $e_{i1}(x)$.

11.9. Пусть $r_i(x)$ — полином, совпадающий по модулю k с $e_{i1}(x)$. Тогда в силу замечания, имеющегося в указании,

$$r_i(x)\equiv q_i(x)\,x(x-1)\ldots(x-i+1)(x-i-1)\ldots \\ \ldots(x-k+1)+\rho(x) \pmod k,$$

где коэффициенты $\rho(x)$ кратны k, а $q_i(x)$ имеет целые коэффициенты (доказывается индукцией по номерам коэффициентов, начиная со старшего). Имеем:

$$r_i(i)\equiv q_i(i)\,a_i \pmod k,\qquad a_i=\prod_{j\neq i}(i-j),$$

т. е. $q_i(i)$ должно удовлетворять сравнению $a_iq_i(i)\equiv 1 \pmod k$. Если i не будет взаимно просто с k, то этим свойством обладает также a_i и указанное сравнение не может иметь решений.

11.10. Каждому одночлену от n переменных можно поставить в соответствие набор показателей, в которых все переменные входят в одночлен (переменным, которые не входят в него, ставятся в соответствие нули). В результате получится взаимно однозначное соответствие между одночленами и k-значными наборами длины n (показатели не превосходят $k-1$). Тогда полиному ставится в соответствие k-значный набор (длины k^n) его коэффициентов (они также не превосходят $k-1$). Число различных полиномов равно k^{k^n}, т. е. этих полиномов столько же, сколько всех функций в k-значной логике. Отсюда следует единственность представления.

11.11. Арифметическое сложение $x+y$, арифметическое умножение xy, константы. Операции рассматриваются по модулю k.

11.12. Пусть имеется некоторый базис. Выразим через него функцию Шеффера — Вебба $x\vee y+1$. В этой суперпозиции участвует конечное число элементов базиса; с другой стороны, совокупность этих элементов должна совпадать со всем базисом, так как она является полной системой в силу полноты $\{x\vee y+1\}$.

Замечание. Фактически из проведенного рассуждения следует, что если в некотором функционально замкнутом классе имеется конечная полная система, то любой базис в нем конечен.

11.13. Докажем индукцией по m, что если $\Phi_1=\Phi$, то $\Phi_m=\Phi$ при всех m. Пусть $\Phi_{m-1}=\Phi$ и пусть некоторая функция f получается из функций, входящих в Φ, не более чем за m шагов. На последнем шаге этой суперпозиции в функцию из Φ подставляются функции из Φ_{m-1}, т. е. из Φ ($\Phi_{m-1}=\Phi$). Но тогда функция может быть получена за один шаг из функций Φ, т. е. $f\in\Phi_1$, а значит, $f\in\Phi$.

Итак, для выяснения вопроса о замкнутости множества нужно построить Φ_1 (построение этого множества проводится в конечное число шагов: нужно перебрать все одношаговые суперпозиции) и сравнить Φ_1 с Φ (оба эти множества конечны).

11.15. Пусть N — совокупность всех функций от x и y, входящих в $R(\Phi)$. Ясно, что функции из $R(\Phi)$ сохраняют N. Если бы множество N не совпадало с множеством всех функций от x, y, то оно было бы замкнутым и должно было бы совпадать с одним из множеств Φ_i. Тогда $R(\Phi)\subset\subset T_i$, чего не может быть, так как $R(\Phi)$ не содержится ни в одном из классов T_i.

Для доказательства необходимости заметим, что пересечение T_i с совокупностью функций от x и y совпадает с Φ_i, так как Φ_i замкнуто и содержит x и y. Значит, T_i не может совпадать с совокупностью $\mathbf{P}^k$ всех функций.

11.16. Достаточно показать, что каждый функционально замкнутый класс содержится в одном из классов Q_j. Но это действительно так, поскольку класс, не содержащийся ни в каком из классов Q_j, является полной системой, а потому совпадает с совокупностью всех функций k-значной логики.

§ 12. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

1. Понятие предиката. При изучении логических операций высказывания рассматриваются при одной фиксированной ситуации. После фиксации ситуации все высказывания делятся на истинные и ложные (в этой ситуации), и мы имеем дело с двухэлементной булевой алгеброй $\{0, 1\}$ (как мы говорили в § 2, фиксация ситуации порождает гомоморфизм булевой алгебры высказываний в алгебру $\{0, 1\}$, см. решение задачи 2.23). В логике предикатов исследуется зависимость высказываний от ситуации. При этом фиксируется уже не одна-единственная ситуация, а некоторое множество допустимых ситуаций. В каждой ситуации мы по-прежнему интересуемся лишь истинностью или ложностью высказывания. Высказывание как функция на некотором фиксированном множестве допустимых ситуаций называется *предикатом* на этом множестве (точнее: каждой ситуации ставится в соответствие истинностное значение высказывания в этой ситуации). Область определения предиката (множество ситуаций), вообще говоря, неоднозначно определяется видом высказывания и всегда должна оговариваться. Приведем примеры предикатов: «x — простое число» (он естественно определен на множестве натуральных чисел), «этот ученик учится на отлично» (здесь можно по-разному фиксировать множество учеников, например, выбрать некоторый конкретный класс), «прямая a проходит через точку A» (здесь в качестве множества ситуаций возьмем множество всевозможных пар $\{a, A\}$, где a — прямая, а A — точка на евклидовой плоскости). В последнем примере предикат удобно считать не функцией от одной переменной, принимающей значения из множества пар $\{a, A\}$, а функцией от двух переменных, одна из которых (a) принимает значения в множестве прямых на евклидовой плоскости, а другая

(A) — в множестве точек. С учетом этого обстоятельства мы и дадим определение.

Определение 12.1. Пусть $\mathfrak{M}=\{\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n\}$ — конечный набор множеств. Всякое соответствие $A(x_1,\ldots,x_n)$, относящее каждому набору из n элементов $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_1 \in \mathfrak{M}_1$, $a_2 \in \mathfrak{M}_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{M}_n$, какой-лнбо из элементов булевой алгебры $\{0, 1\}$, называется *n-местным предикатом* на $\mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M}_i$ называется *предметной областью* (или множеством ситуаций) для переменной x_i. Переменные $x_1, \ldots, x_n$ называются *предметными* переменными или субъектами. Некоторые из множеств $\mathfrak{M}_i$ могут совпадать.

Всякий n-местный предикат $A(x_1, \ldots, x_n)$ на $\mathfrak{M}=\{\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n\}$ можно рассматривать как одноместный предикат на множестве наборов $(a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in \mathfrak{M}_i)$. Это множество называется *прямым произведением* множеств $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$; оно обозначается через $\mathfrak{M}_1 \times \ldots \times \mathfrak{M}_n$.

Заметим, что если $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — множества точек прямой, то $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ можно интерпретировать как множество точек плоскости.

12.1. Сколько имеется различных k-местных преднкатов на множестве из n элементов? ▲

Константы 0, 1 будем называть нульместными предикатами *).

Приведем несколько примеров.

1. «Прямая P проходит через точки A и B» — трехместный предикат, у которого предметными областями двух переменных (A и B) являются множества точек, а третьей P — множество прямых.

2. «Если x, y и z — натуральные числа, причем x делится на y, а y делится на z, то x делится на z» — трехместный предикат, у которого все предметные области — натуральные ряды чисел; на языке § 1 это абсолютно истинное высказывание; теперь же мы можем сказать, что предикат тождественно равен единице.

3. «Если тетрадь лежит в папке, а папка в портфеле, то тетрадь лежит в портфеле» — также трехместный тождественно истинный предикат.

---

*) Их содержательиая интерпретация — высказывания с фиксированной ситуацией.

4. «Мальчик держит в руке этот карандаш» — можно считать, что это двухместный предикат: одна предметная область — мальчики, другая — карандаши.

Если имеется некоторый многоместный предикат, то, фиксируя значения некоторых его переменных, мы получим предикат от меньшего числа переменных. Так, зафиксировав прямую P в примере 1, мы получим двухместный предикат; рассматривая определенный карандаш в примере 4, мы получим одноместный предикат.

Иногда рассматриваются лишь предикаты с общей предметной областью для всех переменных. Общий случай может быть сведен к этому, если рассмотреть объединение предметных областей для всех переменных.

Для некоторых предикатов используются специальные обозначения. Например, $x=y$ для натуральных чисел x, y — это двухместный предикат $A(x, y)$ на множестве натуральных чисел *), равный 1, если x и y совпадают. Другие примеры: $x>y$ — двухместный предикат на множестве натуральных чисел, $AB\perp CD$ — двухместный предикат на множестве прямых.

2. Кванторы. Формулы логики предикатов. Поскольку предикаты принимают значения из $\{0, 1\}$, над ними можно производить все логические операции. Но имеются еще и специфические операции логики предикатов, которые относятся уже не к одной фиксированной ситуации, а ко всему множеству ситуаций.

Пусть $A(x)$ — одноместный предикат. Рассмотрим константы (нульместные предикаты):

$$\forall x\, A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } A(x)=1 \text{ для всех } x\in\mathfrak{M}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\exists x\, A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } A(x)=1 \text{ хотя бы для одного } x\in\mathfrak{M}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В первом случае мы говорим, что предметная переменная x *связана* в предикате $A(x)$ *квантором всеобщности*, во втором случае — *квантором существования*. Квантору всеобщности соответствует «связывание» субъекта словами *для всех* (для всякого x имеет место $A(x)$); квантору существования — словами *существует* (существует x, для которого имеет место $A(x)$).

---

*) Это означает, что предметные области для обеих переменных — множества натуральных чисел.

Применение кванторов превращает одноместные предикаты в константы. Если у нас имеется какой-либо k-местный предикат $A(x_1, \ldots, x_k)$, то можно применять кванторы по какой-либо переменной (для всякого набора значений остальных переменных):

$$\forall x_1 A(x_1, x_2, \ldots, x_k); \quad \exists x_1 A(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

В результате в обоих случаях получается $(k-1)$-местный предикат от $(x_2, \ldots, x_k)$. Мы будем говорить, что x_1 в этих формулах является *связанной переменной.*

Теперь мы перечислили все операции логики предикатов. Строгое определение формулы логики предикатов дается по индукции, при этом одновременно определяется понятие свободных и связанных переменных:

1) Все отдельно взятые предикаты, в которых все места замещены предметными переменными или предметными постоянными из соответствующих предметных областей, являются формулами. (Логическая константа считается «нульместным предикатом».) При этом все входящие в предикат предметные переменные считаются свободными, связанных переменных нет.

2) Если $\mathfrak{A}$ — формула логики предикатов, содержащая свободную переменную x, то $\forall x\mathfrak{A}$ и $\exists x\mathfrak{A}$ — также формулы, в которых x — связанная переменная, а все остальные переменные — те же и того же характера *), что и в $\mathfrak{A}$.

3) Если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула, все переменные которой те же и того же характера, что и у $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, причем нет такой переменной, которая в одну из них входит свободно, а в другую связанно, то $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ — формулы, причем в них входят все переменные из формул $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и вхождение имеет тот же характер.

4) Каждая формула получается за конечное число шагов из элементарных (п. 1) при помощи операций из правил 2) и 3).

Каждая формула $\mathfrak{A}$ представляет предикат $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ от своих свободных переменных (строго говоря, это утверждение нужно доказывать по индукции); этот предикат не зависит от связанных переменных. Заметим, что если

*) То есть они будутсвободными, если были свободны в $\mathfrak{A}$, и связанными, если были связаны в $\mathfrak{A}$.

правило 2) применяется несколько раз подряд, то формула начинается с некоторого числа кванторов, первым из них применяется тот, который стоит справа.

Легко установить по индукции, что предикат, представляемый некоторой формулой $\mathfrak{A}$, не изменится, если переобозначить какую-либо связанную переменную любой другой буквой, не используемой для обозначений свободных переменных. Из этого простого замечания следует два важных факта. Во-первых, ограничение в 3) определения на формулы, соединяемые знаком логической операции, не приводит к ограничению на класс представимых предикатов (можно предварительно переобозначить связанные переменные). Во-вторых, можно так переобозначить связанные переменные, чтобы все кванторы применялись к переменным, обозначенным различными буквами. Будем предполагать в дальнейшем, что формулы имеют такой вид. Тогда нет необходимости выделять скобками часть формулы, на которую действует квантор.

В вопросе о равносильности формул логики предикатов имеются два аспекта. Во-первых, пусть фиксированы предметные области $\mathfrak{M}=\{\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n\}$ для всех входящих в формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ свободных переменных, а также предметные константы в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *равносильными на системе областей* $\mathfrak{M}$, если представляемые ими предикаты $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k)$, $\mathfrak{B}(y_1, \ldots, y_m)$ равны при любых замещениях входящих в них предикатов (это замещение должно быть корректным, т. е. должно учитываться число мест у предикатов и предикаты, обозначенные одинаковыми буквами, должны замещаться одинаковыми предикатами). Предикаты A и B называются *равными*, если их значения совпадают при всех значениях входящих в них переменных (если наборы переменных у A и B не совпадают, то можно считать, что от некоторых переменных A и B зависят несущественно).

Формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, не содержащие символов индивидуальных предметов, называются *абсолютно равносильными* если они равносильны на любых наборах предметных областей.

Иногда на $\mathfrak{M}$ заранее фиксируется некоторое число предикатов, называемых *индивидуальными*; совокупность индивидуальных предикатов называется *сигнатурой*. При рассмотрении вопроса о равносильности формул, содержащих индивидуальные предикаты, последние нужно замещать соответствующими фиксированными предикатами.

Проиллюстрируем разницу между двумя определениями равносильности на простейшем примере.

12.2. Показать, что формула $A(x) \vee \overline{A(y)}$ равносильна 1 на любой области $\mathfrak{M}$ (точнее — на $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$), состоящей из одного элемента, но не абсолютно равносильна 1. ▲

3. Примеры предикатов. Для того чтобы привыкнуть к языку логики предикатов, рассмотрим несколько упражнений.

12.3. Ввести одноместные предикаты на соответствующих областях и записать при их помощи следующие высказывания в виде формул логики предикатов:

а) всякое натуральное число, делящееся на 12, делится на 2, 4 и 6;

б) жители Швейцарии обязательно владеют или французским, или итальянским, или немецким языком;

в) функция, непрерывная на отрезке $[0, 1]$, сохраняет знак или принимает нулевое значение. ▲

Задание в задаче 12.3 несколько неопределенно (поскольку всякий предикат можно считать одноместным). Имеется в виду задача о нахождении по возможности более элементарных одноместных предикатов так, чтобы получилась по возможности более содержательная формула (мы не будем уточнять смысл этих требований).

12.4. В следующих примерах сделать то же самое, не обязательно ограничиваясь одноместными предикатами:

а) если α — корень полинома от одной переменной с вещественными коэффициентами, то $\bar{\alpha}$ — также корень этого полинома;

б) между любыми двумя различными точками на прямой лежит, по крайней мере, одна точка, с ними не совпадающая;

в) через две различные точки проходит единственная прямая;

г) каждый студент выполнил, по крайней мере, одну лабораторную работу;

д) если произведение натуральных чисел делится на простое число, то на него делится, по крайней мере, один из сомножителей;

е) через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. ▲

4. Предикаты на конечных областях; логика одноместных предикатов. Укажем некоторые свойства формул логики предикатов, относящихся к фиксированному множеству. Для простоты будем считать, что фиксированное множество $\mathfrak{M}$ является предметной областью для всех предметных переменных.

Пусть вначале область $\mathfrak{M}$ конечна, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ее элементы. Тогда оказывается, что на $\mathfrak{M}$ каждая формула равносильна формуле, не содержащей кванторов. Этот факт следует из двух непосредственно проверяемых равносильностей:

$$\forall x A(x) = A(a_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A(a_n);$$
$$\exists x A(x) = A(a_1) \vee \ldots \vee A(a_n).$$

При помощи этих соотношений доказательство проводится по индукции. В случае бесконечного поля кванторы можно рассматривать как аналоги конъюнкции или дизъюнкции для бесконечного числа членов *) (значений предиката для всех элементов поля). Эту аналогию полезно иметь в виду при установлении различных свойств кванторов.

12.5. Пусть $\mathfrak{A}$ — формула логики предикатов на фиксированной области $\mathfrak{M}$ (любой мощности), содержащая только индивидуальные одноместные предикаты; доказать, что тогда существует формула $\tilde{\mathfrak{A}}$, равносильная $\mathfrak{A}$, содержащая те же предикаты и не содержащая кванторов. ▲

Результат задачи 12.5 позволяет сделать важные выводы об ограниченности языка логики одноместных предикатов.

12.6. Доказать, что на конечной области всякий индивидуальный предикат может быть представлен формулой, содержащей только одноместные предикаты. ▲

12.7. Доказать, что существуют индивидуальные предикаты, не представимые на той же предметной области, что и исходный предикат, формулой, содержащей только одноместные предикаты. Найти необходимые и достаточные условия такой представимости. ▲

Отметим, что требование не выходить за рамки исходной области существенно, так как (см. определение 12.1) всякий n-местный предикат всегда можно рассматривать как одноместный предикат, переходя к прямому произведению областей.

---

*) Иногда для обозначения квантора всеобщности используется символ $\bigwedge x$, а квантора существования — символ $\bigvee x$ (ср. примечание на стр. 15).

5. Свойства кванторов. Начнем с распределительных свойств кванторов.

12.8. Доказать равносильности (абсолютные):

$$\forall x(A(x) \& B(x)) = \forall x A(x) \& \forall y B(y);$$

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists y\, B(y). \quad \blacktriangle$$

12.9. Показать, что дистрибутивные законы для квантора всеобщности относительно дизъюнкции и квантора существования относительно конъюнкции, вообще говоря, не имеют места, т. е. что формулы

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \text{ и } \forall x A(x) \vee \forall y\, B(y);$$

$$\exists x(A(x) \& B(x)) \text{ и } \exists x A(x) \& \exists y B(y)$$

не абсолютно равносильны. $\blacktriangle$

Стоит посмотреть, во что переходят дистрибутивные законы для конечных областей при переходе к бескванторным формулам. Законы из задачи 12.8 следуют тогда из коммутативности и ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции соответственно. Равносильности в задаче 12.9 не имеют места, так как конъюнкцию и дизъюнкцию, вообще говоря, нельзя переставлять.

В дальнейшем будет существенно, что равносильности, о которых идет речь в задаче 12.9, имеют место, если какой-либо из предикатов A и B не зависит от x.

12.10. Доказать абсолютные равносильности:

$$\forall x(A(x) \vee B) = \forall x A(x) \vee B;$$

$$\exists x(A(x) \& B) = \exists x A(x) \& B,$$

где B не зависит от x (x не является свободной переменной предиката B). $\blacktriangle$

Далее, рассмотрим вопрос о коммутативности кванторов.

12.11. Доказать, что одноименные кванторы можно переставлять, т. е.

$$\forall x \forall y\, A(x, y) = \forall y \forall x\, A(x, y);$$

$$\exists x \exists y\, A(x, y) = \exists y \exists x\, A(x, y). \quad \blacktriangle$$

12.12. Показать, что разноименные кванторы, вообще говоря, переставлять нельзя. $\blacktriangle$

Отметим, что в случае конечной области коммутативность однокменных кванторов следует из коммутативности дизъюнкции и конъюнкции.

12.13. Выяснить геометрический смысл высказываний $\exists x \forall y A(x, y)$ и $\forall y \exists x A(x, y)$ в том случае, когда предметная область — множество точек прямой. ▲

По аналогии с двойственностью конъюнкции и дизъюнкции имеет место двойственность между кванторами.

12.14. Доказать, что

$$\overline{\forall x\, A(x)} = \exists x\, \overline{A(x)};$$
$$\overline{\exists x\, A(x)} = \forall x\, \overline{A(x)}. \quad ▲$$

Равносильности задачи 12.14 стоит сопоставить с законами де Моргана (2.8), (2.9). Эти равносильности и закон двойственности в алгебре логики позволяют преобразовать любую формулу логики предикатов в равносильную формулу, в которой символ отрицания стоит только над элементарными предикатами. Строгое доказательство возможности такого приведения проводится индукцией по построению формулы (предоставляем читателю провести его). Получающуюся в результате формулу будем называть *почти нормальной формой* исходной формулы.

Теперь мы можем на языке логики предикатов выразить то пожелание, которое обычно делается при построении определений отрицательных понятий. Оно состоит в том, что всякое определение, записанное в виде формулы логики предикатов, должно находиться в почти нормальной форме. В этой книге мы неоднократно стремились соблюсти это требование при построении определений отрицательных понятий (см. задачи 1.10, 3.6, 5.1 и т. д.).

12.15. Привести к почти нормальной форме следующие формулы:

а) $\forall x \overline{\exists y (P(x) \rightarrow Q(y))}$;

б) $\exists x \overline{(\forall y P(x, y, z) \rightarrow \exists u Q(x, u))} \,\&\, \forall t \overline{\forall v (\overline{A}(t) \vee B(v))}$. ▲

12.16. Решить задачи 3.6 и 5.1, используя символику логики предикатов. ▲

12.17. Дать определение последовательности, не имеющей конечного предела. ▲

Формулы, находящиеся в почти нормальной форме, можно подвергнуть дальнейшему преобразованию. Именно, поскольку мы договорились обозначать все связанные переменные различными буквами, мы можем в силу задач 12.8 и 12.10 вынести кванторы так, что формула примет вид бескваиторной формулы, к которой последовательно применяются кванторы. Получившуюся в результате формулу мы будем называть *нормальной формой* исходной формулы *).

12.18. Привести к нормальной форме формулы из задачи 12.15.

Обычно не требуется, чтобы определение имело вид формулы в нормальной форме (однако, как правило, требуют, чтобы оно имело почти нормальную форму).

6. Примеры утверждений, записанных в виде формул логики предикатов. Сделаем несколько замечаний о записи утверждений и определений в виде формул. Во-первых, нужно очень внимательно следить, чтобы в полученной формуле не было лишних свободных переменных (свободными должиы быть лишь те предметные переменные, про которые делается утверждение!).

Во-вторых, часто нужно брать кванторы не по всей предметной области $\mathfrak{M}$, а по некоторой ее подобласти $\mathfrak{M}'$ (например, не по всем вещественным числам, а лишь по положительным; не по всем прямым, а по прямым, проходящим через данную точку). Это так называемые *ограниченные* кванторы: $\forall_{\mathfrak{M}'}x$, $\exists_{\mathfrak{M}'}x$; первый из них заменяет слова «для всех x, принадлежащих $\mathfrak{M}'$», второй — «существует элемент x, принадлежащий $\mathfrak{M}'$». Однако ограниченные кванторы могут быть выражены через обычные. В связи с этим мы не будем в дальнейшем прибегать к символам ограниченных кванторов.

12.19. Выразить ограниченные кванторы при помощи формул, содержащих лишь кванторы по всей предметной области. ▲

---

*) Заметим, что почти нормальная и нормальнаи форма не единственны.

Сделаем еще несколько упражнений на запись определений в виде формул логики предикатов и построение отрицаний этих формул.

12.20 *). Записать в виде формул логики предикатов определения:

а) функции $f(x)$, непрерывной на $(0, 1)$;

б) функции $f(x)$, разрывной на $(0, 1)$;

в) функции, равномерно непрерывной на $(0, 1)$;

г) функции, непрерывной, но не равномерно непрерывной на $(0, 1)$;

д) последовательности функций $f_n(x)$, сходящейся на $(0, 1)$;

е) последовательности функций $f_n(x)$, равномерно сходящейся на $(0, 1)$;

ж) последовательности функций $f_n(x)$, сходящейся на $(0, 1)$, но не сходящейся равномерно. ▲

7. Кванторы по предикатным переменным. Отметим простейшие ситуации, когда естественно прибегать к кванторам по предикатам. Это иногда бывает удобно, если надо охарактеризовать какой-либо индивидуальный предикат. Так, предикат тождественного равенства $x=y$ однозначно задается требованиями:

$$\forall x(x=x);$$
$$\forall A\forall x\forall y\ \ (x=y\to(A(x)\to A(y))).$$

12.21. Показать, что на всякой предметной области $\mathfrak{M}$ единственный предикат $x=y$, удовлетворяющий двум перечисленным условиям,— это предикат тождественного равенства. ▲

Другая возможность — это характеризовать при помощи формул с кванторами по предикатным переменным какое-либо множество предметных областей. Приведем простейший пример.

12.22. Показать, что высказывание

$$\forall A\forall x\forall y(A(x)\vee\overline{A(y)})$$

---

*) Договоримся, что мы рассматриваем только функции, определенные на всем интервале (0, 1).

истинно для областей, состоящих из одного элемента, и только для них. ▲

Вообще формулы, содержащие кванторы как по предметным, так и по предикатным переменным, используются для характеристики какого-либо множества предметных областей с фиксированными индивидуальными предикатами на них (сигнатурой). Система таких формул называется *системой аксиом*, а удовлетворяющие этим аксиомам множества с индивидуальными предикатами — интерпретациями системы аксиом.

12.23. Охарактеризовать при помощи аксиом области, содержащие а) более одного элемента; б) не более двух элементов; в) два элемента; г) конечные области; д) бесконечные области. ▲

12.24. Показать, что совокупность всех конечных областей (а также всех бесконечных областей) нельзя охарактеризовать аксиомами, содержащими только одноместные предикаты. ▲

Приведем в качестве примера систему аксиом, характеризующую натуральный ряд. Натуральным рядом называется предметная область $\mathfrak{M}$, снабженная индивидуальным предметом 0, индивидуальными предикатами $x = y$, $x < y$, для которых удовлетворяются приводимые ниже аксиомы 1) — 6). В аксиомах используются следующие обозначения для предикатов:

$$x \leqslant y = x < y \vee x = y;$$
$$\sigma(x, y) = x < y \mathbin{\&} \forall z (z \leqslant x \vee y \leqslant z);$$

$\sigma(x, y)$ — это предикат «y непосредственно следует за x».

Все переменные — предметные и предикатные,— не связанные кванторами в следующих формулах, предполагаются связанными кванторами всеобщности, с которых эти формулы должны начинаться.

Аксиомы натурального ряда

1) $x = x$;
2) $x = y \to (A(x) \to A(y))$;
3) $\overline{x < x}$;
4) $x < y \to (y < z \to x < z)$;
5) $\exists y \sigma(x, y) \mathbin{\&} \forall z(\sigma(x, z) \to z = y)$;
6) $A(0) \mathbin{\&} (A(x) \mathbin{\&} \sigma(x, y) \to A(y)) \to A(z)$.

Аксиомы 1), 2) определяют предикат тождественного равенства, и они уже обсуждались; аксиомы 3), 4) означают, что в $\mathfrak{M}$ предикат $x<y$ вводит отношение порядка; аксиома 5) — что существует единственный непосредственно следующий элемент; аксиома 6) — это так называемая аксиома полной индукции: если некоторое утверждение верно для 0 и из его справедливости для x следует справедливость для непосредственно следующего элемента, то это утверждение верно для всех элементов $\mathfrak{M}$. Можно показать, что все интерпретации аксиом 1) — 6) в некотором естественном смысле изоморфны, т. е. натуральный ряд единственен с точностью до изоморфизма. Подробнее об аксиоматике натурального ряда можно прочитать в книгах [1] и [2].

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 12

12.1. 2^{n^k}.

12.2. Эта формула не будет равносильна 1 уже на области из двух элементов.

12.3. а) Ввести на натуральном ряде предикаты:

$A(x)$ — делиться на 12 (т. е. $A(x)=1$ тогда и только тогда, когда x делится на 12);

$B(x)$ — делиться на 2;

$C(x)$ — делиться на 4;

$D(x)$ — делиться на 6.

б) На множестве людей ввести предикаты:

$A(x)$ — жить в Швейцарии;

$B(x)$ — владеть французским языком;

$C(x)$ — владеть итальянским языком;

$D(x)$ — владеть немецким языком.

в) На множестве функций (определенных на данном отрезке) ввести предикаты:

$A(f)$ — быть непрерывной функцией (на данном отрезке);

$B(f)$ — сохранять знак;

$C(f)$ — обращаться в нуль.

Другая возможность: можно ввести, кроме $A(f)$, предикаты на поле вещественных чисел: $x\in[0, 1]$ — принадлежать отрезку $[0, 1]$; $x\geqslant 0$; $x=0$.

12.4. В тех случаях, когда это возможно, мы будем пользоваться для элементарных предикатов обычно употребляемыми обозначениями. Введем следующие предикаты:

а) двухместный предикат $f(\alpha)=0$, где f принадлежит предметной области полиномов от одной переменной с вещественными коэффициентами, α — предметной области комплексных чисел;

б) трехместный предикат $A(x, y, z)$ — точка z лежит между точками x, y; двухместный предикат $x\in l$ — точка x принадлежит прямой l; двухместный предикат $x=y$ — точки x и y совпадают;

г) $A(x, y)$ — студент x выполнил лабораторную работу y;

д) $x|y$ — натуральное число y делится на x;

$A(x)$ — быть простым числом (впрочем, этот предикат можно выразить через $x|y$ и $x=y$).

12.5. Показать, что результат применения квантора к бескванторной формуле с индивидуальными одноместными предикатами может быть записан через те же предикаты в бескванторной форме. Дальнейшее доказательство проводится по индукции.

12.6. Ввести одноместные предикаты, равные 1 на единственном элементе.

12.7. Необходимое и достаточное условие представимости: множество истинности (наборы значений аргументов, при которых предикат равен 1) является объединением конечного числа прямых произведений подобластей (подмножеств) исходной области. В частности, двухместный предикат тождественного равенства (совпадения) $x=y$ на любой бесконечной области не представим в указанном виде.

12.8. Проверяется непосредственно по определению.

12.9. Импликация $\forall x(A(x)\vee B(x))\to\forall yA(y)\vee\forall z\,B(z)$ может быть ложной.

12.10. Проверяется непосредственно.

12.11. Истинность высказывания $\forall x\,\forall y\,A(x, y)$ означает, что предикат $A(x, y)$ истинен для всех пар (x, y), а истинность $\exists x\exists y\,A(x, y)$ означает истинность $A(x, y)$ хотя бы для одной пары (x, y).

12.12. Рассмотреть, например, предикат $x<y$ на натуральном ряде.

12.13. Учесть, что множество истинности предиката $A(x, y)$ — некоторое множество на плоскости (x, y).

12.14. Сформулируем высказывания, истинность которых нужно установить:

«$A(x)$ имеет место не для всех x тогда и только тогда, когда существует x, для которого $A(x)$ не имеет места»;

«Не существует x, для которого $A(x)$ имеет место, тогда и только тогда, когда $A(x)$ не имеет места для всех x».

Справедливость этих утверждений очевидна, что, однако, не мешает довольно часто допускать ошибки при расшифровке отрицаний кванторов. Часто при отрицании сохраняют тот же квантор («Не все кошки серы» — «Все кошки не серые»).

12.15. а) $\forall x\,\forall y\,(P(x)\,\&\,\overline{Q(y)})$; б) $\exists x\,\exists y\,(P(x, y, z)\,\&\,\overline{Q(x, y)})\,\&$
$\&\,\forall t\exists v\,\overline{(A(t)\,\&\,\overline{B}(v))}$.

12.16. Записать определения самодвойственных и монотонных функций в виде формул логики предикатов и привести отрицания этих формул к почти нормальной форме.

12.17. Напомним, что число A является пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A)$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное N, что $|a_n-A|<\varepsilon$ при $n>N$. Записать вначале в виде формулы логики предикатов высказывание, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел.

12.18. б) $\exists x\,\forall y\,\forall t\exists u\,(P(x, y, z)\,\&\,\overline{Q(x, y)}\,\&\overline{A(t)}\,\&\,\overline{B}(u))$.

12.19. $\forall_{\mathfrak{M}'}xA(x)=\forall x\,(x\in\mathfrak{M}'\longrightarrow A(x))=\forall x\,(x\notin\mathfrak{M}'\vee A(x))$;
$\exists_{\mathfrak{M}'}x\,A(x)=\exists x\,(x\in\mathfrak{M}'\,\&A(x))$.

Эти равносильности проверяются непосредственно.

12.20. а) Напомним, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$, т. е. для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что если $|x-x_0|<\delta$, то $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Функция непрерывна на интервале $(0, 1)$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(0, 1)$.

б) Построить отрицание предыдущей формулы.

в) Функция равномерно непрерывна на (0, 1), если $\delta > 0$, фигурирующее в определении непрерывности, можно выбрать по $\varepsilon > 0$ одним и тем же для всех точек интервала.

д) В каждой точке $x \in (0, 1)$ сходится последовательность значений функций.

12.23. Легко построить формулы, содержащие индивидуальный предикат тождественного равенства, имеющиеся в произвольной области. Попытайтесь также получить формулы, не содержащие индивидуальных предикатов.

г) Рассмотрите формулу

$$\forall A \exists x \exists y \exists z \forall u\, (A\,(x,\ x) \vee A\,(x,\ y)\, A\,(y,\ z)\, \overline{A\,(x,\ z)} \vee \overline{A\,(x,\ u)}).$$

12.24. Можно считать, что аксиомы содержат только связанные переменные (предикатные и предметные), т. е. являются высказываниями для каждой области. Переходя к конъюнкции аксиом, можно считать, что мы имеем одну аксиому. Показать, что если некоторая формула без свободных переменных, содержащая лишь одноместные предикаты, истинна для какой-то области $\mathfrak{M}$, то она истинна для некоторой конечной области $\mathfrak{M}$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ § 12

12.1. Число одноместных предикатов на некотором множестве $\mathfrak{M}$ равно числу подмножеств этого множества (каждому предикату ставится в соответствие множество элементов, на которых он равен 1), т. е. на множестве из n элементов имеется 2^n одноместных предикатов. Далее, можно воспользоваться тем, что k-местные предикаты на $\mathfrak{M}$ можно рассматривать как одноместные предикаты на k-кратном прямом произведении множеств $\mathfrak{M}$, т. е. на области из n^k элементов.

12.2. Пусть $\mathfrak{M}$ состоит из элементов a, b и $A(a)=0$, $A(b)=1$.

12.3. а) $\forall x\,(A\,(x) \longrightarrow B\,(x)\, C\,(x)\, D\,(x))$;

б) $\forall x\,(A\,(x) \longrightarrow B\,(x) \vee C\,(x) \vee D\,(x))$;

в) $\forall f\,(A\,(f) \longrightarrow B(f) \vee C\,(f))$.

Другой вариант:

$$\forall f\,(A\,(f) \longrightarrow \forall x \forall y\,(x \in [0,1]\ \&\ y \in [0,1] \longrightarrow f\,(x)\, f\,(y) \geqslant 0) \vee \exists z\,(f(z)=0)).$$

12.4. а) $\forall f \forall \alpha\,(f\,(\alpha)=0 \longrightarrow f\,(\overline{\alpha})=0)$;

б) $\forall x \forall y \forall l\,(x \in l\ \&\ y \in l\ \&\ \overline{x=y} \longrightarrow \exists z\,(z \in l\ \&\ A(x,\, y,\, z) \& \overline{x=z}\ \&\ \overline{y=z}))$;

в) $\forall x \forall y\ (\overline{x=y} \longrightarrow \exists P\,(x \in P \& y \in P \& \forall Q\,(x \in Q \& y \in Q \longrightarrow P=Q)))$;

г) $\forall x\ \exists y\ A\,(x,\ y)$;

д) $\forall x \forall y\ \forall z\,(z \mid xy\ \&\ A\,(z) \longrightarrow z|x \vee z|y)$.

Имеем $A\,(z) = \forall x\,(x|z \longrightarrow x=z \vee x=1)$.

е) $\forall x \forall y \forall z\,(\overline{\exists l (x \in l \& y \in l \& z \in l)} \longrightarrow \exists U (x \in U \& y \in U \& z \in U \& \forall V (x \in V \&$ $\&\ y \in V\ \&\ z \in V \longrightarrow U=V)))$; x, y, z — точки, l — прямые, U, V — плоскости.

Заметим, что во всех рассмотренных примерах мы имели дело с высказываниями, а потому в полученных формулах все предметные переменные связаны.

12.5. Итак, пусть $\mathfrak{B}$ — бескванторная формула, содержащая индивидуальные одноместные предикаты $A_1, \ldots, A_m$ и предметные переменные $x_1, \ldots, x_m$. Тогда существует функция алгебры логики $\varphi(X_{ij})$

($i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$) *) такая, что $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)=\varphi(A_1(x_1), \ldots$ $\ldots, A_m(x_1); \ldots; A_1(x_n), \ldots, A_m(x_n))$. Предметные постоянные мы не учитываем, так как индивидуальные предикаты от них можно заменить логическими константами (0 или 1). Мы формально считаем входящими в $\mathfrak{B}$ все предикаты $A_i(x_j)$. Рассмотрим:

$$\tilde{\mathfrak{B}}(x_1; X_{12}, \ldots, X_{m2}; \ldots; X_{1n}, \ldots, X_{mn})=$$
$$=\varphi(A_1(x_1), \ldots, A_m(x_1); X_{12}, \ldots, X_{m2}; \ldots; X_{1n}, \ldots, X_{mn}).$$

Тогда $Qx_1\tilde{\mathfrak{B}}$ — функция алгебры логики $\psi(X_{ij})$ ($i=1, \ldots, m$; $j=2, \ldots, n$) **) и

$$Qx_1\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)=\psi(A_1(x_2), \ldots, A_m(x_2); \ldots; A_1(x_n), \ldots, A_m(x_n)).$$

Справа стоит бескванторная формула.

Случай нескольких кванторов рассматривается по индукции.

12.6. Предикат определяется множеством истинности (множеством наборов значений аргументов, при которых предикат равен 1). Удобно ввести предикаты

$$\delta_a(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x=a, \\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Для этого предиката множество истинности состоит из единственного элемента a. Поскольку предикат $\delta_{a_1}(x_1)\ldots\delta_{a_n}(x_n)$ равен 1 на единственном наборе $(a_1, \ldots, a_n)$, а дизъюнкции предикатов отвечает объединение их множеств истинности, то всякий предикат можно получить дизъюнкцией предикатов вида $\delta_{a_1}(x_1), \ldots, \delta_{a_n}(x_n)$.

12.7. Докажем утверждение, сформулированное в указаниях. Н е о б х о д и м о с т ь. В силу задачи 12.5 можно ограничиться бескванторными формулами. Формула является функцией алгебры логики от индивидуальных одноместных предикатов. Представим ее в виде ДНФ. Переходя в случае необходимости к новым одноместным предикатам, можно считать, что каждый член дизъюнкции является конъюнкцией одноместных предикатов, зависящих от различных предметных переменных (новые предикаты являются конъюнкцией предикатов, входящих в какую-то элементарную конъюнкцию и зависящих при этом от одной и той же переменной; достаточно рассмотреть все элементарные — не обязательно полные — конъюнкции предикатов, входящих в формулу). Ясно, что множество истинности такой конъюнкции является прямым произведением множеств истинности входящих в конъюнкцию предикатов. Всей формуле отвечает объединение этих прямых произведений.

Для доказательства достаточности заметим, что соответствие между конъюнкциями одноместных предикатов от различных переменных и прямыми произведениями подмножеств предметной области взаимно однозначно. Объединению прямых произведений отвечает дизъюнкция конъюнкций.

Решение задачи 12.6 по существу состояло в том, что в случае конечной области мы разбивали множество истинности в объединение одноэлементных множеств, являющихся, конечно, прямыми произведениями.

---

*) Мы обозначаем в этом параграфе логические переменные (принимающие значения 0, 1) прописными латинскими буквами.

**) Мы используем обозначение Qx в случае, когда для нас не существенно, какой именно квантор стоит в формуле.

Множество истинности предиката $x=y$ состоит из «диагонали прямого произведения» — множества пар (a, a) (например, прямая $x=y$ на плоскости (x, y)). Единственное разбиение этого множества в объединение прямых произведений — разбиение на одноточечные множества. Поэтому для бесконечного множества конечного разбиения не существует.

12.9. Достаточно привести примеры.

1. Пусть $A(x)$ — предикат на натуральном ряде: «быть четным числом»; $B(x)$ — предикат на натуральном ряде: «быть нечетным числом». Тогда высказывание $\forall x(A(x)\vee B(x))$ — «всякое натуральное число четное или нечетное» — истинно. Однако высказывание $\forall xA(x)\vee\forall y\, B(y)$— «всякое натуральное число четно или всякое натуральное число нечетно» — ложно (каждый член дизъюнкции ложен).

Аналогично из того, что «все школьники пошли в кино или в театр», не следует, вообще говоря, что «все школьники пошли в кино или все школьники пошли в театр» (они могли пойти в разные места: некоторые в кино, а другие — в театр).

Вообще, как легко проверить, всегда истинна импликация

$$\forall xA(x)\vee\forall yB(y)\longrightarrow\forall z(A(z)\vee B(z)),$$

однако импликация

$$\forall x(A(x)\vee B(x))\longrightarrow\forall yA(y)\vee\forall zB(z)$$

может быть ложной.

2. Аналогично рассматривается вопрос о другом дистрибутивном законе. Из того, что «существует мальчик с голубыми глазами и существует мальчик с карими глазами», не следует, конечно, что «существует мальчик с голубыми и карими глазами одновременно». Таким образом, импликация

$$\exists xA(x)\,\&\,\exists yB(y)\longrightarrow\exists z(A(z)\,\&\,B(z))$$

может быть ложной, в то время как импликация

$$\exists x(A(x)\,\&\,B(x))\longrightarrow\exists yA(y)\,\&\,\exists zB(z),$$

конечно, всегда истинна.

12.12. На натуральном ряде высказывание $\forall x\exists y(x>y)$ (для всякого натурального числа существует большее) истинно, а высказывание $\exists y\forall x(x<y)$ ложно, так как не существует наибольшего натурального числа. Аналогично верно, что «каждую книгу читал какой-либо человек» (например, автор!), хотя не верно, что «существует человек, который читал все книги».

Можно проверить истинность импликации

$$\exists x\forall yA(x, y)\longrightarrow\forall y\exists xA(x, y)\ ^{*}),$$

в то время как обратная импликация может быть ложной.

12.13. 1. Предикат $\forall yA(x, y)$ равен 1 для тех x_0, для которых вертикальная прямая $x=x_0$ содержится в множестве $A(x, y)$. Высказывание $\exists x\forall yA(x, y)$ истинно, если множество истинности для $A(x, y)$ содержит какую-либо вертикальную прямую.

---

*) Заметим, что фраза, отвечающая высказыванию $\exists x\forall yA(x, y)$, читается так: «Существует такой x, что для всякого y имеет место $A(x, y)$», высказывание же $\forall y\exists xA(x, y)$ читается так: «Для каждого y найдется такой x, что имеет место $A(x, y)$».

2. Предикат $\exists x A(x, y)$ равен 1 для тех y, которые содержатся в проекции множества истинности $A(x, y)$ на ось y.

Поэтому высказывание $\forall y \exists x A(x, y)$ истинно, если проекция множества истинности предиката $A(x, y)$ на ось y совпадает со всей осью.

Эти примеры иллюстрируют, что истинность $\exists x \forall y A(x, y)$ влечет истинность $\forall y \exists x A(x, y)$, однако обратное, вообще говоря, неверно (можно рассмотреть предикат равенства, которому отвечает прямая $x=y$).

12.15. а) $\overline{\forall x \forall y (P(x) \longrightarrow Q(y))} = \forall x \forall y \overline{(\overline{P(x)} \vee Q(y))} = \forall x \forall y (P(x) \& \overline{Q(y)})$;

б) $\exists x (\forall y (P(x, y, z) \& \overline{\exists u Q(x, u)})) \& \forall t \exists v (\overline{A(t) \vee B(v)}) =$

$$= \exists x (\forall y (P(x, y, z) \& \forall u \overline{Q(x, u)})) \& \forall t \exists v (\overline{A(t)} \& \overline{B(v)}) =$$

$$= \exists x \forall y (P(x, y, z) \& \overline{Q(x, y)}) \& \forall t \exists v (\overline{A(t)} \& \overline{B(v)}).$$

На последнем шаге мы воспользовались распределительным свойством квантора всеобщности (однако это делать не обязательно, так как почти нормальная форма была уже получена на предыдущем шаге).

12.16. 1) (задача 3.6). Запишем определение самодвойственной функции. Функция f самодвойственна, если

$$\forall \alpha (f(\alpha) = \overline{f(\overline{\alpha})}).$$

Квантор берется по множеству двоичных наборов α соответствующей длины; $\overline{\alpha}$ — противоположный набор. Тогда f — несамодвойственная функция, если $\overline{\forall \alpha \left(f(\alpha) = \overline{f(\overline{\alpha})}\right)}$, т. е. если $\exists \alpha \left(\overline{f(\alpha) = \overline{f(\overline{\alpha})}}\right)$ или, что то же, $\exists \alpha \left(f(\alpha) = f(\overline{\alpha})\right)$.

2) (задача 5.1). Определение монотонной функции:

$$\forall \alpha \forall \beta (\alpha \prec \beta \longrightarrow f(\alpha) \leqslant f(\beta)).$$

Поэтому f — немонотонная функция, если

$$\overline{\forall \alpha \forall \beta (\alpha \prec \beta \longrightarrow f(\alpha) \leqslant f(\beta))} = \exists \alpha \exists \beta \overline{(\alpha \prec \beta \longrightarrow f(\alpha) \leqslant f(\beta))} =$$

$$= \exists \alpha \exists \beta (\alpha \prec \beta \& \overline{f(\alpha) \leqslant f(\beta)}) = \exists \alpha \exists \beta (\alpha \prec \beta \& f(\alpha) > f(\beta)).$$

12.17. Последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел, если

$$\exists A \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists N \forall n (n > N \longrightarrow |a_n - A| < \varepsilon)).$$

Мы не перечисляем, по каким множествам берутся кванторы. Беря отрицание и приводя его к почти нормальной форме, получаем: последовательность $\{a_n\}$ не имеет конечного предела, если

$$\forall A \exists \varepsilon (\varepsilon > 0 \& \forall N \exists n (n > N \& |a_n - A| \geqslant \varepsilon)),$$

т. е. последовательность $\{a_n\}$ не имеет конечного предела, если для всякого A найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всякого N существует такое $n > N$, что $|a_n - A| \geqslant \varepsilon$.

12.18. а) Почти нормальная форма уже является нормальной.

б) В уже полученной формуле нужно лишь вынести кванторы:

$$\exists x \forall y (P(x, y, z) \& \overline{Q(x, y)}) \& \forall t \exists v (\overline{A(t)} \& \overline{B(v)}) =$$

$$= \exists x \forall y \forall t \exists v (P(x, y, z) \& \overline{Q(x, y)} \& \overline{A(t)} \& \overline{B(v)}).$$

12.20. а) $\forall x_1 (x_1 \in (0, 1) \longrightarrow \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists \delta (\delta > 0 \& \forall x_2 (|x_2 - x_1| < \delta \longrightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon))))$.

В этой формуле единственной свободной предметной переменной является функция f. Распространенная ошибка состоит в том, что при записи определения не связывают переменных x_1, x_2. Вообще, часто бывает легко упустить какой-либо квантор всеобщности. Заметим, что у нас все четыре квантора ограниченные.

б) Сразу приводим отрицание предыдущей формулы к почти нормальной форме, учитывая, что $\overline{x \to y} = x \& \bar{y}$. Получим

$$\exists x_1 (x_1 \in (0,\ 1) \ \& \ \exists \varepsilon (\varepsilon > 0 \ \& \ \forall \delta (\delta > 0 \longrightarrow \exists x_2 (\,|x_2 - x_1| < \delta \ \& \ |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant \varepsilon)))).$$

Советуем читателю проследить, как отразился бы пропуск каких-либо кванторов в определении непрерывности на определении разрывности.

в) $$\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists \delta (\delta > 0 \ \& \ \forall x_1 (x_1 \in (0,\ 1) \longrightarrow \forall x_2 (|x_2 - x_1| < \delta \longrightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon)))).$$

Определение равномерной непрерывности получается из определения непрерывности перестановкой кванторов. Перестановка одноименных кванторов $\forall x_1$ и $\forall \varepsilon$, как известно, не меняет смысла высказывания, однако перестановка кванторов $\forall x_1$ и $\exists \delta$ уже может его изменить, что и имеет место в этом случае, как показывают строящиеся в анализе примеры непрерывиых, но неравномерно непрерывных функций. Заметим, что из равномерной непрерывности следует непрерывность, что согласуется с общим замечанием, сделанным при обсуждении вопроса о перестановочности кваиторов (см. решение задачи 12.12).

г) Нужно взять конъюнкцию определения непрерывности и следующего высказывания, являющегося отрицанием определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon (\varepsilon > 0 \ \& \ \forall \delta (\delta > 0 \longrightarrow \exists x_1 (x_1 \in (0,\ 1) \ \& \exists x_2 (|x_2 - x_1| < \delta \ \& \ |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant \varepsilon)))).$$

д) $\forall x (x \in (0,\ 1) \longrightarrow \exists A \ \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists N \ \forall n (n > N \longrightarrow |A - f_n(x)| < \varepsilon)))$, или, что то же,

$$\exists f \forall x (x \in (0,\ 1) \longrightarrow \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists N \forall n (n > N \longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon)));$$

другими словами, утверждается существование предельной функции.

е) $$\exists f \ \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists N \ \forall x \ \forall n (x \in (0,\ 1) \ \& \ n > N \longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon))),$$

т. е. по сравнеиию со второй формулой из д) в е) переставлены кванторы $\forall x$ и $\exists N$ (перестановка $\forall x$ и $\forall \varepsilon$ не существенна).

ж) Нужно взять конъюнкцию формулы из д) и отрицания формулы из е), т. е. формулы

$$\forall f \exists \varepsilon (\varepsilon > 0 \ \& \ \forall N \exists x \exists n (x \in (0,\ 1) \ \& n > N \ \& \ |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon)).$$

Получающуюся в результате формулу можно несколько упростить: в силу единственности предельной функции во втором члене конъюнкции можно удалить квантор $\forall f$, распространив квантор $\exists f$ на оба члена.

Заметим, что при решении примеров на построение отрицаний формул удобно иметь в виду, что для ограниченных кванторов сохраняется соотношение двойственности.

12.21. Пусть на некотором множестве имеется отличный от тождественного равенства предикат $(x = y)'$, удовлетворяющий двум указанным условиям. Пусть, далее, a и b — два различных элемента, для которых предикат $(a = b)'$ равен 1 (в силу первого условия $(a = a)'$ всегда равен

1). Рассматривая предикат $A(x)$ такой, что $A(a)=1$, $A(b)=0$, мы получим, что высказывание $(a=b)'\to(A(a)\to A(b))$ ложно, и мы приходим к противоречию.

12.22. Справедливость этой формулы для одноэлементных областей очевидна и уже отмечалась. Если в области содержится два различных элемента a, b, то, рассматривая предикат $A(x)$ такой, что $A(a)=0$, $A(b)=1$, мы получаем, что формула ложна (ср. решение задачи 12.2).

12.23. а) $\exists x\,\exists y\,(\overline{x=y})$; можно также построить отрицание формулы из задачи 12.22: $\exists x\,\exists y\,\exists A\,(\overline{A(x)}\,\&\,A(y))$.

б) $\forall x\forall y\,\forall z\,\forall A\,(A(x)\vee A(y)\vee\overline{A(z)})$.

Ясно, что вообще области, содержащие не более k элементов, характеризуются формулой

$$\forall x_1\ \ldots\ \forall x_k\forall y\forall A\,(A(x_1)\vee\ \ldots\ \vee A(x_k)\vee\overline{A(y)}).$$

Доказательство аналогично решению задачи 12.22.

в) Нужно взять конъюнкцию формул из а) и б):

$$\exists x\exists y\exists A\,(\overline{A(x)}\,\&A(y)\,\&\,\forall z\forall t\forall u\forall B\,(B(z)\vee B(t)\vee\overline{B(u)})).$$

Можно вынести все кванторы. Аналогично можно описать области, содержащие ровно k элементов.

г) Рассмотрим формулу

$$A(x,\ x)\vee A(x,\ y)\,A(y,\ z)\,\overline{A(x,\ z)}\vee\overline{A(x,\ u)}$$

для предиката A на конечной области $\mathfrak{M}$. Предположим, что истинны высказывания $\forall x\,\overline{A(x,x)}$, $\forall x\,\exists u\,A(x,u)$, $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\overline{A(x,y)})\vee\vee\overline{A(y,z)}\vee A(x,z))$. Пусть $x_1\in\mathfrak{M}$; x_2 — такой элемент $\mathfrak{M}$, что $A(x_1,x_2)=1$ (x_2 существует в силу истинности второго из перечисленных высказываний); вообще, x_{i+1} выбирается из условия $A(x_i,x_{i+1})=1$. Получаем последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ По индукции показывается, что в силу истинности третьей из перечисленных формул $A(x_i,\ x_j)=1$ при $i<j$, откуда в силу первой формулы все $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots$ различны. Мы пришли к противоречию, так как область $\mathfrak{M}$ конечна. Таким образом, приведенная в указаниях формула истинна для любых конечных областей.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — бесконечная область. Разобьем ее элементы на непустые непересекающиеся множества $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots$ Для этого можно взять счетное подмножество $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ в $\mathfrak{M}$ (существующее в любом бесконечном множестве) и рассмотреть $\mathfrak{M}_i\ (i>0)$, состоящие из единственного элемента x_i, включив все остальные элементы $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}_0$. Рассмотрим предикат $A(x,y)$, равный 1, если $x\in\mathfrak{M}_i$, $y\in\mathfrak{M}_j$, где $i<j$, и 0 для остальных пар. Для него будет истинным высказывание

$$\exists x\exists y\exists z\forall u\,(A(x,\ x)\vee A(x,\ y)\,A(y,\ z)\,\overline{A(x,\ z)}\vee\overline{A(x,\ u)}),$$

а потому формула из указаний к данной задаче ложна.

д) Формула, характеризующая все бесконечные области, получается отрицанием формулы из г).

12.24. Пусть формула $\mathfrak{A}$ без свободных переменных с одноместными предикатами истинна в области $\mathfrak{M}$, и пусть $A_1, \ldots, A_n$ — предикатные переменные, которые в $\mathfrak{A}$ связаны кванторами существования, $A_1^0, \ldots, A_n^0$ — предикаты на $\mathfrak{M}$, замещая которыми $A_1, \ldots, A_n$, мы получим истинную формулу при любом замещении остальных предикатных переменных. Разобьем $\mathfrak{M}$ на непересекающиеся подмножества $\mathfrak{M}_i$, включив в одно подмножество все те элементы из $\mathfrak{M}$, на которых каждый из преднкатов $A_1^0, \ldots, A_n^0$ принимает одинаковые значения. Совокупность этих подмножеств $\bar{\mathfrak{M}}$ и является конечной областью, на которой $\mathfrak{A}$ истинна. Достаточно заметить. что одноместные предикаты $\bar{A}$ на $\bar{\mathfrak{M}}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с одноместными предикатамн A на $\mathfrak{M}$, постоянными на всех $\mathfrak{M}_i$ (значение $\bar{A}$ на $\mathfrak{M}_i \in \bar{\mathfrak{M}}$ совпадает со значением A на элементах $\mathfrak{M}_i$). В число последних предикатов входят A_i^0. Мы не будем приводить подробного рассуждения.

Отсюда следует, что никакой системой аксиом, содержащей лишь одноместные предикаты, нельзя охарактеризовать совокупность всех бесконечных областей, а значит, и всех конечных областей, так как одна аксиоматика получается из другой переходом к дизъюнкции отрицаний аксиом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Основные логические операции.

x	y	$\bar{x}$	$x \,\&\, y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \sim y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

2. Основные равносильности в алгебре логики.

$$\bar{\bar{x}} = x; \tag{2.1}$$

$$xy = yx; \tag{2.2}$$

$$(xy)\, z = x\, (yz); \tag{2.3}$$

$$x \vee y = y \vee x; \tag{2.4}$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z); \tag{2.5}$$

$$x\, (y \vee z) = xy \vee xz; \tag{2.6}$$

$$x \vee yz = (x \vee y)\, (x \vee z); \tag{2.7}$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}; \tag{2.8}$$

$$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}; \tag{2.9}$$

$$x \vee x = x; \tag{2.10}$$

$$xx = x; \tag{2.11}$$

$$1x = x; \tag{2.12}$$

$$0 \vee x = x; \tag{2.13}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}; \tag{2.14}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\, x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}; \tag{2.15}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n; y_1, \ldots, y_m)\, x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}; \tag{2.16}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n})=0} x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}; \qquad (2.17)$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}) \vee x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}; \qquad (2.18)$$

$$f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = \prod_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}; y_1, \ldots, y_m) \vee x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}; \qquad (2.19)$$

$$x \vee xy = x; \qquad (2.20)$$

$$x(x \vee y) = x; \qquad (2.21)$$

$$x \vee \bar{x}y = x \vee y; \qquad (2.22)$$

$$\bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y; \qquad (2.23)$$

$$x(\bar{x} \vee y) = xy; \qquad (2.24)$$

$$\bar{x}(x \vee y) = \bar{x}y. \qquad (2.25)$$

3. Описание функционально замкнутых классов.

Общие соглашения об обозначениях. Если Q — функционально замкнутый класс, то Q_0 — класс, состоящий из элементов класса Q, сохраняющих 0 ($Q_0 = Q \cap \mathbf{P}_0$); Q_1 состоит из элементов Q, сохраняющих 1; $Q_{01} = Q_0 \cap Q_1$ — совокупность элементов Q, сохраняющих и 0 и 1. Через Q^0, Q^1, Q^{01} обозначаются функционально замкнутые классы, получаемые из Q расширением соответственно при помощи 0, 1 и обеих констант 0, 1. При этом под расширением понимается наименьший функционально замкнутый класс, содержащий Q и соответствующие константы, который, вообще говоря, не будет совпадать с объединением Q и этих констант (например, как следует из теоремы Поста, $\mathbf{P}_0^1 = \mathbf{P}$). Однако в тех немногих случаях, когда мы прибегаем к указанным обозначениям Q^0, Q^1, Q^{01} получаются из Q простым добавлением соответствующих констант. Наконец, если Q и R — функционально замкнутые классы, то QR — функционально замкнутый класс, являющийся пересечением Q и R. Следуя этим обозначениям, один и тот же класс можно обозначать различными способами.

Перейдем к описанию классов:

$\mathbf{P}$ — класс всех функций алгебры логики.

$\mathbf{P}_0$ — класс всех функций, сохраняющих 0 ($f \in \mathbf{P}_0 \Longleftrightarrow f(0, \ldots, 0) = 0$).

$\mathbf{P}_1$ — класс всех функций, сохраняющих 1; $\mathbf{P}_1$ двойствен $\mathbf{P}_0$.

$\mathbf{P}_{01} = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$; этот класс самодвойствен, т. е. переход к двойственной функции не выводит за пределы класса (самодвойственность класса, разумеется, не означает, что его элементы являются самодвойственными функциями).

$\mathbf{M}$ — класс монотонных функций (определение 5.2); этот класс самодвойствен.

$\mathbf{M}_1$ состоит из монотонных функций, сохраняющих 1 (таковы все монотонные функции, отличные от тождественного нуля), т. е. $\mathbf{M}_1$ получается из $\mathbf{M}$ отбрасыванием константы 0.

Класс $\mathbf{M}_0$ монотонных функций, сохраняющих 0, получается из $\mathbf{M}$ отбрасыванием константы 1; классы $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{M}_1$ двойственны друг другу.

Совокупность всех монотонных функций, не являющихся константами, совпадает с классом $\mathbf{M}_{01}$ всех монотонных функций, сохраняющих 0 и 1; этот класс самодвойствен.

$\mathbf{S}$ — класс самодвойственных функций $(f \in \mathbf{S} \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)})$; этот класс и все его подклассы самодвойственны.

$\mathbf{S}_{01}$ — класс самодвойственных функций, сохраняющих 0 и 1; $\mathbf{S}_{01} = \mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_1$, т. е. из того, что самодвойственная функция сохраняет 0, следует, что она сохраняет 1, и обратно.

$\mathbf{SM}$ — класс самодвойственных монотонных функций.

$\mathbf{L}$ — класс линейных функций $(f \in \mathbf{L} \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n + a)$; $\mathbf{L}$ — самодвойственный класс.

$\mathbf{L}_0$ — класс линейных функций, сохраняющих 0, т. е. функций вида $x_1 + \ldots + x_n$.

$\mathbf{L}_1$ — класс линейных функций, сохраняющих 1, т. е. функций вида $x_1 + \ldots + x_{2k} + 1$, $x_1 + \ldots + x_{2k+1}$. Классы $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_1$ двойственны.

Класс $\mathbf{LS}$ самодвойственных линейных функций совпадает с множеством функций вида $x_1 + \ldots + x_{2k+1} + a$.

$\mathbf{L}_{01} = \mathbf{L}_0\mathbf{L}_1$ — самодвойственный класс, состоящий из функций вида $x_1 + \ldots + x_{2k+1}$; $\mathbf{L}_{01} = \mathbf{LS}_0 = \mathbf{LS}_1$.

Класс $\mathbf{O}$ функций от одной переменной состоит из функций 0, 1, x, $\bar{x}$.

Множество $\{0, 1, x\}$ совпадает одновременно с классом $\mathbf{OM}$ монотонных функций от одной переменной и классом $\mathbf{ML}$ монотонных линейных функций; это самодвойственный класс.

Класс из двух функций $\{x, \bar{x}\}$ *) можно описать как совокупность самодвойственных функций от одной переменной.

Пары функций $\{0, x\}$, $\{1, x\}$ *) являются классами функций от одной переменной, сохраняющими соответственно 0, 1 ($\mathbf{O}_0$, $\mathbf{O}_1$). Они двойственны друг другу.

Класс $\mathbf{D}$ (соответственно $\mathbf{K}$) состоит из дизъюнкций $x_1 \vee \ldots \vee x_k$, $k \geqslant 1$ (соответственно конъюнкций $x_1 \ldots x_k$, $k \geqslant 1$). Классы $\mathbf{D}^0$, $\mathbf{D}^1$, $\mathbf{D}^{01}$, $\mathbf{K}^0$, $\mathbf{K}^1$, $\mathbf{K}^{01}$ получаются из классов $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$ добавлением соответствующих констант. Классам $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^0$, $\mathbf{D}^1$, $\mathbf{D}^{01}$ двойственны соответственно классы $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}^1$, $\mathbf{K}^0$, $\mathbf{K}^{01}$.

Самодвойственный класс $\{x\}$ *) совпадает с $\mathbf{KD} = \mathbf{OS}_0 = \mathbf{OS}_1 = \mathbf{O}_{01}$.

Функция f принадлежит классу $\mathbf{F}^{(k)}$ ($\mathbf{G}^{(k)}$), $k \geqslant 2$, если любые k наборов, на которых f равна 0 (соответственно 1), имеют общий нуль (соответственно единицу) в некотором разряде.

Функции f, у которых все наборы, на которых f равна 0 (соответственно 1), имеют общий нуль (соответственно единицу), образуют $\mathbf{F}^{(\infty)}$ (соответственно $\mathbf{G}^{(\infty)}$).

Монотонные функции из $\mathbf{F}^{(k)}$, $k \leqslant \infty$ (соответственно из $\mathbf{G}^{(k)}$, $k \leqslant \infty$) составляют класс $\mathbf{MF}^{(k)}$ ($\mathbf{MG}^{(k)}$); функции из $\mathbf{F}^{(k)}$ ($\mathbf{G}^{(k)}$), сохраняющие 0 (1), образуют класс $\mathbf{F}_0^{(k)}$ ($\mathbf{G}_1^{(k)}$). Классам $\mathbf{F}^{(k)}$, $\mathbf{MF}^{(k)}$, $\mathbf{F}_0^{(k)}$ двойственны соответственно классы $\mathbf{G}^{(k)}$, $\mathbf{MG}^{(k)}$, $\mathbf{G}_1^{(k)}$, $2 \leqslant k \leqslant \infty$.

Кроме перечисленных имеются еще три класса, состоящие из констант: $\{0, 1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$.

В задачах, связанных с расширенной суперпозицией, следует иметь в виду, что лишь семь классов содержат обе константы: $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{O}$, $\mathbf{D}^{01}$, $\mathbf{K}^{01}$, $\mathbf{OM}$.

---

*) С точностью до переобозначения переменных.

ЛИТЕРАТУРА

§ 1*).

[1] Дж. Т. Калбертсои, Математика и логика цифровых устройств, «Просвещеиие», 1965.

[2] Л. А. Калужиии, Что такое математическая логика, «Наука», 1964.

[3] Дж. Кемеии, Дж. Сиелл, Дж. Томпсои, Введение в конечиую математику, ИЛ, 1963.

[4] Р. Столл, Множества. Логика. Аксиоматические теории, «Просвещеиие», 1967.

[5] И. М. Яглом, Необыкиовеииая алгебра, «Науиа», 1968.

§ 5.

[1] В. К. Коробиов, К вопросу о числе моиотоиных фуикций алгебры логики, Дискретный аиализ, вып. 1, Новосибирск, 1963.

§ 6.

[1] Г. А. Шестопал, О числе простых базисов булевых фуикций, ДАН СССР **140**, № 2 (1961), 314—317.

§ 7.

[1] E. Post, Two-valued iterative systems, 1941.

[2] С. В. Яблоиский, Г. П. Гаврилов, В. Б. Кудрявцев, Фуикции алгебры логики и классы Поста, «Наука», 1966.

[3] С. Г. Гиидиким, А. А. Мучиик, Решение проблемы полноты для систем функций алгебры логики с ненадежиой реализацией, Проблемы кибернетикн, вып. 15, «Наука», 1965, 65—84.

§ 8.

[1] В. Б. Кудрявцев, Теорема полноты для одного класса автоматоа без обратных связей, Проблемы кибериетики, вып. 8, Физматгиз, 1962, 91—115.

[2] М. И. Кратко, Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознаваиия полиоты для коиечных автоматов, ДАН СССР **155**, № 1 (1964), 35—37.

[3] Автоматы, сб. статей, ИЛ, 1956.

[4] Н. Е. Кобринский, Б. А. Трахтеиброт, Введеиие в теорию конечных автоматов, Физматгиз, 1962.

---

*) В списке литературы к § 1 указаиа дополиительиая литература, чтение которой может предшествовать чтению этой иниги.

[5] М. Л. Цетлин, Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем, «Наука», 1969.

[6] Дж. фон Нейман, Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент, в сб. [3], 68—139.

§ 9.

[1] О. Б. Лупанов, О синтезе контактных схем, ДАН СССР **119**, № 1 (1958), 23—26.

[2] Э. И. Нечипорук, Об одной булевой функции, ДАН СССР **169**, № 4 (1966), 765—766.

[3] С. В. Яблонский, Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем. Проблемы кибернетики, вып. 2, Физматгиз, 1959, 75—121.

[4] О. Б. Лупанов, О синтезе некоторых классов управляющих систем, Проблемы кибернетики, вып. 10, Физматгиз, 1963, 63—98.

[5] С. В. Яблонский, Реализация линейной функции в классе π-схем, ДАН СССР 94, № 5 (1954), 805—806.

[6] Б. А. Субботовская, О реализации линейных функций формулами в базисе &, $\vee$, $\bar{\ }$, ДАН СССР **136**, № 3 (1961), 553—555.

[7] О. Б. Лупанов, О сложности реализации функций алгебры логики формулами, Проблемы кибернетики, вып. 3, Физматгиз, 1960, 61—80.

[8] А. Карацуба, Ю. Офман, Умножение многозначных чисел на автоматах, ДАН СССР **145**, № 2 (1962), 293—294.

[9] А. Л. Тоом, О сложности схемы из функциональных элементов, реализующей умножение целых чисел, ДАН СССР **150**, № 3 (1963), 496—498.

§ 10.

[1] А. М. Яглом, И. М. Яглом, Вероятность и информация, Физматгиз, 1960.

[2] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, «Мир», 1967.

[3] С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, 1946.

[4] См. [3] в § 1.

[5] Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, 1957.

[6] См. [5] в § 8.

[7] Э. Мур, К. Шеннон, Надежные схемы из ненадежных реле, Кибернетический сборник, вып. 1, ИЛ, 1960, 109—148.

[8] С. Г. Гиндикин, О полиномах Бернштейна, связанных с функциями алгебры логики, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Баку, 1965, 590—595.

[9] См. [3] в § 7.

§ 11.

[1] С. В. Яблонский, Функциональные построения в k-значной логике, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **LI**, Изд-во АН СССР, 1958, 5—142.

[2] И. М. Виноградов, Основы теории чисел, Гостехиздат, 1953.

[3] А. Саломаа, Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики, Кибернетический сборник, вып. 8, «Мир», 1964, 7—32.

[4] В. В. Мартынюк, Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках, Проблемы кибернетики, вып. 3, Физматгиз, 1960, 49—60.
[5] I. Rosenberg, La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), Gr 1, 3817—3819.
[6] Е. Ю. Захарова, В. Б. Кудрявцев, С. В. Яблонский, О предполных классах в k-значных логиках, ДАН СССР **186**, № 3 (1969), 509—512.
[7] Ю. И. Янов, А. А. Мучник, О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, ДАН СССР **127**, № 1 (1959).

§ 12.
[1] Э. Ландау, Основы анализа, ИЛ, 1947.
[2] С. Феферман, Числовые системы. Основания алгебры и анализа, «Наука», 1971.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ